Глава XIII

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1.1. Геометрия: площадь плоской фигуры

Рассмотрим плоскую фигуру $aABb$, ограниченную кривой AB, являющейся графиком положительной непрерывной функции $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$, $a < b$, оси Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, которую будем называть *криволинейной трапецией* (рис. 1).

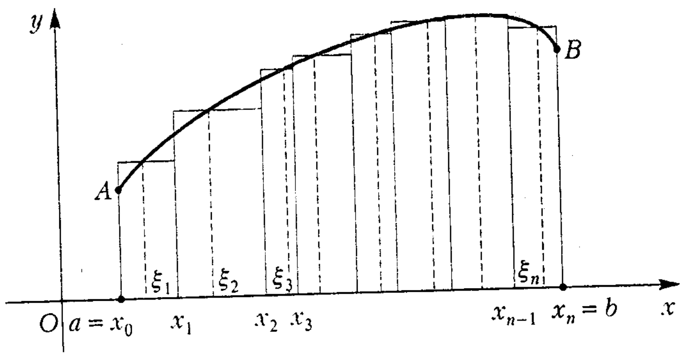

Рис. 1

Установим понятие площади криволинейной трапеции $aABb$ и укажем способ вычисления этой площади. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем по одной произвольной точке ξ_k $(x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k)$ и построим прямоугольник с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой, равной $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Площадь ΔQ_k этого прямоугольника будет равна

$$\Delta Q_k = f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где длина основания прямоугольника равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. В результате такого построения получим «ступенчатую» фигуру, состоящую из n прямоугольников, площадь Q_n которой будет равна сумме площадей этих прямоугольников:

$$Q_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi)\Delta x_k.$$

Будем теперь делить отрезок $[a, b]$ на все более и более мелкие части так, чтобы число частичных отрезков увеличивалось, а их длины уменьшались. Тогда «ступенчатая» фигура будет все меньше и меньше отклоняться от криволинейной трапеции $aABb$. Пусть

$$\lambda = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$$

является длиной наибольшего из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При $\lambda \to 0$ число частичных отрезков будет неограничено увеличиваться, а длины Δx_k всех этих отрезков будут стремиться к нулю, так как $0 \leqslant \Delta x_k \leqslant \lambda$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Если существует конечный предел Q площади «ступенчатой» фигуры при

$$\lambda = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0,$$

то он принимается за площадь криволинейной трапеции $aABb$, т. е.

$$Q = \lim_{\lambda\to 0} Q_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Этот предел, если он существует, не должен зависеть от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и от выбора точек ξ_k на них.

Таким образом, задача о площади криволинейной трапеции $aABb$ привела нас к вычислению предела вида

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

1.2. Физика: путь материальной точки

Рассмотрим следующую физическую задачу: найти путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = T$, если известна скорость v движения этой точки как функция времени t, т. е. $v = f(t)$. Для ее решения разобьем промежуток времени $[t_0, T]$ на n малых временных интервалов, ограниченных моментами времени

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Допустим, что скорость $f(t)$ мало меняется на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ и поэтому ее можно приближенно считать постоянной на нем и равной значению v в некоторый момент времени $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Тогда путь s_k, пройденный точкой за время $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, будет приближенно равен $s_k = f(\tau_k)\Delta t_k$ и, следовательно, путь S_n, пройденный точкой за время от t_0 до T, приближенно равен

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = f(\tau_1)\Delta t_1 + f(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + f(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Обозначим через λ наибольший из частичных промежутков времени Δt_k:

$$\lambda = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta t_k.$$

При $\lambda \to 0$ число частичных промежутков времени будет неограниченно увеличиваться, а сами промежутки будут неограниченно уменьшаться. При переходе к пределу при $\lambda \to 0$ в сумме S_n получим точное значение пути S, пройденного точкой за промежуток времени от t_0 до T:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta_k. \tag{2}$$

Мы пришли к вычислению предела, имеющего тот же вид, что и предел (1), только роль переменной x играет время t.

Таким образом, рассмотренные выше две задачи приводят нас к вычислению однотипных пределов (1) и (2) специального вида. Эти пределы, в случае их существования, называются определенными интегралами от функции $f(x)$ (или $f(t)$) и обозначаются символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\left(\text{или} \int\limits_{t_0}^{T} f(t)\,dt\right)$.

Перейдем теперь к изучению этих пределов, отвлекаясь от их геометрического и физического смыслов.

§ 2. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Разобьем этот отрезок на n частей произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(\Delta x_k > 0)$ — длины полученных частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. В каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k, вычислим значения $f(\xi_k)$ функции $f(x)$ в этих точках и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Величина интегральной суммы S_n зависит как от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, так и от выбора точек ξ_k на них.

Обозначим через λ длину наибольшего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

Определение. Число J называется *пределом интегральных сумм* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на части с длинами $\Delta x_k < \delta$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. $\lambda < \delta$), неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - J \right| < \varepsilon$$

будет выполняться при любом выборе точек ξ_k.

Для обозначения предела интегральных сумм употребляется запись

$$\boxed{J = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Здесь число δ зависит от выбора числа ε и поэтому иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение. Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$, $a < b$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и при любом выборе точек ξ_k в них, интегральные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$ имеют один и тот же конечный предел J, то этот предел называют *определенным интегралом в смысле Римана* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и его обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, по определению

$$\boxed{J = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интеграла*; x называется *переменной интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

Заметим, что из самой конструкции определенного интеграла вытекает, что его величина не меняется, если функцию $f(x)$ видоизменить в любой точке c отрезка $[a, b]$. Иначе говоря, если вместо функции $f(x)$ взять функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x \in [a, b], \quad x \neq c, \\ C & \text{для} \quad x = c, \end{cases}$$

где число $C \neq f(c)$, то

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Это справедливо и в случае изменения значений функции $f(x)$ в конечном числе точек отрезка $[a, b]$.

Так как определенный интеграл определен нами при условии, что $a < b$, то дополним его определение, заметив, что:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \text{если } b = a, \text{ то } \displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0; \\[2ex] 2)\ \text{если } b < a, \text{ то } \displaystyle\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \end{array}}$$

Пример. Вычислить $\int\limits_a^b dx$.

◀ По определению определенного интеграла получаем

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})\right] =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}(x_n - x_0) = \lim_{\lambda\to 0}(b-a) = b - a.$$ ▶

§ 3. Условия интегрируемости функций

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ называется *интегрируемой по Риману* на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

◀ Пусть функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как $f(x)$ неограничена на $[a, b]$, то найдется частичный отрезок, на котором она не ограничена. Пусть, например, таким отрезком будет отрезок $[x_0, x_1]$. Выберем точки ξ_k и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Зафиксируем точки $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ и будем менять только точку $\xi_1 \in [x_0, x_1]$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ будет иметь определенное значение, а первое слагаемое $f(\xi_1)\Delta x_1$ будет изменяться, и надлежащим выбором точки ξ_1 его можно сделать как угодно большим по абсолютной величине и, значит, $|S_n|$ может быть сделана как угодно большой. Это означает, что интегральная сумма S_n при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k \to 0$ не имеет конечного предела, т. е. $f(x)$ не интегрируема по Риману на $[a, b]$. Отсюда следует, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$. ▶

Замечание. Ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не является достаточным условием для ее интегрируемости, т. е. функция $f(x)$ может быть ограниченной на $[a, b]$ и в то же время неинтегрируемой на $[a, b]$. В качестве примера, доказывающего это утверждение, приведем функцию Дирихле:

$$f(x) = \Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

которую рассмотрим, например, на отрезке $[0, 1]$. Эта функция ограничена: $|f(x)| \leqslant 1$ $\forall x \in [0, 1]$, но она не интегрируема на нем.

◀ В самом деле, составив для нее интегральную сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ будем иметь:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \quad \text{для рациональных точек} \quad \xi_k,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \quad \text{для иррациональных точек} \quad \xi_k.$$

Итак, при любом как угодно малом $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$ интегральная сумма S_n может принимать как значение, равное 1, так и значение, равное нулю. Следовательно, S_n при $\lambda \to 0$ предела не имеет, т. е. функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[0, 1]$. ▶

Приведем без доказательства теорему, дающую достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 2. *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Пример 1. Функция $f(x) = e^{-x^2}$ непрерывна на отрезке $[0, a]$, где a — любое число, и поэтому она интегрируема на этом отрезке, т. е. для нее существует определенный интеграл

$$\int_0^a e^{-x^2}\, dx.$$

Приведем формулировки еще двух теорем, дающих достаточные признаки интегрируемости функции.

Теорема 3. *Функция $f(x)$, определенная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Здесь следует отметить, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то ее значения заключены между числами $f(a)$ и $f(b)$. Поэтому определенная на $[a, b]$ монотонная функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.

Теорема 4. *Функция $f(x)$, ограниченная на отрезке $[a, b]$ и имеющая на нем конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.*

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$, потому что она ограничена, $|f(x)| \leqslant 1$ $\forall x \in [0, 1]$, и имеет на этом отрезке одну точку разрыва $x = 0$ (точка разрыва второго рода).

§ 4. Свойства определенного интеграла

Установим некоторые свойства определенного интеграла. При этом будем считать, что все рассматриваемые функции непрерывны, а следовательно, интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

1. Определенный интеграл зависит только от величины нижнего и верхнего пределов интегрирования, т. е. от чисел a и b, и от вида подынтегральной функции $f(x)$, но он не зависит от переменной интегрирования. Поэтому величина определенного

интеграла не изменится, если букву x, обозначающую переменную интегрирования, заменить любой другой буквой:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак (вносить под знак) определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \quad A = \text{const}\,.}$$

◀ По определению имеем

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = A\int_a^b f(x)\,dx. \ ▶$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\boxed{\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.}$$

◀ $$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)\right]\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\Delta x_k\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx. \ ▶$$

Следствие. *Имеет место соотношение*

$$\int_a^b \left[A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)\right]\,dx = A_1\int_a^b f_1(x)\,dx + A_2\int_a^b f_2(x)\,dx,$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, которое выражает свойство линейности *определенного интеграла.*

---

4. Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx}$$

при условии существования обоих интегралов в правой части. Это равенство выражает *свойство аддитивности* определенного интеграла.

◀ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a < c < b$. По определению имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Так как интеграл не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, то точку c можно включить в число точек деления этого отрезка. Пусть, например, разбиение имеет вид (рис. 2)

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b.$$

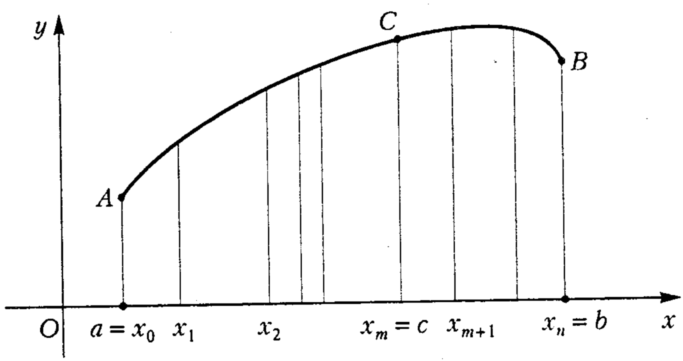

Рис. 2

Тогда интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, соответствующую отрезку $[a, b]$, можно разбить на две суммы: одну, соответствующую отрезку $[a, c]$, и другую, соответствующую отрезку $[c, b]$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к переделу при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

2) Пусть $a < b < c$. В силу доказанного имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда находим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Для случая, когда $f(x) > 0$ и $a < c < b$, свойство аддитивности определенного интеграла означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ равна сумме площадей криволинейных трапеций $acCA$ и $cbBC$ (рис. 2).

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяют условию $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx,}$$

т. е. неравенство можно интегрировать.

