Метод хорд

Идея способа хорд состоит в том, что можно с известным приближением допустить, что функция на достаточно малом участке [a, b] изменяется линейно. Тогда кривую y = f(x) на участке [a, b] можно заменить хордой и в качестве приближенного значения корня принять точку пересечения хорды с осью абсцисс.

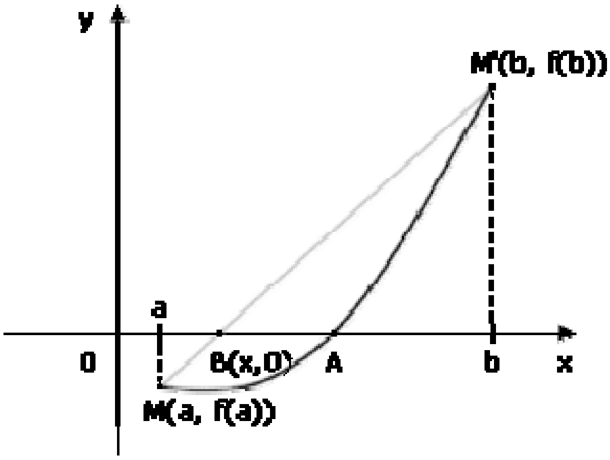

Рис. 1

Построим график функции y = f(x) на участке [a, b]. Истинный корень уравнения f(x) = 0 есть абсцисса точки A, являющейся точкой пересечения кривой MM' с осью абсцисс.

Заменив кривую MM' хордой MM', мы примем в качестве приближенного значения корня абсциссу точки B, в которой хорда пересекается с осью.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки M(a, f(a)) и M'(b, f(b)):

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Абсцисса точки B, являющаяся приближенным корнем x_1 уравнения f(x) = 0, может быть найдена из уравнения прямой, если положить в нем y = 0. Тогда получим

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

или, иначе:

$$x_1 = a - \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (*)$$

Уравнение рассматриваемой прямой можно записать и в таком виде:

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - y}{a - b}$$

Полагая здесь y = 0, придем к формуле

$$x_1 = b - \frac{(b - a)f(b)}{f(b) - f(a)} \quad (**)$$

Очевидно, формулы (*) и (**) тождественны. Мы будем пользоваться той из них, которая окажется более удобной.

Полученное значение x_1 можно снова использовать для дальнейшего уточнения корня по способу хорд, рассматривая интервал [a, x_1] или же [x_1, b], смотря по тому, в каком из них лежит истинный корень. Чтобы определить это, находят знак f(x_1).

Метод касательных

Рассмотрим уравнение f(x) = 0. Возьмем некоторую точку с участка c ∈[a, b] и проведем в точке [c, f(c)] графика функции касательную к этому графику (рис 2). Уравнение касательной имеет вид: y-f(c) = f'(c)(x-c).

В качестве приближенного корня уравнения примем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Полагая в уравнении касательной y = 0, находим для абсциссы точки пересечения:

$$x_2 = c - \frac{f(c)}{f'(c)} \quad (***)$$

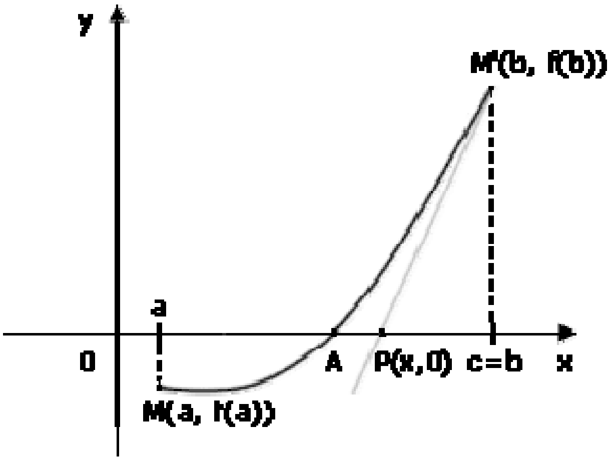

Рис. 2

Остается решить вопрос о выборе точки c.

