Лабораторная работа 1

Вычисление определенного интеграла методом центральных прямоугольников, трапеций и методом Симпсона.

Порядок выполнения работы

1. Задать функцию интегрирования;
2. задать пределы интегрирования;
3. задать точность e=0.001;
4. задать программу вычисления методом центральных прямоугольников;
5. задать программу вычисления методом трапеций;
6. задать программу вычисления методом Симпсона;
7. вывести ответы и сравнить их для разных чисел разбиения;
8. построить на графике зависимость значения интеграла от шага разбиения;
9. исследовать поведение апостериорной оценки погрешности (графически);
10. придумать итерационную процедуру достижения значения интеграла заданной точности.

УКАЗАНИЯ

Задача приближенного интегрирования состоит в вычислении определенного интеграла по значениям подынтегральной функции в отдельных точках - узлах. Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где f(x) задана в отдельных точках отрезка (a,b), причем, не всегда равномерно (рис.1). Принимая i достаточно большим, а Δx достаточно малым, можно вычислить определенный интеграл согласно определению $S = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x \cdot$

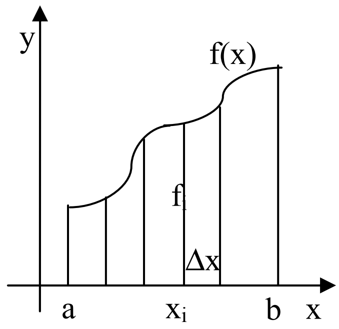


Рис.1.

п.1. Метод трапеций.

Простейшим случаем является аппроксимация каждой криволинейной трапеции, прямолинейной (рис.2), площадь которой равна S_i=½(f(x_i)+f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1}). Суммируя по i, находим приближенное значение интеграла на промежутке от a до b. При использовании равномерной сетки по x, выражение S упроститься: S=½(f(x_i)-f(x_{i-1}))Δx, где Δx=$\frac{a-b}{N}$, N – число точек отрезка (a,b).

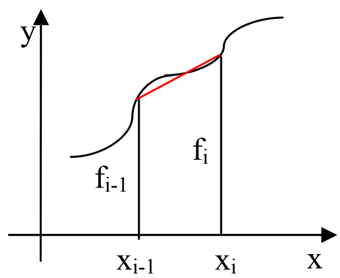
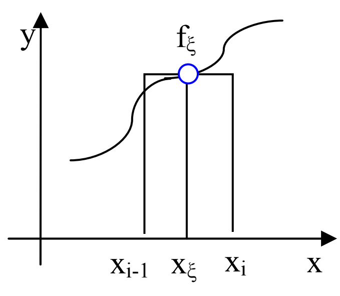


Рис.2.

п.2. Метод прямоугольников.

Аппроксимируя функцию f(x) на частичном отрезке x_i-x_{i-1} прямоугольником (рис.3), получим формулу прямоугольников.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_i f(x_\xi)(x_i - x_{i-1})\,.$$



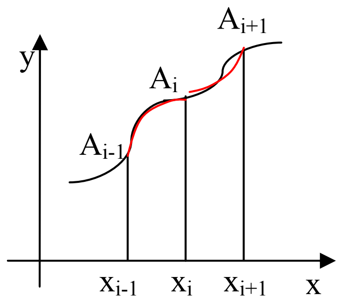
Однако в этом случае значение каждого слагаемого, а, следовательно, и интеграла, будет зависеть от выбора x_ξ на интервале x_i-x_{i-1}. Для дискретного набора f_i это потребует вычисления средневзвешенного значения функции (между f(x_i)+f(x_{i-1}))

Рис.3.

в точке x_ξ. В простейшем случае x_ξ может совпадать либо с правой либо с левой границей частичного отрезка.

п.3. Метод Симпсона.

Наиболее точным является метод Симпсона. Метод заключается в том, что на каждом частичном интервале (x_{i-1}-x_{i+1}) функция интерполируется с использованием трех точек.

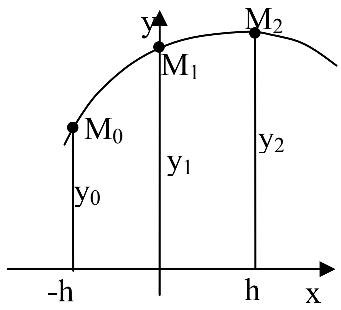


Выделим две элементарных площади и их площади заменим площадью криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой, построенной по трем точкам A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, т.е. параболической трапецией.

Уравнение параболы: $y=Ax^2+Bx+C$

Найдем ABC и вычислим площадь одной параболической трапеции. Нам потребуется следующая лемма

ЛЕММА. Если криволинейная трапеция ограничена параболой $y=Ax^2+Bx+C$, осью Ox и двумя ординатами, расстояние между которыми 2h, то ее площадь равна



$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Доказательство. Расположим систему координат так, что ось OY проходит через среднюю точку.

Определим ABC

$x_0=-h$, то $y_0=Ah^2-Bh+C$

$x_1=0$, то $y_1=C$ (*)

$x_2=h$, то $y_2=Ah^2+Bh+C$

С другой стороны $\int\limits_{-h}^{h} Ax^2+bx+Cdx=\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\Big|_{-h}^{h}=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C)$ (**)

Из (*) и (**) следует $y_0+4y_1+y_2 = 2Ah^2+6C$

Т.о. $S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$ ч.т.д

Рассматривая сумму параболических трапеций с основаниями 2h, получаем формулу Симпсона для вычисления определенного интеграла.