$\blacktriangleleft$ Так как $f(x) \leqslant g(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$ и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$, получим при $a \leqslant b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \blacktriangleright$$

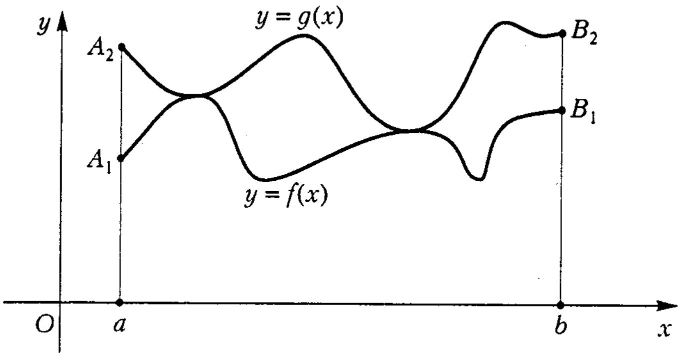

Рис. 3

Замечание. В случае, когда $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, это свойство геометрически означает, что площадь криволинейной трапеции abB_1A_1 не больше площади криволинейной трапеции abB_2A_2 (рис. 3). Из этого свойства, в частности, следует, что если $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) \leqslant 0)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\right).$$

6. Если $a < b$, то имеет место неравенство

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.}$$

◀ Интегрируя в переделах от a до b очевидное двойное неравенство

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

получим

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

т. е.

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \blacktriangleright$$

7. Если числа m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).}$$

◀ Так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$, то в силу свойства 5 получаем

$$\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx.$$

Но так как

$$\int\limits_a^b m\,dx = m\int\limits_a^b dx = m(b-a), \qquad \int\limits_a^b M\,dx = M\int\limits_a^b dx = M(b-a),$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \blacktriangleright$$

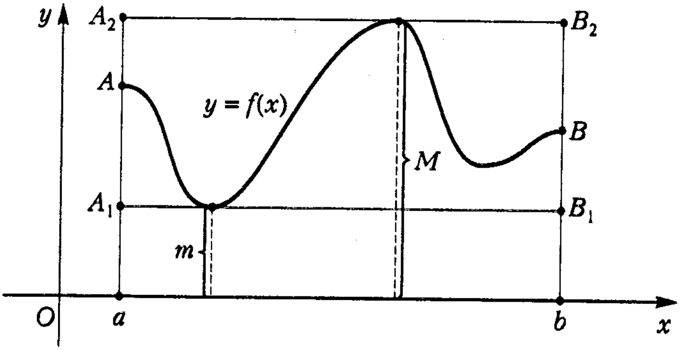

Рис. 4

Замечание. Для функции $f(x) > 0$ на $[a, b]$, это свойство геометрически означает, что площадь Q криволинейной трапеции $abBA$ заключена между площадями Q_1 и Q_2 прямоугольников abB_1A_1 и abB_2A_2 (рис. 4):

$$Q_1 \leqslant Q \leqslant Q_2.$$

Пример 1. Оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}}.$$

◀ Так как

$$m = \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}}\right|_{x = \frac{\pi}{2}} = 0{,}25,$$

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}}\right|_{x = \frac{3}{2}\pi} = 0{,}50,$$

то согласно свойству 7 будем иметь

$$2\pi \cdot 0{,}25 \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}} \leqslant 2\pi \cdot 0{,}50,$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}} \leqslant \pi. \ ▶$$

Пример 2. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{-x}\, dx.$$

◀ На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $x^2 \leqslant x$, откуда $-x \leqslant -x^2$, и так как число $e > 1$, то $e^{-x} \leqslant e^{-x^2}$ и по свойству 5 получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \geqslant \int_0^1 e^{-x}\, dx. \ ▶$$

§ 5. Теорема о среднем

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке найдется по крайней мере одна точка ξ такая, что имеет место равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

◀ Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке имеет наименьшее значение m и наибольшее значение M, и по свойству 7 получим

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Учитывая, что $b - a > 0$, находим

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Положим

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

В силу непрерывности функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M. Поэтому найдется значение $x = \xi$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ такое, что $f(\xi) = \mu$, т. е.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b. ▶$$

Замечание. При $a < b$ будем иметь

$$a \leqslant \xi \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \xi - a \leqslant b - a \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{\xi - a}{b-a} \leqslant 1.$$

Положив

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

находим отсюда $\xi = a + (b-a)\cdot\theta$. Доказанное выше равенство можно записать теперь в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[a + (b-a)\theta], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Геометрический смысл теоремы о среднем состоит в следующем. Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q_1, \quad (b-a)f(\xi) = Q_2,$$

где Q_1 — площадь криволинейной трапеции $abBA$, Q_2 — площадь прямоугольника $abNM$, основанием которого является отрезок $[a, b]$, а высотой ордината точки $C(\xi, f(\xi))$. Теорема о среднем утверждает, что на кривой AB (рис. 5) найдется по крайней мере одна точка $C(\xi, f(\xi))$ такая, что $Q_1 = Q_2$.

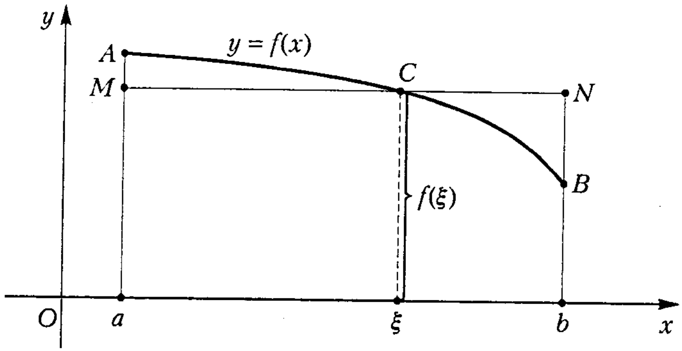

Рис. 5

Определение. Число

$$M[f(x)] = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

называется *средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $M[f(x)] = f(\xi)$.

Пример. Найти среднее значение функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

◀ По определению получаем:

$$M[\sin x] = \frac{1}{\pi - 0} \int\limits_0^\pi \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались формулой Ньютона—Лейбница, которая будет доказана ниже в § 7. ▶

§ 6. Производная интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмем на этом отрезке произвольную точку x и рассмотрим определенный интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt.$$

Этот интеграл существует для любого $x \in [a, b]$ в силу непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ и является функцией своего верхнего предела x. Обозначим ее через $F(x)$, т. е. положим

$$\boxed{F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.}$$

Теорема 6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

имеет производную в любой точке $x \in [a, b]$, причем

$$F'(x) = f(x).$$

Другими словами, производная от определенного интеграла по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе.

◄ Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда функция $F(x)$ получит приращение ΔF, равное в силу аддитивности определенного интеграла

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int\limits_x^a f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_x^a f(t)\,dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$\Delta F = (x + \Delta x - x) f(x + \theta \cdot \Delta x) = \Delta x \cdot f(x + \theta \Delta x),$$

откуда

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x + \theta \cdot \Delta x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая непрерывность функции $f(x)$ в любой точке $x \in [a, b]$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta \cdot \Delta x) = f(x),$$

т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \quad \forall x \in [a, b]. ►$$

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ то для любого $x \in [a, b]$ будем иметь

$$\left(\int\limits_x^b f(t)\,dt\right)' = \left(-\int\limits_b^x f(t)\,dt\right)' = -\left(\int\limits_b^x f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

Пример.

$$\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = +e^{-x^2}, \quad \left(\int_x^0 e^{-t^2}\,dt\right)' = -e^{-x^2}.$$

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ то она на этом отрезке имеет первообразную, а значит и неопределенный интеграл.*

◀ Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого x из этого отрезка существует определенный интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$, т. е. существует функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

такая, что

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Это означает по определению, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Отсюда следует, что неопределенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, можно представить в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная. ▶

§ 7. Формула Ньютона—Лейбница

Теорема 8. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

◀ Возьмем функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Эта функция является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а любые две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т. е. существует постоянная C такая, что

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

для всех $x \in [a, b]$. При $x = a$ имеем

$$\int\limits_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

и так как $\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$, то $F(a) + C = 0$, откуда

$$C = -F(a).$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Положив $x = b$, получим

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

или, обозначая переменную t интегрирования через x,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

Замечание. Если обозначить $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).}$$

Доказанная формула является основной в интегральном исчислении. Она сводит вычисление определенного интеграла от функции $f(x)$ к нахождению ее первообразной $F(x)$.

Примеры.

1. Найти

$$\int\limits_2^4 x\,dx.$$

◀ Известно, что

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{т. е.} \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Поэтому

$$\int\limits_2^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6. \blacktriangleright$$

2. Найти

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2. \blacktriangleright$$

§ 8. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 9. *Пусть дан интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Положим $x=\varphi(t)$, и пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) *при изменении t от α до β функция $\varphi(t)$ непрерывно меняется от a до b так, что $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ а все остальные значения $\varphi(t)$ содержатся в области, где функция $f(x)$ определена и непрерывна;*

2) *производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$.*

Тогда будет справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

◀ По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Возьмем сложную функцию от t, а именно $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$, определенную на отрезке $[\alpha,\beta]$. По правилу дифференцирования сложной функции ее производная равна

$$\Phi'(t)=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ есть первообразная для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha,\beta]$, и по формуле Ньютона—Лейбница получим

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Замечание. Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы новый интеграл

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

был более простым, чем первоначальный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

При вычислении определенного интеграла по доказанной формуле к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$$

◄ Положим, например, $x = a\sin t$. Тогда

$$dx = a\cos t\,dt, \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t.$$

Полагая в равенстве $x = a\sin t$ сначала $x = 0$, а затем $x = a$, получим два уравнения $a\sin t = 0$, $a\sin t = a$, из которых находим нижний предел интегрирования $t = 0$ и верхний предел $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому будем иметь

$$\int\limits_a^b \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

◄ Положим $x = e^t$. Так как $t = 0$ при $x = 1$, $t = 1$ при $x = e$, $t = \ln x$, то

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Замечание. В некоторых случаях в интеграле удобнее применять замену переменной не в виде $x = \varphi(t)$, а в виде $t = \psi(x)$.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x - 1}\,dx.$$

◄ Положим $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тогда $x = \ln(t^2+1)$, $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$. При $x = 0$ получаем $t = 0$, а при $x = \ln 2$ получаем $t = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x - 1}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\left(t\Big|_0^1 - \operatorname{arctg} t\Big|_0^1\right) = 2(1 - \operatorname{arctg} 1) = 2 - \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\,dx.$$

◄ Положим $t = x^4 - 2x + 1$. В данном случае выражать x через t, т. е. находить функцию $x = \varphi(t)$ не нужно! Дифференцируя это равенство, получим $dt = (4x^3 - 2)\,dx$, откуда $(2x^3 - 1)\,dx = \frac{1}{2}dt$. Поэтому будем иметь

$$\int\limits_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Приведем теорему, которая в некоторых случаях упрощает вычисление определенного интеграла.

Теорема 10. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на симметричном относительно точки O отрезке $[-a, a]$, $a > 0$. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \textit{если } f(x) \textit{ — четная функция;} \\ 0, & \textit{если } f(x) \textit{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

◀ Согласно свойству аддитивности определенного интеграла имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной: $x = -t$, $dx = -dt$; $t = -x$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(-x) + f(x)\right] dx.$$

Полагая в этом равенстве $f(-x) = f(x)$ (четная функция), а затем $f(-x) = -f(x)$ (нечетная функция), получим требуемые равенства. ▶

Пример 5. Интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x e^{\cos x}\,dx = 0,$$

так как подынтегральная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ является нечетной.

