

Вариант 11

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{2+2i}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{6} < \arg(z-3i) \leq \pi, |z-3i| < 2 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в начале координат, расположенный слева от оси Oy .

5. Найдите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z^2 \operatorname{Im} z$.

6. Запишите в алгебраической форме:

а) $\sqrt[i]{i}$;

б) $\operatorname{Ln}(-1+i)$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 2i$ при отображении

$$w = \frac{z+2}{z-i}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = e^{-2x} \cos 2y, \quad f(i\pi) = 1.$$

9. Вычислите $\int_l z \bar{z}^2 dz$, если l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{z \operatorname{sh} z dz}{4z^2 + \pi^2}$, если

а) $C = \{z : |z-i|=1\}$; б) $C = \{z : |z+i|=1\}$; в) $C = \{z : |z|=4\}$.

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \sin(3z-1)$ по степеням $(z+1)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1-e^{(z+4)}}{(z+4)^6}$, $z_0 = -4$; б) $f(z) = (z-1) \cos \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$;

в) $f(z) = \frac{z^2 - \sin z^2}{z^6}$, $z_0 = 0$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}$; б) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos(z-1)}{z^3}$;

в) $\operatorname{res}_{z=0} (z-1)^2 e^{\frac{1}{z}}$; г) $\operatorname{res}_{z=\infty} \sin\left(\frac{2}{z-1}\right)$.

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^i}{z+1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}.$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \cos \frac{1}{z-3}$$

по степеням $(z-3)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}; \quad б) \oint_{|z|=3/4} \frac{dz}{\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2(z-i)}.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 2\sqrt{3} \sin x}; \quad в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

Вариант 12

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -1 + i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[6]{\frac{-64}{i}}.$$

3. Представьте в алгебраической форме числа:

$$a) (1-i)^{2i}; b) \operatorname{Ln}(-2i).$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}, 1 < |z-i| < 2 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = -1$, расположенный выше оси Ox .

5. Найдите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ для функции $w = z\bar{z}^2$.

6. Найдите все решения уравнения

$$\cos z = i \sin z + i.$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ при отображении $w = \operatorname{ch} z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = e^y \cos x, f(0) = i.$$

9. Вычислите $\int_l z^2 \operatorname{Im} z dz$, где l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z(z+i)(z-2i)}$, где

$$a) C: |z| = \frac{1}{2}; b) C: |z+i| = \frac{1}{2}; \quad в) C: |z| = 3.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{sh}(1-z)$ по степеням $\left(z - 1 - \frac{i\pi}{2}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = (z-i)e^{\frac{1}{z-i}}, z_0 = i; b) f(z) = \frac{\sin(z-i)}{(z-i)^5}, z_0 = i;$$

$$в) f(z) = \frac{1-e^{z+2}}{(z+2)}, z_0 = -2.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=1} = \frac{\sin(z-1)}{z-1}; b) \operatorname{res}_{z=i} = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=1} \left(z \cos \frac{2}{z-1} \right); z) \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{2z+1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z+i}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+i)^n}.$$

15. Разложите функцию $f(z) = e^z \cos z$ по степеням z . Найдите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{1+3z}$$

в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{а) } \int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}; \quad \text{б) } \int_{|z|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 \cos \frac{1}{z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - \sqrt{5} \sin x}; \quad \text{в) } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zt} dz}{(z^2 - 1)^2}, \quad t < 0.$$

Вариант 13

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt{(-1+i\sqrt{3})^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z + \cos z = 1.$$

4. Представьте в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{Arctg} 2i; \quad \text{б) } i - \frac{i}{\pi}.$$

5. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек

$$D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg(z+1) \leq \frac{5\pi}{4}, |z+1| > 3 \right\};$$

б) запишите неравенствами область:

полуокруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = -1$, расположенный левее прямой $x = -1$.