На рисунке мы выбрали c = b. Обычно принимают c = a или c = b, смотря по тому в какой из этих точек знак функции совпадает со знаком второй производной, т. е. c выбирают так, чтобы произведение f(c)*f''(c) > 0.

В этом случае можно гарантировать, что приближенное значение корня x_2, полученное по способу касательных, лежит на интервале [a, b].

Как и в способе хорд, значение x_2 можно использовать для дальнейшего уточнения корня, беря интервал [a, x_2] или [x_2, b].

Лабораторная работа 2. Решение алгебраических уравнений

Задание: решить уравнение *f(x)=0* с точностью ε=0.001

Порядок выполнения

1. Выставите опции Mathcad:
   а) число значений после запятой : 8
   б) точность 0.000001
2. Задайте функцию *f(x)*.
3. Постройте график заданной функции, задайте промежуток [a;b] содержащий корень. Подберте границы промежутка так, чтобы выражения для первой и второй производной $f'(x)$ *и* $f''(x)$ на этом промежутке были знакопостоянны.
4. Задайте границы [a;b], количество предполагаемых итераций (m=100) и точность ε=0.001.
5. Задайте последовательность приближенных значений корня методом **касательных**. Для этого
   а) подготовьте функцию – производную,

пр. $\mathrm{ypr}(x) := \frac{d}{dx}y(x)$

   б) используйте приближение $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

пр.

$$
K := \left|
\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow 0.1 \\
x_1 \leftarrow x_0 - \left(\dfrac{y(x_0)}{\mathrm{ypr}(x_0)}\right) \\
k \leftarrow 1 \\
\text{while } \left|x_k - x_{k-1}\right| - e > 0 \wedge k < m + 2 \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_{k+1} \leftarrow x_k - \left(\dfrac{y(x_k)}{\mathrm{ypr}(x_k)}\right) \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\
\text{error("k>m") if } k > m \\
x
\end{array}
\right.
$$

6. Проверьте вычисление с использованием встроенной функции **root**(*f(t),t*), где t – приближенное значение корня, которое задается перед использованием функции.

пр. $t := 0.5$ $\quad r := \mathrm{root}(y(t), t)$

7. Измените точность ε=0.00001, проанализируйте изменение результата.
8. Задайте аналогичную последовательность приближенных значений корня методом **хорд**, используя приближение $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x)$
8. Дополнительно. Постройте комбинированный метод хорд и касательных.

Задания

Номер варианта	$f(x)$		
1	$\ln x - \frac{1}{x^2}$	16	$e^{-x} - \sqrt{x-1}$
2	$2 \cdot \ln x - \frac{x}{2} + 1$	17	$2 \cdot \sin(3 \cdot x) - 1{,}5 \cdot x$
3	$\frac{1-x}{x} - 3\cos(5x)$	18	$0{,}1 \cdot e^{-x} - \frac{x}{2}$
4	$\sin(x) - x^2$	19	$\ln(1{,}2x) - 1{,}5 \cdot x + 2$
5	$\sin\left(\frac{x}{4}\right) - x^2 - 2x$	20	$tg(2{,}5 \cdot x) - 5 \cdot x$
6	$\sqrt{x} - 3\sin x$	21	$\ln x - 2\cos x$
7	$\sqrt{x} - \cos\frac{x}{2}$	22	$\sqrt{2 - x^2} - e^x$
8	$2 \cdot \ln x - \frac{1}{x}$	23	$e^{-(x+1)} + x^2 + 2x - 1$
9	$x - 3 \cdot \cos^2 x$	24	$e^{-x} - 2 + x^2$
10	$\frac{\cos(7.5x)}{3} - 2(x+1)$	25	$xe^x - x - 1$
11	$\ln x - \frac{7}{2 \cdot x + 6}$	26	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}$
12	$e^{-x} - (x-1)^2$	27	$\sin(x+2) - x^2 + 2x - 1$
13	$e^x + x^2 - 2$	28	$x - e^{-x^2}$
14	$e^x - 2 \cdot (x-1)^2$	29	$x\ln x - x^2 + 3x - 1$
15	$e^x + 2 \cdot x^2 - 3$	30	