◀ В самом деле,

$$\sin^3(-x)e^{\cos(-x)} = -\sin^3 x e^{\cos x} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \ ▶$$

§ 9. Интегрирование по частям

Теорема 11. *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ Тогда имеет место равенство*

$$\int_{a}^{b} u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_{a}^{b} v\,du.$$

◀ В силу условия теоремы произведение $uv = u(x)v(x)$ данных функций имеет на $[a, b]$ производную, равную

$$(uv)' = uv' + vu',$$

т. е. uv является первообразной на $[a, b]$ для функции $uv' + vu'$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_{a}^{b} (uv' + vu')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

По правилу интегрирования суммы это равенство можно представить в виде

$$\int_{a}^{b} uv'\,dx + \int_{a}^{b} vu'\,dx = uv\Big|_a^b,$$

откуда находим

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

Так как по определению дифференциала функции $v'dx = dv$, $u'dx = du$ то окончательно будем иметь

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \blacktriangleright$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx.$$

◄ В данном интеграле имеем $u\,dv = (\pi - x)\sin\ dx$. Возьмем $u = \pi - x$, $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = -dx$, $v = -\cos x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,dx = (x - \pi)\cos x\Big|_0^\pi - \sin x\Big|_0^\pi = \pi. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

◄ Имеем

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - 2e^{-1}. \blacktriangleright$$

§ 10. Площадь плоских фигур в прямоугольных координатах

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда площадь Q криволинейной трапеции $abBA$ будет равна (рис. 6)

$$\boxed{Q = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямой $x = a$ $(a > 0)$ и осью Ox (рис. 7).

◄ Имеем

$$Q = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}. \blacktriangleright$$

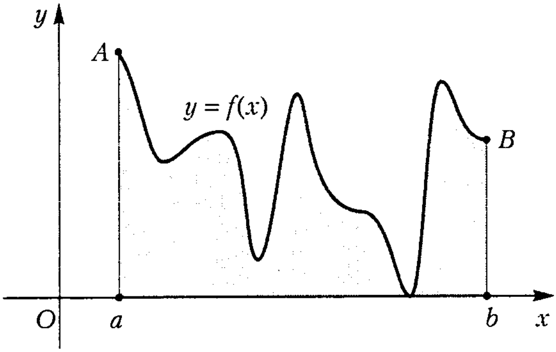

Рис. 6

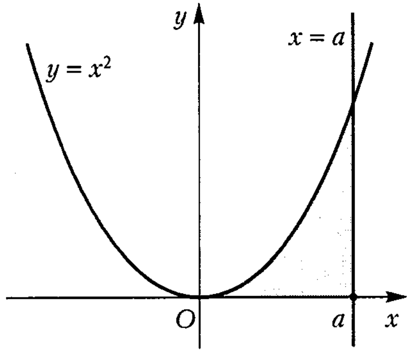

Рис. 7

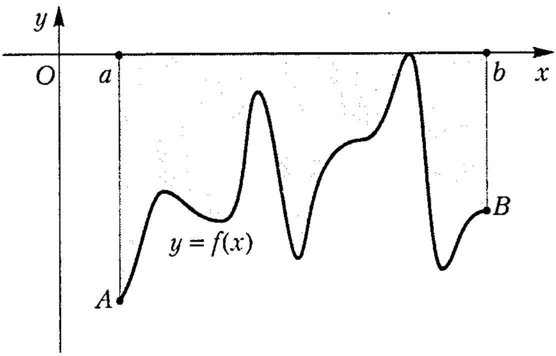

Рис. 8

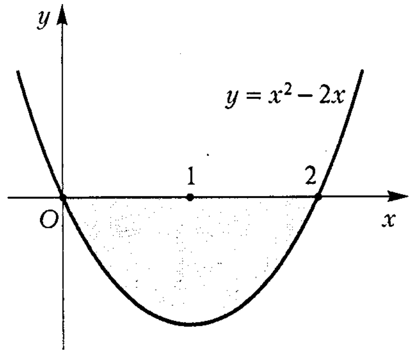

Рис. 9

2. Пусть функция $f(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда кривая $y = f(x)$ расположена под осью Ox и интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx < 0.$$

Площадь Q криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 8) будет равна

$$\boxed{Q = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad Q = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и осью Ox (рис. 9).

◀ Данная фигура расположена под осью Ox на отрезке $[0, 2]$ на котором $y \leqslant 0$. Поэтому искомая площадь Q будет равна

$$Q = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

3. Пусть функция $f(x)$ меняет свой знак при переходе x через точку $c \in (a, b)$, т. е. часть криволинейной трапеции $abBA$ расположена над осью Ox, а другая часть под осью Ox (рис. 10). Тогда площадь Q всей заштрихованной фигуры будет равна сумме двух площадей

$$Q = Q_1 + Q_2 = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

или

$$\boxed{Q = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.}$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$, прямой $x = 2$ и осями Ox и Oy (см. рис. 11).

◀ Имеем

$$Q = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx - \int_1^2 (1 - x^2)\,dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - x\Big|_1^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 2. \blacktriangleright$$

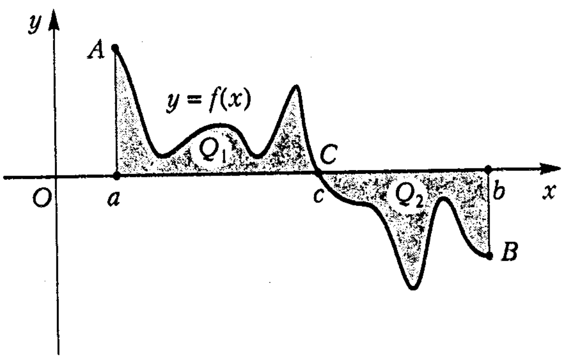

Рис. 10

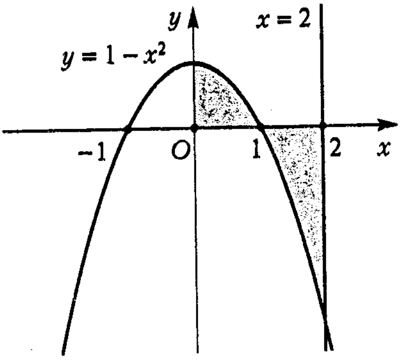

Рис. 11

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $f(x) > g(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$, причем кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точках A и B. Тогда площадь Q фигуры, ограниченной этими линиями (рис. 12), будет равна разности площадей Q_1 и Q_2 криволинейных трапеций $aACBb$ и $aADBb$ соответственно. Таким образом,

$$\boxed{Q = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{Q = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.}$$

Для нахождения пределов интегрирования a и b надо из системы уравнений $y = f(x)$, $y = g(x)$, исключить y и решить уравнение $f(x) = g(x)$, действительные корни которого дадут искомые пределы.

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 4x + 6$ (рис. 13).

◀ Находим абсциссы точек A и B пересечения данных парабол. Для этого решаем уравнение $4x - x^2 = x^2 - 4x + 6$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ являются пределами интегрирования: $a = 1$, $b = 3$. Искомая площадь Q равна

$$Q = \int\limits_1^3 \left[4x - x^2 - (x^2 - 4x + 6)\right] dx = \int\limits_1^3 (8x - 2x^2 - 6)\, dx = 4x^2\Big|_1^3 - \frac{2}{3}x^3\Big|_1^3 - 6x\Big|_1^3 = \frac{8}{3}. ▶$$

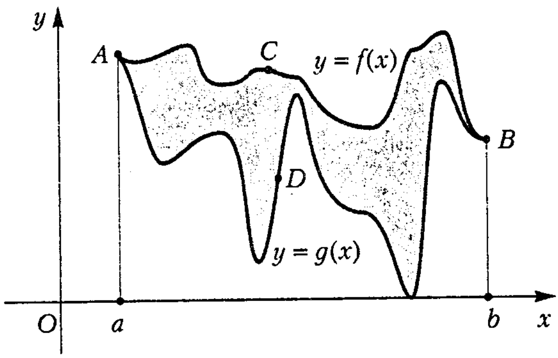

Рис. 12

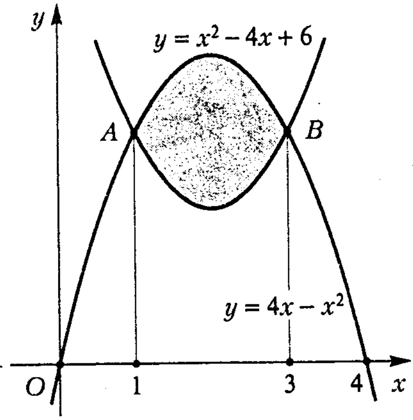

Рис. 13

5. Пусть кривая AB задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны, причем $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Площадь Q криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 14) описывается формулой

$$Q = \int\limits_a^b y\, dx.$$

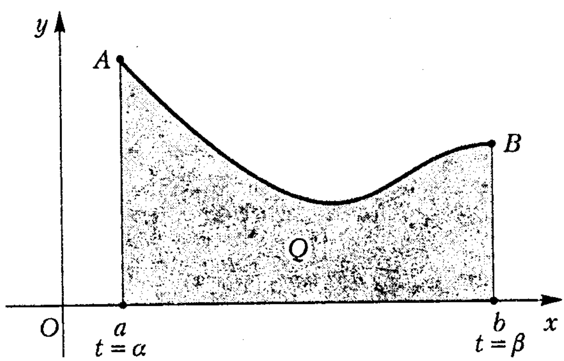

Рис. 14

Сделаем замену переменной в этом интеграле, положив $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда площадь Q криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями, будет равна

$$\boxed{Q = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\, dt.}$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad (a, b > 0).$$

◀ В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь той части фигуры, которая расположена в первой четверти, а затем ее учетверить, т. е. искомая площадь Q равна

$$Q = 4\int\limits_0^a y\,dx.$$

В этом интеграле делаем замену переменной:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad dx = -a\sin dt.$$

Для нахождения новых пределов интегрирования положим $x = 0$, тогда получим уравнение $a\cos t = 0$, из которого находим $t_1 = \alpha = \frac{\pi}{2}$, а затем, полагая $x = a$, получим $a = a\cos t$, т. е. $\cos t = 1$, откуда $t_2 = \beta = 0$. Таким образом, когда x изменяется от 0 до a, то t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Поэтому

$$Q = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t\,dt) = -4ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi ab. \text{ ▶}$$

6. В некоторых случаях для вычисления площадей плоских фигур удобнее пользоваться формулами, в которых интегрирование ведется по переменной y. В этом случае переменная x считается функцией от y: $x = g(y)$, где функция $g(y)$ однозначна и непрерывна на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$ оси Oy. Пределы c и d интегрирования по переменной y, являющиеся точками пересечения данной кривой с осью Oy, находятся из уравнения $g(y) = 0$, получаемого из уравнения $x = g(y)$, если в нем положить $x = 0$. Тогда площадь Q, ограниченная кривой $x = g(y)$ и осью ординат (рис. 15), будет равна

$$\boxed{Q = \int\limits_c^d g(y)\,dy.}$$

Пример 6. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x = 2-y-y^2$ (парабола) и осью ординат (рис. 16).