6. Выделите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, если $w = e^{\bar{z}}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = e^z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = e^x \sin y + 2y, \quad f(0) = 2.$$

9. Вычислите $\int_l \bar{z}^2 dz$, где l – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^2(z-i)(z+2i)}$, где

$$\text{а) } C: |z| = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } C: |z-i| = \frac{1}{2}; \quad \text{в) } C: |z| = 3.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \cos(2z+1)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций

$$\text{а) } f(z) = \sin \frac{z}{z-2}, \quad z_0 = 2; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1 - \cos(z+i)}{(z+i)^2}, \quad z_0 = -i;$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{z}{z^5 - 3z^4}, \quad z_0 = \infty.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{1-e^z}{z^2-4z}; \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=1} \frac{\cos z \pi}{(z-1)^3};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=0} (z+1)e^{\frac{2}{z}}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (2^{n^3} + 1)^{-1} (z-a)^{2n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$$

в окрестности точки $z = 0$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} z \pi \, dz; \quad б) \oint_{|z-3i|=4} \frac{dz}{e^z + 1}.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 9}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 \sin x + 5}; \quad в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x \, dx}{x^2 + 9}.$$

Вариант 14

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{1}{1+i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{2-2i}}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z - \cos z = 1.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z: \pi < \arg(z+3) \leq \frac{3}{2}\pi, \quad 1 \leq |z+3| \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $y = 1$ и $y = 3$ правее оси Oy .

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{2}\right)$; б) i^{2i} .

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = (z-1)^2 \operatorname{Im} z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = 2z^2 + 3e^{-iz}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 3 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3i.$$

9. Вычислите $\int_l z \operatorname{Re} z^2 dz$, где l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{(e^z - 1) dz}{z^3(z-1)}$, если

а) $C = \left\{ z: |z| = \frac{1}{2} \right\}$; б) $C = \left\{ z: |z-1| = \frac{1}{2} \right\}$; в) $C = \left\{ z: |z| = \frac{3}{2} \right\}$.

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{(z-i)}}{(z-i)^6}$, $z_0 = i$; б) $f(z) = \frac{\cos(z+2i)-1}{(z+2i)^2}$, $z_0 = -2i$;

в) $f(z) = \frac{z-\pi}{(e^{iz}+1)^3}$, $z_0 = \pi$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{z+1-\sin(z+1)}{(z+1)^5}$; б) $\operatorname{res}_{z=-\pi} \frac{e^{2iz}-1}{z+\pi}$;

в) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^3+1}{z} \exp\left(\frac{1}{z}\right)$; г) $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\sin^2 z}{z^3}$.

14. Разложите функцию $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости ряда.

15. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{5}\right)^n.$$

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{a) } \oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z+\pi)^3} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) dx}{(x^2+4)(x^2+9)}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \sqrt{15} \cos x}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2 + 4}.$$

Вариант 15

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{2}{1-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z - \cos z = 2.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z-1+i) \leq 0, |z-1+i| > 4 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 0$, $x = 2$ ниже оси Ox .

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^{20}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = e^{z^2}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ при отображении $w = \operatorname{ch} z - z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, \quad f(1) = i.$$

9. Вычислите $\int_l \bar{z} dz$, где l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 2$, $z_2 = i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(z-i\pi)^2}$, где

$$a) C = \{z : |z|=1\}; б) C = \{z : |z-3i|=1\}; в) C = \{z : |z|=4\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{ch}(1-z)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(z - 1 - \frac{i\pi}{2}\right)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{(z-3)}}{(z-3)^3}, \quad z_0 = 3; б) f(z) = z \cos \frac{1}{z+2i}, \quad z_0 = -2i;$$

$$в) f(z) = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{e^{iz} - i}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z - z}{z^3}; б) \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^5};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=2} \left(z^3 \cos \frac{1}{z-2} \right); г) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z-1)e^{\frac{1}{z}} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 3$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$; б) $\oint_{|z+3|=1} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{z+3}} dz$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6+\sqrt{35}\sin x}$; в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a > 0$.