

Вариант 16

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{2}{1-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[5]{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z - \cos z = 2.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z-1+i) \leq 0, \quad |z-1+i| > 4 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 0$, $x = 2$ ниже оси Ox .

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{20}$; б) $\operatorname{Ln}(-2)$.

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = e^{\bar{z}^2}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = \frac{i\pi}{2} \text{ при отображении } w = \operatorname{ch} z - z.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, \quad f(1) = i.$$

9. Вычислите $\int_l \bar{z} dz$, где l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 2$,

$$z_2 = i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(z-i\pi)^2}$, где

$$а) C = \{z : |z|=1\}; б) C = \{z : |z-3i|=1\}; в) C = \{z : |z|=4\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции

$$f(z) = \operatorname{ch}(1-z) \text{ в ряд Тейлора по степеням } \left(z-1-\frac{i\pi}{2}\right)$$

непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1-e^{(z-3)}}{(z-3)^3}$, $z_0 = 3$; б) $f(z) = z \cos \frac{1}{z+2i}$, $z_0 = -2i$;

в) $f(z) = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{e^{iz}-i}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z - z}{z^3}$; б) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^5}$;

в) $\operatorname{res}_{z=2} \left(z^3 \cos \frac{1}{z-2} \right)$; г) $\operatorname{res}_{z=\infty} \left((z-1)e^{\frac{1}{z}} \right)$.

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}, \text{ приняв центр ряда в точке } z_0 = 3.$$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$; б) $\oint_{|z+3|=1} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{z+3}} dz$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6+\sqrt{35} \sin x}$; в) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Вариант 17

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{6-6i}{-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-32}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$|z| + z = 2 + i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \{z : 0 < \arg(z-1-3i) \leq \pi, |z-1-3i| > 2\};$$

б) Запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 1$, $x = 2$ выше прямой $y = 1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \frac{1}{i^{30}}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z \operatorname{Re} z^2$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = \ln(z-1)$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = 2(x^2 - y^2) - 3x, \quad f(1) = -i.$$

9. Вычислите $\int_l \operatorname{Im} z dz$, если l – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 2i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^3(z-2i)^2}$, если

$$а) C = \{z : |z|=1\}; б) C = \{z : |z-2i|=1\}; в) C = \{z : |z|=3\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1+e^z)$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1-e^{2zi}}{(z+\pi)^2}, \quad z_0 = -\pi; б) f(z) = (z+1)^2 \cos \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -1;$$

$$в) f(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, \quad z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right); б) \operatorname{res}_{z=\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}}{\left(z - \frac{i\pi}{2} \right)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z+i) \exp \frac{1}{z} \right); г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{3z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(1+in)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1+i)^n}$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

по степеням z . Укажите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2-z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z|=3} \frac{zdz}{(z+2)^2(z-1)^2}; б) \oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}; б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\sin x}; \quad в) \int_{-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{-zt} dx}{(z^2+1)}, \quad t > 0.$$