◀ Пределы интегрирования находим как ординаты точек пересечения параболы с осью ординат: при $x = 0$ получаем уравнение $2-y-y^2 = 0$, из которого находим $y_1 = c = -2$, $y_2 = d = 1$. Следовательно,

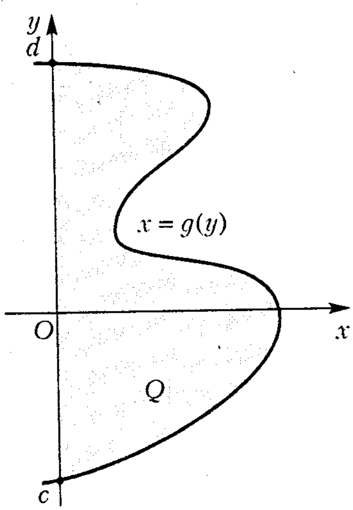

Рис. 15

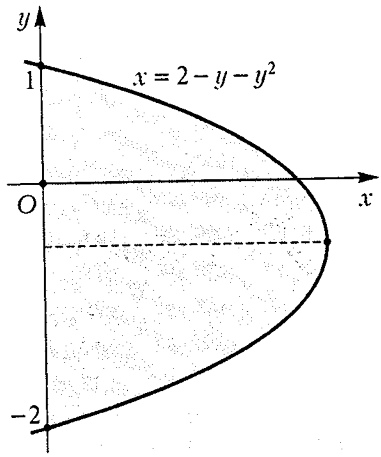

Рис. 16

искомая площадь будет равна

$$Q=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,dy=2y\Big|_{-2}^{1}-\frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{1}=4{,}5.\ \blacktriangleright$$

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$ (парабола) и $x-y-1=0$ (прямая).

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ и осью абцисс.

Указание. Записать уравнения линий в виде $x=g(y)$.

§ 11. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho=f(\varphi)$, где функция $f(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. Плоская фигура, ограниченная этой кривой и двумя лучами, образующими с полярной осью углы α и β называется *криволинейным сектором* (рис. 17).

Для определения площади криволинейного сектора $OABO$ разобьем его на n произвольных частей лучами $\varphi=\alpha=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1,\ldots,\varphi=\varphi_{n-1}$, $\varphi=\beta=\varphi_n$. Обозначим углы между этими лучами через $\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,\ldots,\Delta\varphi_n$. Возьмем произвольный луч $\widetilde{\varphi}_k$, заключенный между φ_{k-1} и φ_k и обозначим через $\widetilde{\rho}_k$ длину радиуса-вектора, соответствующего этому лучу. Возьмем круговой сектор с радиусом, равным $\widetilde{\rho}_k$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$(рис. 18). Его площадь ΔQ_k будет равна $\Delta Q_k=\frac{1}{2}\widetilde{\rho}_k^2\Delta\varphi_k$ или, так как $\widetilde{\rho}_k=f(\widetilde{\varphi}_k)$, $\Delta Q_k=\frac{1}{2}f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$.

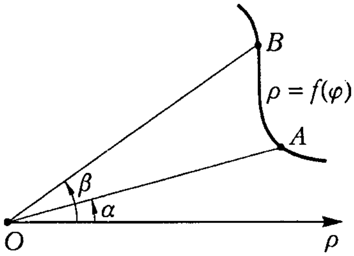

Рис. 17

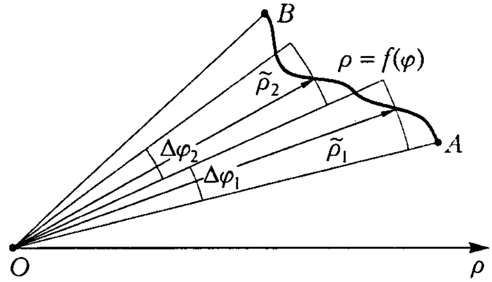

Рис. 18

Проделав подобное построение во всех n частях сектора $OABO$, получим фигуру, состоящую из n круговых секторов, площадь Q_n которой будет равна

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta Q_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.$$

Обозначим наибольшее $\Delta\varphi_k$ через λ:

$$\lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta\varphi_k.$$

Будем делить угол AOB на все более и более мелкие части так, чтобы $\lambda\to 0$. Тогда полученная фигура будет все меньше и меньше отклоняться от сектора $OABO$, и поэтому естественно считать площадью Q криволинейного сектора $OABO$ предел площади Q_n построенной фигуры, когда $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta\varphi_k \to 0$, при условии что этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[\alpha,\beta]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\widetilde{\varphi}_k$ на них. Таким образом, по определению имеем

$$\boxed{Q = \lim_{\lambda\to 0} Q_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.}$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$ является интегральной суммой для функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$, которая непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ в силу непрерывности функции $f(\varphi)$. Следовательно, эта сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный определенному интегралу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Итак, площадь криволинейного сектора $OABO$ равна

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.}$$

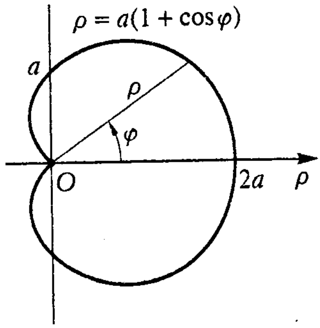

Рис. 19

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\rho = a(1+\cos\varphi), \quad a > 0$$

(рис. 19).

◀ Искомая площадь равна

$$Q = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2. \ ▶$$

§ 12. Вычисление объемов тел

Рассмотрим тело, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью. Пусть известна площадь Q любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (рис. 20). Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т. е. она будет функцией от x:

$$Q = Q(x).$$

Будем считать, что функция $Q(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для определения объема данного тела проводим плоскости $x = a = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ... , $x = b = x_n$, которые разобьют тело на n слоев. В каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, возьмем по одной произвольной точке ξ_k и заменим каждый слой тела цилиндром с образующими, параллельными оси Ox, направляющей которого является контур сечения тела плоскостью $x = \xi_k$ (рис. 20). Объем Δv_k такого цилиндра равен произведению площади $Q(\xi_k)$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, его основания на его высоту Δx_k:

$$\Delta v_k = Q(\xi_k)\Delta x_k,$$

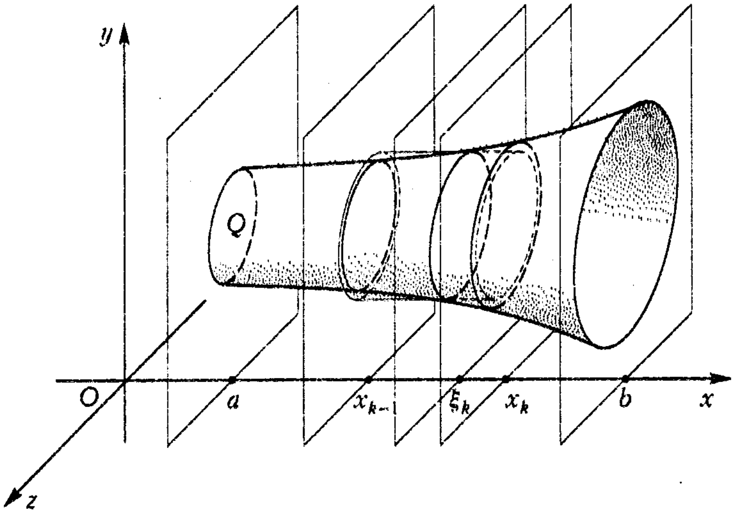

Рис. 20

а объемом V_n всех n цилиндров будет сумма

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если эта сумма имеет предел при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$, то его естественно принять за объем V данного тела:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k.$$

В нашем случае сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой для функции $Q(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, и поэтому указанный предел существует и равен определенному интегралу

$$\boxed{V = \int_a^b Q(x)\,dx.} \qquad (1)$$

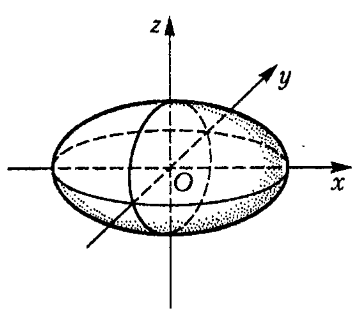

Рис. 21

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◄ В сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и соответствующей абсциссе x, получается эллипс (рис. 21)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого равны

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Поэтому площадь $Q(x)$ сечения будет равна

$$Q(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Применяя формулу (1), получим

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $b = c = a$, эллипсоид обращается в сферу $x^2+y^2+z^2 = a^2$, а объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ будет равен $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. ►

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 22), ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и осью Ox. Это тело называют *телом вращения*. Сечением тела вращения плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и соответствующей абсциссе x, является круг площади $Q(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и, следовательно, объем тела вращения

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{или} \quad V = \pi\int_a^b y^2dx.}$$

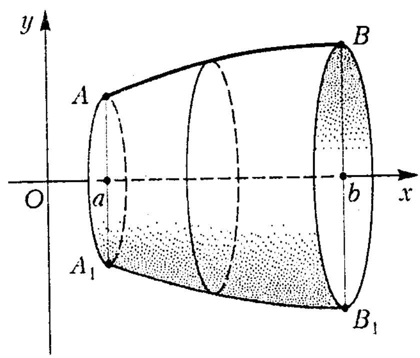

Рис. 22

Пример 2. Найти объем тела вращения, полученного вращением дуги OA параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox (рис. 23).

◄ Уравнение дуги OA параболы будет $y = \sqrt{2px}$, $p > 0$. Искомый объем равен

$$V = \pi\int_0^a y^2dx = \pi\int_0^a 2px\,dx = \pi pa^2. \blacktriangleright$$

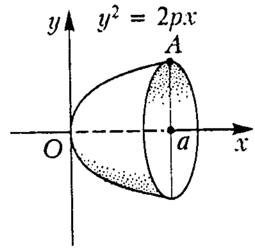

Рис. 23

§ 13. Вычисление длины кривой

Рассмотрим кривую $\smile AB$, имеющую концы в точках A и B, и возьмем на ней произвольные точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, следующие вдоль кривой одна за другой (рис. 24). Соединим эти точки хордами $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Тогда длина S_n ломаной $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$, вписанной в кривую $\smile AB$, будет равна

$$S_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n}\Delta s_k.$$

Определение. *Длиной* S кривой $\smile AB$ называется предел, к которому стремится длина S_n вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$S = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k,$$

если этот предел существует и не зависит от выбора точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на кривой $\smile AB$. В этом случае кривая $\smile AB$ называется *спрямляемой*.

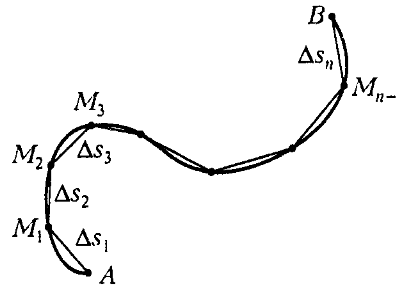

Рис. 24

13.1. Длина кривой в прямоугольных координатах

Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$

на n элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и построим вписанную ломаную, вершинами которой являются точки кривой $y = f(x)$:

$$A = M_0\big(x_0, f(x_0)\big), \quad M_1\big(x_1, f(x_1)\big), \quad \ldots, \quad M_n\big(x_n, f(x_n)\big) = B.$$

Обозначим длины звеньев ломаной через $\Delta s_1, \Delta s_n, \ldots, \Delta s_n$ и положим

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \qquad \Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

Тогда длина k-го звена ломаной равна (рис. 25)

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим

$$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = \\ = (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k) = \\ = f'(\xi_k)\Delta x_k,$$

где ξ_k — некоторая точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Поэтому

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k,$$

и длина вписанной ломаной будет равна

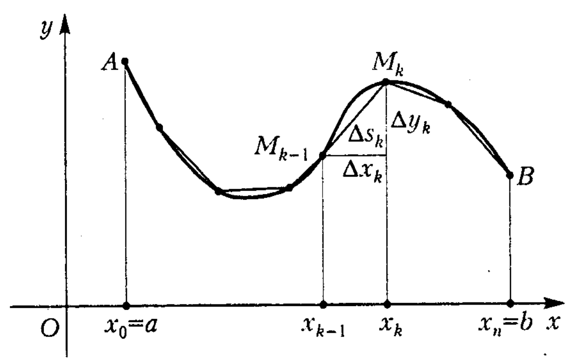

Рис. 25

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k. \tag{1}$$

Так как по условию $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то и функция $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ будет непрерывна на этом отрезке, и, следовательно, интегральная сумма (1) имеет предел S при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta s_k \to 0$, который является определенным интегралом:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta s_k \to 0 \\ 1\leqslant k\leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

или, короче,

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.} \tag{2}$$

Пример 1. Вычислить длину S цепной линии

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

от точки $A(0, 1)$ до точки $B(a, \operatorname{ch} a)$ (рис. 26).