В этом случае частичная площадь i-ой криволинейной трапеции находится как $S_i=\frac{f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})}{6}(x_{i+1}-x_{i-1})$. Если шаг по отрезку равномерный, формула упрощается $(x_i-x_{i-1})=h$ $S_i=\frac{f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})}{3}h$. Суммируя все частичные суммы, получаем

$$S=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+...+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)=$$

$$=\frac{h}{3}(f_0+4(f_1+f_3+...f_{n-1})+2(f_2+f_4+...f_{n-2})+f_n)=\frac{h}{3}(f_0+f_n+2\sum_{k=1}^{n-1}f_{2k}+4\sum_{1=1}^{n}f_{2l-1})$$

Варианты заданий:

1. $\int\limits_{-4}^{4} \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{20}} dx$

2. $\int\limits_{0}^{4.5} x^x \cdot \sin^2 x \, dx$

3. $\int\limits_{0.1}^{10} \frac{\sin x^2 + x}{x} dx$

4. $\int\limits_{0.1}^{5} \frac{\mathbf{atan}(x) + (x-5)^2}{x} dx$

5. $\int_{0}^{5} x^{\frac{1}{4}} \cdot \sin(x) \, dx$

6. $\int\limits_{-1}^{10} \mathbf{atan}(x) \cdot e^{\sin x^2} \, dx$

7. $\int_{0}^{1} \cos\left(x^3 + x\right) dx$

8. $\int\limits_{0}^{10} \frac{\sin(4x^2) + 1}{\sin^2 x + 1} dx$

9. $\int\limits_{-20}^{20} x \cdot \sin x \, dx$

10. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cdot \sin x^2 \, dx$

11. $\int\limits_{0}^{0.5} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) dx$

12. $\int_{0}^{3} x^{\cos x}$

14. $\int_{1}^{3} x^{\ln x} \, dx$

В помощь при подготовке

1. Программа вычисления интеграла методом прямоугольников: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

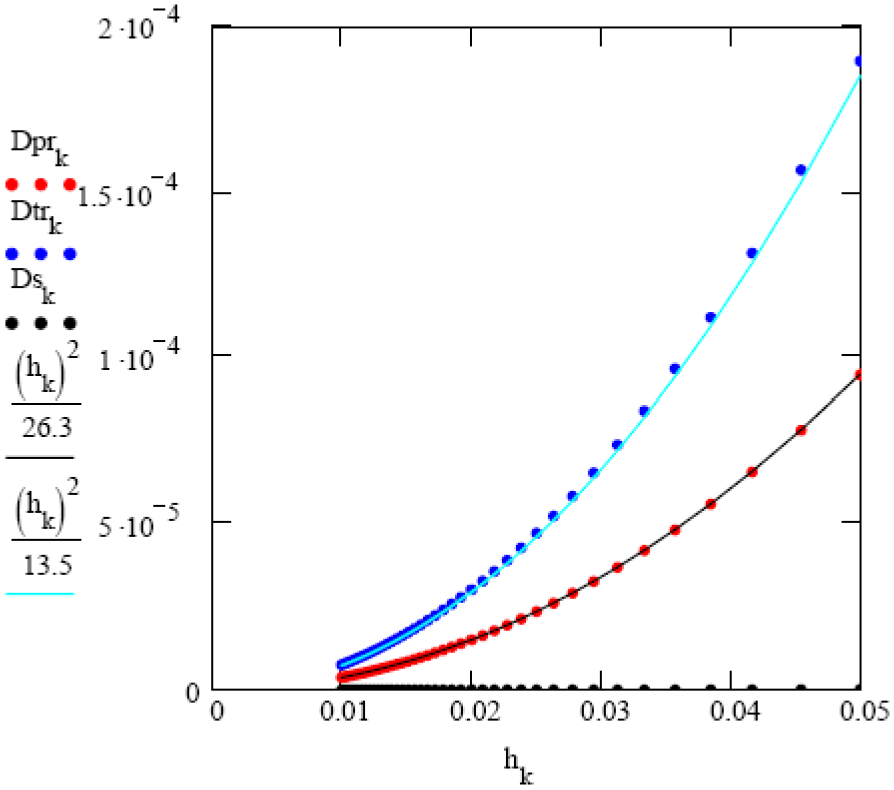
$$Ipr(m) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{2\cdot m} \\ h\cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{2\cdot m-1} f\left(a + i\cdot h + \dfrac{h}{2}\right) \end{array} \right.$$

Ipr(20) – результат – интеграл как площадь криволинейной трапеции при разбиении 20.

2. Исследование апостериорной оценки погрешности (правило Рунге)

$$Dpr_k := \frac{\left|Ipr(2\cdot k) - Ipr(k)\right|}{3}$$

(аналогично для метода трапеций и Симпсона), поведение апостериорной оценки погрешности в зависимости от величины шага (графически).



3.

Итерационная процедура достижения заданной точности

$$I(e) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} f \leftarrow Ipr(j) \\ \text{if}\left(\dfrac{\left|f - Ipr(j\cdot 2)\right|}{3} > e, N \leftarrow j, \text{break}\right) \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} f \\ N \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$I(0.001) = \begin{pmatrix} 0.4057702576 \\ 12 \end{pmatrix}$$