Занятие 4

Задача Штурма - Лиувилля

К теме «Линейные однородные уравнения 1-го порядка в частных производных»

1. $\begin{cases} y'' + 2y' - \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$ (не задача Ш-Л. Но решать надо)

2. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(1/2) = y'(1/3) = 0 \end{cases}$ Отв. $\lambda_k = (\frac{\pi}{2} + \pi k)^2$ $C_1 = -C_2 tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})$

Решить задачу Коши

1. $\begin{cases} (x - 2e^y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$

ответ: общее решение $u = \Phi(xe^y - e^{2y})$; частное решение $u = xe^y - e^{2y} - 1$

2. $\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ u(1, y, z) = \ln z - \dfrac{1}{y} \end{cases}$

ответ: общее решение $u = \Phi(y; \frac{x}{y} - \ln|z|)$; частное решение $u = \ln z - \frac{x}{y}$

3. Найти общее решение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ответ: общее решение $u = \Phi(\frac{y}{x}; z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

(указание: для построения второй интегрируемой комбинации используйте свойство равных дробей)