◀Из уравнения цепной линии находим

$$y' = \operatorname{sh} x.$$

Учитывая тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, получим

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{ch} x \quad (\operatorname{ch} x > 0).$$

Поэтому

$$S = \int_0^a \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\Big|_0^a = \operatorname{sh} a. \ ▶$$

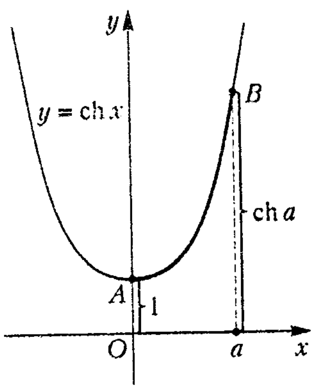

Рис. 26

13.2. Длина кривой, заданной в параметрической форме

Пусть кривая $\smile AB$ задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, причем $\varphi'(t) \neq 0$ на этом отрезке. В этом случае уравнения (3) определяют функцию $y = f(x)$, имеющую непрерывную производную $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ на $[t_0, T]$. Тогда

$$\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

и, согласно формуле (2),

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

или

$$\boxed{S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.} \tag{4}$$

Пример 2. Вычислить длину окружности радиуса R (рис. 27).

◄ Окружность в параметрической форме задается уравнениями

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Согласно формуле (4) получим

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. ►$$

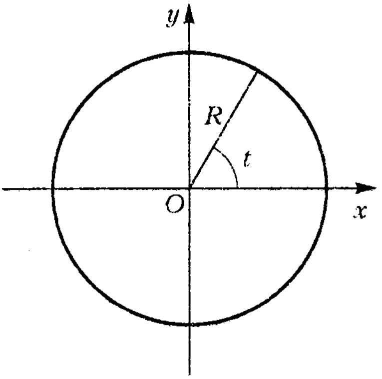

Рис. 27

Пример 3. Найти длину эллипса.

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad (0 < b \leqslant a).$$

◄ Так как $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, то, применяя формулу (4) и учитывая симметричность эллипса относительно координатных осей, найдем

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Мы получил так называемый *эллиптический интеграл*, который не вычисляется с помощью непосредственного применения формулы Ньютона—Лейбница, поскольку первообразная не является элементарной функцией. ►

Замечание. Если положить $t = \frac{\pi}{2} - \tau$, то получим

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 \tau}\, d\tau = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\, dt;$$

именно в этой последней записи интересующий нас интеграл обычно и рассматривают.

Пример 4. Найти длину одной «арки» циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t < 2\pi, \quad a > 0 \qquad \text{(рис. 28)}.$$

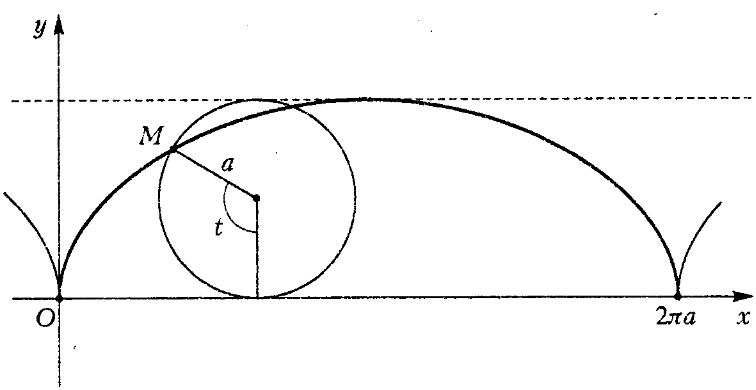

Рис. 28

◀ Применяя формулу (4), найдем

$$S = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \ ▶$$

13.3. Длина кривой в полярных координатах

Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Для нахождения длины кривой составим ее параметрические уравнения. С этой целью воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Подставляя сюда вместо ρ функцию $f(\varphi)$, получим уравнения $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, которые являются параметрическими уравнениями кривой. Здесь параметром является полярный угол φ. Дифференцируя последние уравнения, найдем

$$x'_\varphi = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi, \qquad y'_\varphi = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi.$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства и складывая, будем иметь

$$x'^2_\varphi + y'^2_\varphi = \left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2.$$

Согласно формуле (4), получим

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2}\,d\varphi, \tag{5}$$

или, что то же,

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.} \tag{6}$$

Пример 5. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$.

◀ Из уравнения кардиоиды находим $\rho' = a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Применяя формулу (6), получаем, что

$$S = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a. \ ▶$$

§ 14. Дифференциал длины дуги кривой

Пусть дана кривая $y = f(x)$, где функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Рассмотрим дугу $\smile AM$ этой кривой от точки $A(a, f(a))$ до переменной точки $M(x, f(x))$ (рис. 29). Тогда длина S дуги $\smile AM$ этой кривой будет функцией от x и выразится формулой

$$S = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\,dt.$$

Так как подынтегральная функция $\sqrt{1+[f'(t)]^2}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то будем иметь

$$\frac{dS(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt\right)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

или

$$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Отсюда для дифференциала длины дуги $\smile AM$ получаем формулу

$$\boxed{dS=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\quad\text{или}\quad dS=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.}$$

Геометрический смысл дифференциала длины дуги кривой заключается в том, что он равен длине отрезка MN касательной MT, ограниченного точкой касания $M(x,y)$ и точкой $N(x+dx,y+dy)$ (рис. 29). При достаточно малом $dx=\Delta x$ длина ΔS дуги $\smile MM'$ кривой $y=f(x)$, отвечающей приращению $\Delta x=dx$ может считаться приближенно равной длине отрезка MN касательной MT, проведенной в точке M к этой кривой, т. е.

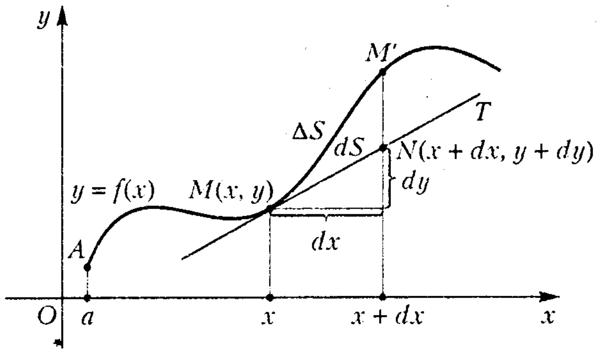

Рис. 29

$$\Delta S\approx dS.$$

Для случая задания кривой параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0,T]$, получим

$$dS=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

или

$$\boxed{dS=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt.}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что если за параметр t взять длину S переменной дуги, т. е. положить

$$x=\varphi(S),\quad y=\psi(S),$$

то

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dS}\right)^2+\left(\frac{dy}{dS}\right)^2=1.}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах: $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\boxed{dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.}$$

§ 15. Физические приложения определенного интеграла

15.1. Работа переменной силы

Определим работу, которую произведет сила $\mathbf{F}$ при перемещении ею материальной точки M по прямой Ox из точки a в точку b ($a < b$). Из физики известно, что если сила $\mathbf{F}$ постоянна, то работа A равна произведению величины F силы $\mathbf{F}$ на длину пути $s = b - a$, т. е. $A = F \cdot s$, при условии, что сила направлена по прямой Ox.

Пусть величина силы $\mathbf{F}$, действующей на материальную точку M по прямой Ox, является непрерывной функцией от x:

$$F = F(x)$$

на отрезке $[a, b]$ прямой Ox. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частей с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k и будем считать, что величина силы $\mathbf{F}$ на этом отрезке постоянна и равна $F = F(\xi_k)$. Тогда при достаточно малом Δx_k работа ΔA_k будет приближенно равна

$$\Delta A_k \approx F(\xi_k)\Delta x_k,$$

а сумма

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$

даст приближенное значение работы A силы $\mathbf{F}$ на отрезке $[a, b]$. Но так как A_n является интегральной суммой для функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$, то за работу A силы $\mathbf{F}$ на отрезке $[a, b]$ естественно принять предел этой суммы при $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$, который существует в силу непрерывности $F(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, искомая работа A будет равна

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{1}$$

Пример 1. Найти работу A, которая совершается при перемещении заряда q_2 из точки M_1, отстоящей от заряда q_1 на расстоянии r_1, в точку M_2, отстоящую от заряда q_1 на расстоянии r_2, считая, что заряд q_1 помещен в точке M_0, принятой за начало отсчета.

◄ Пусть электрические заряды q_1 и q_2 имеют одинаковые знаки, например, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Поэтому заряд q_1 будет отталкивать заряд q_2. По закону Кулона величина F силы $\mathbf{F}$ электростатического взаимодействия двух точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, равна

$$F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где r — расстояние между зарядами, k — коэффициент пропорциональности. Применяя формулу (1), найдем

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr = kq_1 q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kq_1 q_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = kq_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). ►$$

15.2. Масса и центр тяжести неоднородного стержня

Пусть дан неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a, b]$ оси Ox, линейная плотность $\rho = \rho(x)$ которого известна. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, на каждом из которых возьмем по одной произвольной точке ξ_k, и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k.$$

Так как каждое слагаемое этой суммы является приближенным значением массы части стержня на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то указанную сумму естественно принять за приближенное значение массы всего стержня. Поэтому массу m всего стержня определим как предел сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$ при стремлении к нулю $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$, т. е. как интеграл

$$\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Таким образом, масса m стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{2}$$

Для определения центра тяжести неоднородного стержня используем формулу для координаты центра системы материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и расположенных в точках $x_1, x_1, \ldots, x_n$ оси Ox. Координата x_c центра тяжести этой системы находится по формуле

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}. \tag{3}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и вычислим массу m_k части стержня, расположенной на этом отрезке. По формуле (2) имеем $m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx$. Применив формулу среднего значения к этому интегралу, получим, что

$$m_k = \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \rho(\xi_k)\Delta x_k, \quad \text{где} \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k.$$

Допуская, что масса m_k сосредоточена в точке ξ_k отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, неоднородный стержень можно рассматривать как систему материальных точек с массами m_k, расположенных в точках ξ_k отрезка $[a, b]$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\,dx = m,$$

то по формуле (3) найдем приближенное выражение для координаты x_c центра тяжести неоднородного стержня:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k) \Delta x_k}{m}. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в числителе правой части (4), является интегральной суммой для функции $x\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому координату x_c центра тяжести неоднородного стержня определим по формуле

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}.$$

Пример 2. Найти координату x_c центра тяжести неоднородного стержня, линейная плотность которого $\rho = x$, а длина $l = 1$.

◀ Находим массу данного стержня

$$m = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Искомая координата центра тяжести равна

$$x_c = 2\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}. \;▶$$

§ 16. Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических задач приходится иметь дело с определенными интегралами от непрерывных функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это приводит к необходимости получения приближенных формул для вычисления определенных интегралов. Приведем две из них, а именно, формулу трапеций и формулу парабол.

16.1. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для упрощения рассуждений будем считать, что $f(x) \geqslant 0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

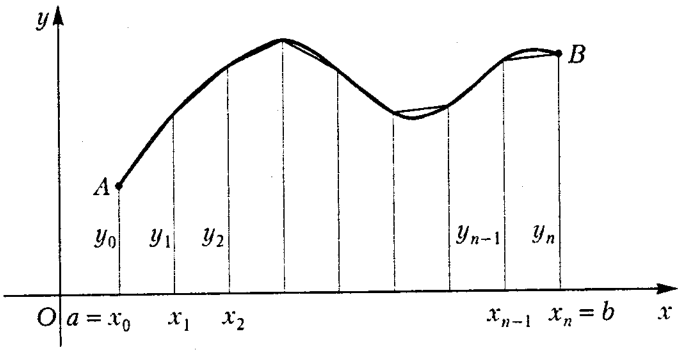

Рис. 30

и с помощью прямых $x = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ построим n прямолинейных трапеций (рис. 30). Сумма площадей этих трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right],$$

где $f(x_{k-1})$ и $\dot{f}(x_k)$ — соответственно основания трапеций, а $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ — их высоты. Таким образом, получена приближенная формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right],}$$

которая называется *формулой трапеций*. Эта формула тем точнее, чем больше n.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка $f''(x)$, то абсолютная величина погрешности не превосходит числа

$$M\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Пример 1. Пользуясь формулой трапеций, вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+1}$ при $n = 10$.

◄ Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $\ldots$; $x_9 = 0{,}9$; $x_{10} = 1$ и вычислим приближенно значения функции $f(x) = \frac{1}{x+1}$ в этих точках:

$f(0) = 1{,}0000;$

$f(0{,}1) = 0{,}9091;$ $f(0{,}2) = 0{,}8333;$ $f(0{,}3) = 0{,}7692;$

$f(0{,}4) = 0{,}7143;$ $f(0{,}5) = 0{,}6667;$ $f(0{,}6) = 0{,}6250;$

$f(0{,}7) = 0{,}5882;$ $f(0{,}8) = 0{,}5556;$ $f(0{,}9) = 0{,}5263;$

$f(1) = 0{,}5000.$

Применяя формулу трапеций, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}0000+0{,}5000}{2} + 0{,}9091 + 0{,}8333 + 0{,}7692 + 0{,}7143 + 0{,}6667 + 0{,}6250 + \right.$$
$$\left. + 0{,}5882 + 0{,}5556 + 0{,}5263\right) = 0{,}69377 \approx 0{,}6938.$$

Оценим погрешность полученного результата. Так как

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{то} \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

На отрезке $[0, 1]$ имеем $|f''(x)| \leqslant 2$, а значит $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f''(x)| = 2$. Поэтому погрешность полученного результата не превосходит величины

$$M\frac{(b-a)^2}{12n^2} = \frac{2}{12\cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0{,}0017.$$

Точное значение данного интеграла легко находим по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

Абсолютная ошибка результата, полученного по формуле трапеций, меньше 0,0007, что находится в соответствии с приведенной выше оценкой погрешности. ▶

16.2. Формула парабол

Вычислим сначала площадь Q криволинейной трапеции, ограниченной дугой M_0M_2 параболы $y = Ax^2+Bx+C$, проходящей через точки $M_0(0, y_0)$, $M_1\left(\frac{h}{2}, y_1\right)$, $M_2(h, y_2)$ (рис. 31). Площадь Q будет равна

$$Q = \int_0^h (Ax^2+Bx+C)\,dx = A\frac{x^3}{3}\Big|_0^h + B\frac{x^2}{2}\Big|_0^h + Cx\Big|_0^h = \tag{1}$$
$$= A\,\frac{h^3}{3} + B\,\frac{h^2}{2} + Ch = \frac{h}{6}\,(2Ah^2+3Bh+6C).$$

Выразим площадь Q через ординаты точек M_0, M_1, M_2. Подставляя координаты этих точек в уравнение параболы, получим

$$y_0 = C, \quad y_1 = A\,\frac{h^2}{4} + B\,\frac{h}{2} + C,$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

Отсюда находим, что

$$2Ah^2 + 3Bh + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$$

и поэтому

$$Q = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

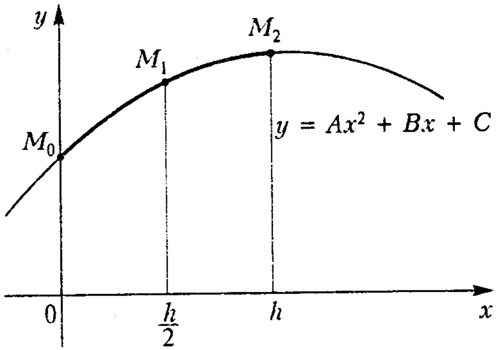

Рис. 31

Рассмотрим теперь определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ (четное число) равных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

и представим интеграл в виде суммы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{2n-2}^{2n} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Проведем через точки x_k прямые, параллельные оси Oy и обозначим через A, M_1, $M_2, \ldots, M_{2n-2}, M_{2n-1}$, B точки пересечения этих прямых с кривой $y = f(x)$, а их ординаты обозначим чрез $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$. Через каждые три точки M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ проведем параболу с вертикальной осью симметрии. В результате получим n криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболами (рис. 32). Так как площадь частичной криволинейной трапеции, отвечающей отрезку $[x_{2k-2,}, x_{2k}]$ приближенно равна площади соответствующей «параболической» трапеции, то, учитывая, что длина h отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ равна $\frac{b-a}{6n}$, по формуле (1) имеем

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}),$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя в правую часть равенства (2) вместо интегралов их приближенные значения, получаем приближенную формулу

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right].}$$

Эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона.*

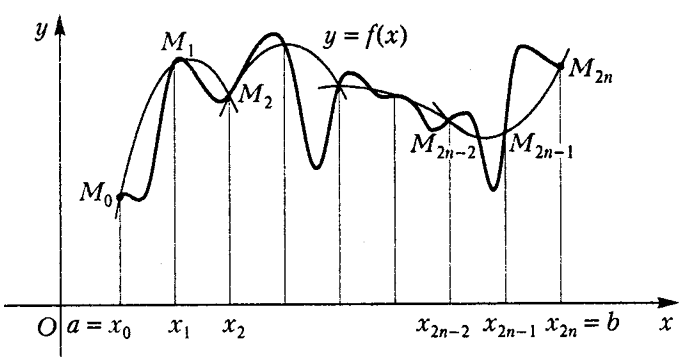

Рис. 32

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка $f^{IV}(x)$, то абсолютная величина погрешности формулы Симпсона не больше чем

$$M\frac{(b-a)^5}{2880n^4},$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|$.

Погрешность формулы Симпсона с ростом n уменьшается быстрее, чем погрешность формулы трапеций. Поэтому формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций.

Пример 2. Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

по формуле Симпсона при $2n = 4$.

◀ Разобьем отрезок $[0, 1]$ на четыре равных части точками

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}25; \quad x_2 = 0{,}50; \quad x_3 = 0{,}75; \quad x_4 = 1$$

и вычислим приближенно значения функции $y = \frac{1}{x+1}$ в этих точках:

$$y_0 = 1{,}0000; \quad y_1 = 0{,}8000; \quad y_2 = 0{,}6662; \quad y_3 = 0{,}5714; \quad y_4 = 0{,}5000.$$

По формуле Симпсона находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[1{,}0000 + 0{,}5000 + 2 \cdot 0{,}6662 + 4(0{,}8000 + 0{,}5714)\right] \approx 0{,}69325.$$

Оценим погрешность полученного результата. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ имеет производную четвертого порядка $f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$, для которой получаем

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1}\left|f^{\mathrm{IV}}(x)\right| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1}\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = 24.$$

Погрешность результата не превосходит величины $\frac{24}{2880 \cdot 2^4} < 0{,}0005$. Сравнивая приближенное значение интеграла с точным, приходим к выводу, что абсолютная ошибка результата, полученного по формуле Симпсона, меньше 0,0001, что соответствует полученной выше оценке погрешности. ▶

Эти примеры показывают, что формула Симпсона дает более точные приближенные значения определенных интегралов, чем формула трапеций.

Упражнения

Вычислить определенные интегралы, пользуясь формулой Ньютона—Лейбница.

1. $\displaystyle\int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{x}\, dx.$ **2.** $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 2^x \cdot 3^{-x}\, dx.$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx.$ **5.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{tg}^2 x\, dx.$ **6.** $\displaystyle\int_{-2}^3 |x|\, dx.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx.$ **8.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}}.$ **9.** $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

10. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ **11.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **12.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{\ln(x+\sqrt{9+x^2})}{\sqrt{9+x^2}}\, dx.$

13. $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$. 14. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$. 15. $\int\limits_0^{\pi/2} 3^{\cos^2 x} \sin 2x\,dx$.

16. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$. 17. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/12} \ln \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x\,dx$. 18. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

19. $\int\limits_0^1 \operatorname{sh}^2 x\,dx$. 20. $\int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{th} x\,dx$. 21. $\int\limits_0^{\ln 3} \operatorname{th}^2 x\,dx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите следующие интегралы:

22. $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x\,dx$. 23. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$. 24. $\int\limits_0^1 x \operatorname{sh} x\,dx$.

25. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \arcsin x\,dx$. 26. $\int\limits_0^1 x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Вычисление площадей

27. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2+2x-3$ и прямой $y = x+3$.

28. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

29. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 1$, прямой $x = 2$ и осями координат.

30. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 3x - 4$ и $y = 4 + 3x - x^2$.

31. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x - 1$, $y = 1$ и кривой $y = \ln x$.

32. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{-x}$, $y = e^x$ и прямой $x = 1$.

33. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью Oy.

34. Вычислите площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$.

35. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, и осью абцисс.

36. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $a > 0$.

37. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin\varphi$ $(a > 0)$.

38. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin 2\varphi$ $(a > 0)$.

39. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2 + \sin\varphi$.

Вычисление объемов тел

40. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

41. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

42. Найдите объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

43. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной осью Ox и параболой $y = ax - x^2$ $(a > 0)$

44. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямой $y = 1$.

45. Найдите объем сегмента, отсекаемого плоскостью $x = a$ от эллиптического параболоида $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$.

46. Найдите объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

Вычисление длин дуг

47. Вычислите длину дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$ от точки $(0, 0)$ до точки $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

48. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $A(1, 1)$.

49. Найдите длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

50. Найдите длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

51. Найдите длину кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$ (астроида).

52. Найдите длину дуги кривой $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ от $t = 0$ до $t = 3$.

53. Найдите длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = \ln \pi$.

54. Найдите длину дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi} (a > 0)$, находящейся внутри круга $\rho \leqslant a$.

55. Найдите длину кривой $\rho = a\sin\varphi$ $(a > 0)$.

56. Найдите длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$.

Ответы

1. $\frac{2}{9}$. **2.** $\frac{3}{2} + \ln 4$. **3.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **4.** $\frac{\pi+4}{8}$. **5.** $\operatorname{tg} 1 - 1$. **6.** 6,5. **7.** 0. **8.** $\frac{8}{3}$. **9.** $-\frac{2}{3}$. **10.** 2. **11.** 1. **12.** $\frac{3}{2}\ln^2 3$. **13.** $\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$. **14.** $\frac{\pi}{12}$. **15.** $\frac{2}{\ln 3}$. **16.** 0. **17.** $-\frac{\ln 2}{4}$. **18.** $\sin 1$. **19.** $\operatorname{sh}^2 1$. **20.** $\ln\frac{5}{4}$. **21.** $\ln 3 - \frac{4}{5}$. **22.** -2π. **23.** $\ln 4 - 1$. **24.** e^{-1}. **25.** $\frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$. **26.** $2-\sqrt{e}$. **27.** $\frac{125}{6}$. **28.** 4,5. **29.** 2. **30.** $\frac{125}{3}$. **31.** $e - 2{,}5$. **32.** $2\operatorname{ch} 1 - 2$. **33.** 12. **34.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **35.** $3\pi a^2$. **36.** $6\pi a^2$. **37.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **38.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **39.** $\frac{9}{2}\pi$. **40.** $\frac{\pi^2}{2}$. **41.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **42.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **43.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **44.** $\frac{\pi}{2}$. **45.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **46.** $\pi abh\left(1 + \frac{h^2}{3c^2}\right)$. **47.** $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$. **48.** $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$. **49.** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **50.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **51.** $6a$. **52.** 12. **53.** $(\pi-1)\sqrt{2}$. **54.** $a\sqrt{2}$. **55.** πa. **56.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

1.1. Определения. Примеры

Понятие определенного интеграла связано с функцией, рассматриваемой на некотором конечном отрезке $[a, b]$, так что область интегрирования в определенном интеграле всегда ограничена. Однако часто приходится иметь дело с функциями в неограниченных областях: в бесконечных полуинтервалах вида $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$, или же в интервале $(-\infty, +\infty)$. С подобной ситуацией мы встречаемся, например, при вычислении потенциала гравитационной или электростатической силы.

Чтобы распространить понятие определенного интеграла на случай неограниченных областей интегрирования, нужны новые определения, устанавливающие, что следует понимать под символами

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$ и интегрируема (например, непрерывна) на каждом конечном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где a — фиксировано, а $b \geqslant a$ — произвольно. Определим, что мы будем понимать под символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

(*несобственный интеграл 1-го рода*). Рассмотрим функцию аргумента $b \geqslant a$

$$J(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Определение. Если при $b \to +\infty$ функция $J(b)$ имеет конечный предел L, то мы называем несобственный интеграл (1) *сходящимся* и полагаем по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Если при $b \to +\infty$ функция $J(b)$ не имеет (конечного) предела, то мы называем интеграл (1) *расходящимся* и не приписываем ему никакого числового значения.

Пример 1. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

◀ По определению

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

так что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

сходится и равен $\frac{\pi}{2}$. ▶

Пример 2. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx.$$

◀ Так как интеграл

$$\int_0^b \cos x\, dx = \sin b$$

не имеет предела при $b \to +\infty$, то данный несобственный интеграл расходится. ▶

Пример 3. Пусть точечные электрические заряды q_1 и q_2 имеют одинаковые знаки, например, $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$, так что заряд q_1 будет отталкивать заряд q_2. По закону Кулона сила F электростатического взаимодействия в вакууме двух точечных электрических зарядов равна

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2},$$

где r — расстояние между зарядами, k — постоянная.

Пусть заряд q_1 помещен в точке M_0, которая принимается за начало отсчета. Требуется найти работу A по перемещению заряда q_2 из точки M, отстоящей от точки M_0 на расстоянии r_1, в бесконечность. Искомая работа A выражается несобственным интегралом

$$A = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{kq_1q_2}{r^2}\, dr = kq_1q_2 \int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

По определению

$$\int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{r_1}^{b} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=r_1}^{r=b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{r_1}.$$

Таким образом, $A = \frac{kq_1q_2}{r_1}$. Если q_2 — единичный заряд, то $A = \frac{kq_1}{r_1}$. Эта величина называется *потенциалом* поля, создаваемого зарядом q_1.

Пример 4. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha = \mathrm{const}). \tag{3}$$

Установим, при каких значениях α интеграл (3) сходится и при каких расходится. По определению имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Поэтому, если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

так что при $\alpha > 1$ интеграл (3) сходится; если же $\alpha < 1$, то при $b \to +\infty$ интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

не имеет конечного предела, так что при $\alpha < 1$ интеграл (3) расходится.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b,$$

откуда видно, что при $\alpha = 1$ интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Следовательно,

$$\text{интеграл} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{array}{ll} \text{сходится, если} & \alpha > 1, \\ \text{расходится, если} & \alpha \leqslant 1. \end{array}$$

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим область D, ограниченную слева прямой $x = 1$, снизу — осью Ox, а сверху — кривой $y = \frac{1}{x^\alpha}$ (рис. 1). Вправо эта область простирается безгранично. Условимся под площадью всей бесконечной области D понимать предел площади конечной ее части до прямой $x = b$ (рис. 2) при $b \to +\infty$. Тогда полученные выше результаты будут означать, что если область D сверху ограничена кривой $y = \frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha > 1$, то она имеет конечную площадь, если же верхняя граница области D есть гипербола $y = \frac{1}{x}$ или кривая $y = \frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha < 1$, то говорить о площади области D не имеет смысла.

Замечание. Нетрудно видеть, что для любого $a \geqslant \delta > 0$ интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

также сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

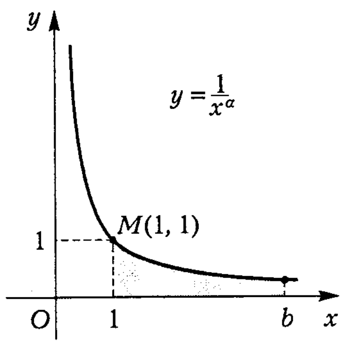

Рис. 1

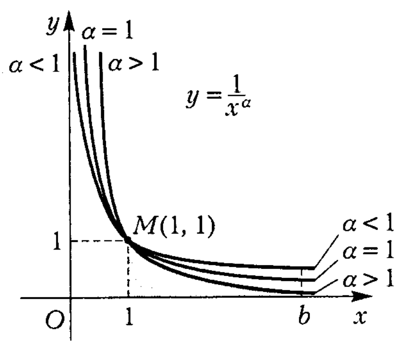

Рис. 2

Пользуясь определением несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

можно доказать справедливость следующих утверждений.

1. Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится и λ — любое действительное число, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$$

также сходится, причем

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.}$$

2. Если интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходятся, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx$$

также сходится, причем

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.} \tag{4}$$

◀ Действительно, для любого $b > a$

$$\int_a^b \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Каждое слагаемое в правой части (5) имеет предел при $b \to +\infty$. Значит, существует предел левой части (5) при $b \to +\infty$, т. е. интеграл

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx$$

сходится. Переходя в равенстве (5) к пределу при $b \to +\infty$, получаем равенство (4). ▶

Задача. Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + \varphi(x)\big)\, dx$$

сходится. Что можно сказать о сходимости интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx\ ?$$

Можно показать, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на полупрямой $x \geqslant a$, то

$$\boxed{\int_a^{+\infty} u\, dv = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\, du} \tag{6}$$

(*формула интегрирования по частям*). При этом предполагается, что из трех входящих в равенство (6) выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют смысл по крайней мере два; существование третьего отсюда уже вытекает.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

(n — натуральное число или нуль).

◀ Интегрируя по частям, находим

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = -(x^n e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = nJ_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Замечая, что

$$J_0 = \int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1,$$

получаем

$$J_n = n!\,. ▶$$

1.2. Несобственные интегралы 1-го рода от неотрицательных функций. Теоремы сравнения

Во многих задачах вычислять несобственный интеграл не требуется, а нужно лишь установить, сходится ли этот интеграл или расходится. Вопрос о сходимости или расходимости несобственного интеграла часто решается с помощью теорем сравнения.

Теорема 1 (сравнения). *Пусть на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы и*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \geqslant a.$$

Тогда

1) *если интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx;$$

2) *если интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

расходится, то расходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

◀ 1) Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходится. Докажем, что сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т.е. $J(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$.

Прежде всего из неотрицательности функции $f(x)$ $\forall x \geqslant a$ следует, что $J(b)$ есть неубывающая функция от b. Действительно, если $b_1 > b$, то

$$J(b_1) = \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{b_1} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^{b} f(x)\,dx = J(b).$$

Далее, т.к. $f(x) \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \geqslant a$, то при любом $b > a$ имеем

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ не превосходит несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ который по условию сходится. Следовательно, при любом $b > a$ имеем

$$J(b) = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = L.$$

Итак, интеграл $J(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ представляет собой функцию от b, неубывающую и ограниченную сверху (при $b \to +\infty$). Поэтому $J(b)$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$, а это, согласно определению, означает, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Первое утверждение теоремы доказано.

2) Докажем второе ее утверждение. Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

расходится. Применяя метод рассуждения от противного, допустим, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходится. Тогда, согласно уже доказанной первой части теоремы, будет сходящимся интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, что противоречит условию. Следовательно, наше допущение неверно, т. е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится. ▶

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}\,dx.$$

◀ Исследовать его на сходимость при помощи определения не представляется возможным. Воспользуемся тем, что для всех $x \geqslant 0$ функция

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}$$

удовлетворяет условию

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x).$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

сходится, то в силу теоремы 1 сходится и рассматриваемый интеграл. ▶

Теорема 2 (сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неотрицательны для всех $x \geqslant a$ и пусть $\varphi(x)$ отлична от нуля для всех достаточно больших x. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0,$$

то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

◀ Пусть

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0.$$

Это означает, согласно определению предела, что для всякого числа $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$, существует такое число N, что для всех $x \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - k\right| < \varepsilon = \frac{k}{2},$$

или, что то же,

$$\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{3}{2}\,k.$$

Отсюда, в силу того, что $\varphi(x) > 0$, получаем двойное неравенство

$$\frac{k}{2}\,\varphi(x) < f(x) < \frac{3}{2}\,k\varphi(x) \quad \forall x \geqslant N.$$

Пользуясь теоремой 1, из неравенства $f(x) < \frac{3}{2}\,k\varphi(x)$ заключаем: если интеграл $\int\limits_N^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx$; из неравенства $\frac{k}{2}\varphi(x) < f(x)$ усматриваем: если интеграл $\int\limits_N^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично устанавливаем, что если интеграл $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (расходится), то интеграл $\int\limits_N^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ будет также сходящимся (расходящимся).

Полученные выводы остаются в силе и для интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$. Это следует из того, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ будет сходящимся или нет одновременно с интегралом $\int\limits_p^{+\infty} g(x)\,dx$, где $p > a$ — сколь угодно большое фиксированное число, поскольку разность этих интегралов является собственным интегралом. ▶

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}\,dx.$$

◀ На полупрямой $x \geqslant 1$ подынтегральная функция $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} > 0$. Запишем ее так:

$$f(x) = \frac{2+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что для больших x функция $f(x)$ ведет себя как $\frac{2}{x}$. Выберем в качестве функции сравнения $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^2+1)\cdot x}{x^3+3x+4} = 2 \neq 0.$$

Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

расходится. В силу теоремы 2 расходится и данный интеграл. ▶

Используя теорему 1, а также результаты, касающиеся интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, приходим к следующим признакам сходимости и расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ от неотрицательной функции $f(x)$.

Теорема 3. *Если существует такое число $\alpha > 1$, что для всех достаточно больших x*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{x^\alpha},$$

где $M > 0$ и не зависит от x, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится.

Если для всех достаточно больших x

$$f(x) \geqslant \frac{M}{x} \quad (M > 0,\ M \text{ не зависит от } x),$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

расходится.

◀ Пусть условие

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{x^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

выполнено для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$. Так как интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\,dx$ для $\alpha > 1$ сходится, то, взяв в качестве $\varphi(x)$ функцию $\frac{M}{x^\alpha}$, по теореме 1 получим, что сходится и интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$. Отсюда, в свою очередь, вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, так как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^b f(x)\,dx$$

и при $b \to +\infty$ интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_A^b f(x)\,dx$ имеют конечные пределы только одновременно.

Пусть теперь для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$ выполнено условие $f(x) \geqslant \frac{M}{x}$ $(M > 0)$. Так как интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{M}{x}\,dx$ расходится, то по теореме 1 расходится и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx$, а вместе с ним и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. ▶

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5}\,dx.$$

◀ Для $x \geqslant 3$ имеем

$$0 < \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится $(\alpha = 2 > 1)$. Следовательно, сходится и данный интеграл. ▶

1.3. Абсолютно сходящиеся интегралы 1-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена для $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, где $b > a$.

Определение. Интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называют (*условно*) *сходящимся* интегралом.

Теорема 4. *Если интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

◀ Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится,

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = L < +\infty.$$

Так как для всякого x из области определения функции $f(x)$

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

то

$$0 \leqslant |f(x)| + f(x) \leqslant 2|f(x)|. \tag{1}$$

Вместе с интегралом $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, который сходится по условию, сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} 2|f(x)|\,dx = 2\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Поэтому, согласно 1-й теореме сравнения, из (1) следует, что сходится также и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left(f(x) + |f(x)|\right) dx$. Последнее означает, что интеграл $\int\limits_a^b \left(f(x) + |f(x)|\right) dx$ при $b \to +\infty$ имеет конечный предел.

Имеем, очевидно,

$$f(x) = \big(f(x) + |f(x)|\big) - |f(x)| \quad \forall x \geqslant a,$$

откуда для всякого $b > a$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx - \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Каждое слагаемое правой части (2) имеет конечный предел при $b \to +\infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$ также имеет конечный предел, т. е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. ▶

Теорема 1 и результаты, касающиеся интегралов $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, позволяют сформулировать следующий признак абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 5. *Если существует такое число $\alpha > 1$, что для всех достаточно больших x функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^\alpha}, \tag{3}$$

где $M > 0$ и не зависит от x, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится абсолютно.

◀ В самом деле, пусть условие (3) выполнено для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$. Так как интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\,dx$ для $\alpha > 1$ сходится, то по теореме 1 сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} |f(x)|\,dx$. А тогда сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, и, значит, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно. ▶

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

◀ Имеем, очевидно, $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ $\forall x \geqslant 1$. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится, следовательно, данный интеграл сходится абсолютно. ▶

Итак, если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится абсолютно, то он сходится. Обратное неверно: интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

может быть сходящимся, но не быть абсолютно сходящимся.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{4}$$

◀ Для исследования его сходимости применим формально интегрирование по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{5}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ сходится абсолютно и, значит, сходится. Таким образом, оба выражения в правой части (5) конечны. Поэтому, во-первых, проделанное интегрирование по частям законно, а во-вторых, левая часть конечна, т. е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Покажем теперь, что интеграл (4) не сходится абсолютно, т. е. что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{6}$$

расходится. Действительно, из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

при любом $b > 1$ имеем

$$\int\limits_1^{b} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{7}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится:

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Интеграл $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Чтобы в этом убедиться, достаточно проинтегрировать его по частям (см. (5)). Переходя в неравенстве (7) к пределу при $b \to +\infty$, получим, что правая, а следовательно, и левая часть этого неравенства стремятся к бесконечности и поэтому интеграл (6) расходится. Таким образом, интеграл (4) не сходится абсолютно. ▶

Приведем один достаточной критерий сходимости интегралов, называемый *признаком Абеля—Дирихле.*

Теорема 6. *Пусть*

1) *функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при $x \geqslant a$;*
2) *функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant a$;*
3) *функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant a$;*
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

сходится.

Пример. Применим признак Абеля—Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

◀ Функция $f(x) = \sin x$ имеет всюду ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant 1$ функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ монотонно убывает и стремится к нулю, когда $x \to +\infty$. Все условия теоремы Абеля—Дирихле выполнены, так что интеграл (8) сходится. ▶

Задача. Доказать сходимость интеграла Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx.$$

(**Указание:** сделать замену переменной $x^2 = t$.)

1.4. Главное значение интеграла 1-го рода

Несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

определяется следующим образом:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.}$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если указанный предел существует, и *расходящимся* в противном случае.

Если оба предела интегрирования бесконечны, то по определению полагают

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{N_1\to+\infty \\ N_2\to+\infty}} \int\limits_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx}$$

($N_1, N_2 \to +\infty$ независимо друг от друга). Может оказаться, что определенный таким образом несобственный интеграл не существует, но существует *главное значение интеграла по Коши*, определяемое по формуле

$$\boxed{\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx,}$$

т. е. когда $N_1 = N_2 = N$ (v. p. — начальные буквы слов *valeur principal* — *главное значение*). Тогда говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится в смысле главного значения по Коши.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

◀ Имеем

$$\int\limits_{N_1}^{N_2} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+N_2^2}{1+N_1^2},$$

откуда видно, что при произвольном стремлении N_1 и N_2 к $+\infty$ интеграл $\int\limits_{-N_1}^{N_2} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ предела не имеет, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ расходится. В то же время

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+N^2}{1+N^2} = 0,$$

т. е. рассматриваемый интеграл сходится в смысле главного значения по Коши. ▶

§ 2. Интегралы от неограниченных функций

2.1. Определения. Примеры

Необходимым условием существования определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Так что, если, например, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b_1]$, где $b_1 < b$, и неограничена в окрестности точки $x = b$, то интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ в обычном смысле (в смысле Римана) не может существовать. Однако при помощи новых определений понятие интеграла можно распространить и на такие случаи, когда подынтегральная функция оказывается неограниченной на отрезке интегрирования.

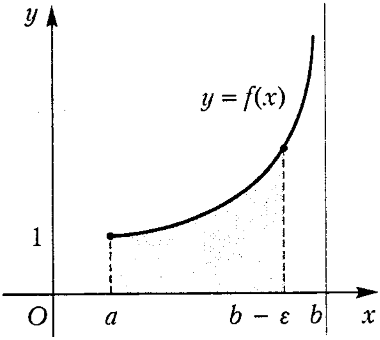

Рис. 3

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$, но не ограничена в интервале $(b-\varepsilon, b)$ (см. рис. 3). Определим, что мы будем понимать под символом

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

(*несобственный интеграл 2-го рода*). Для этого рассмотрим функцию от ε $(\varepsilon > 0)$:

$$J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Определение. Если при $\varepsilon \to 0+0$ функция $J(\varepsilon)$ имеет конечный предел L, то мы говорим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, и полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = L. \tag{2}$$

Если при $\varepsilon \to 0+0$ функция $J(\varepsilon)$ не имеет предела, то говорят, что несобственный интеграл (1) *расходится* и не приписывают ему никакого числового значения.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

◄ Здесь функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна и, значит, интегрируема на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, но при $x \to 1-0$ функция $f(x) \to +\infty$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\Bigl(\arcsin(1-\varepsilon)\Bigr)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

так что рассматриваемый несобственный интеграл сходится. ▶

Аналогично, если функция $f(x)$ неограничена только в интервале $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

определяется так:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *сходящимся*, если указанный предел существует, и *расходящимся* — в противном случае.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}. \tag{4}$$

◀ По определению

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Так как при $\alpha\neq 1$

$$\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_\varepsilon^1=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha},\quad \text{если}\quad \alpha<1;$$

если же $\alpha>1$, то интеграл $\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}$ не имеет конечного предела при $\varepsilon\to 0+0$.

При $\alpha=1$ имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=-\ln\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to 0+0]{}+\infty. \ ▶$$

Следовательно,

$$\boxed{\text{интеграл}\ \int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}\quad \begin{array}{ll}\text{сходится, если} & \alpha<1,\\ \text{расходится, если} & \alpha\geqslant 1.\end{array}}$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не ограничена только в окрестности точки c, где $a < c < b$, то полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+0\\ \varepsilon_2\to 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \right\}.$$

Рассмотрение других вариантов распределения особенностей функции $f(x)$ предоставляем читателю.

2.2. Несобственные интегралы 2-го рода от неотрицательных функций. Теоремы сравнения

Теорема 7 (сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, неограничены в интервале $(b-\varepsilon, b)$ и связаны условием*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \text{на} \quad [a, b).$$

Тогда

1) *если интеграл $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;*

2) *если интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то расходится интеграл $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx$.*

◄ Пусть интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

сходится, т. е. существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = L.$$

Докажем, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

также сходится, т. е. что функция $J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0+0$. В самом деле, так как $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < b-a)$ функция $J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ неотрицательна и не убывает при убывании ε. Кроме того, из условия $f(x) \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \in [a, b)$ при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ не превосходит интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, который по условию сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$J(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = L.$$

Таким образом, $J(\varepsilon)$ есть неубывающая при $\varepsilon \to 0+0$, ограниченная сверху функция. Поэтому существует конечный предел $J(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+0$, что означает, согласно определению, сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Справедливость второго утверждения теоремы легко доказывается методом рассуждения от противного. ▶

Теорема 8 (сравнения). *Пусть положительные на $[a, b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неограничены только в окрестности точки $x = b$, и пусть существует предел*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0.$$

Тогда интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \geqslant 0. \qquad (*)$$

◀ Интеграл $(*)$ является объединением несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. Действительно, во-первых, это интеграл с бесконечным верхним пределом, а во-вторых, подынтегральная функция $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}$ не определена в точке $x = 0$ и становится неограниченной при $x \to 0$ для достаточно большого $\alpha > 0$.

Для исследования сходимости интеграла $(*)$ разобьем промежуток интегрирования на два так, чтобы первый промежуток учитывал особенность функции $f(x)$ в точке $x = 0$, а второй — поведение функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Выберем, например, полуинтервалы $(0, 1]$ и $[1, +\infty)$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx. \qquad (**)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx.$$

Для исследования его сходимости воспользуемся теоремой 8. Известно, что $\operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \to 0)$. Положив $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, будем иметь

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$ сходится при $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. В силу теоремы 8 интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ также сходится при $\alpha < 2$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx.$$

Воспользуемся теоремой 2, положив $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, а поэтому при $\alpha > 1$ сходится и рассматриваемый интеграл. Значит, оба интеграла в правой части равенства (**) будут сходиться лишь когда $1 < \alpha < 2$. Это и есть условие сходимости интеграла (*). ▶

2.3. Абсолютно сходящиеся интегралы 2-го рода

Определение. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимися*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 9. *Если сходится интеграл* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, *то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пользуясь теоремой 7, нетрудно доказать следующий признак абсолютной сходимости интеграла.

Теорема 10. *Пусть функция $f(x)$ неограничена только в интервале $(b-\varepsilon, b)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Если существует такое положительное число $\alpha < 1$, что для всех x, достаточно близких к b, $x < b$,*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(b-x)^\alpha},$$

где $M > 0$ и не зависит от x, то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

сходится абсолютно.

Задача. Показать, что если для всех x, достаточно близких к b, $x < b$

$$|f(x)| \geqslant \frac{M}{b-x}, \quad M > 0,$$

то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

абсолютно сходиться не может.

Замечание. Интегралы второго рода приводятся к интегралам первого рода с помощью подстановок $b-x=\frac{1}{t}$ или $x-a=\frac{1}{t}$. Поэтому элементарную теорию несобственных интегралов 2-го рода можно вывести из теории интегралов 1-го рода.

2.4. Главное значение интеграла 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$, где $a<c<b$, при любом $\varepsilon>0$ и неограничена в окрестности точки c. Тогда,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+0\\ \varepsilon_2\to 0+0}}\left\{\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right\},}$$

причем для сходимости интеграла предел должен существовать при независимом стремлении ε_1 и ε_2 к нулю.

Говорят, что несобственный интеграл *сходится в смысле главного значения по Коши*, если существует предел

$$\boxed{\text{v. p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right\},}$$

($\varepsilon>0$ одно в обоих интегралах). Величину

$$\text{v. p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называют *главным значением интеграла по Коши*. Очевидно, что интеграл может быть сходящимся в смысле главного значения, но не быть сходящимся.

Пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x-c}$, где $c\in(a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c}+\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b\frac{dx}{x-c}=\Big(\ln|x-c|\Big)\Big|_a^{c-\varepsilon_1}+\Big(\ln|x-c|\Big)\Big|_{c+\varepsilon_2}^b=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (1)$$

Предел правой части (1) при произвольном стремлении ε_1 и ε_2 к нулю не существует. Положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$. Тогда при $\varepsilon\to 0+0$ предел правой части существует и есть главное значение рассматриваемого интеграла:

$$\text{v. p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a},\qquad a<c<b.$$

Задача. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $(-R, R)$ точки $x=0$, кроме, быть может, самой этой точки, и неограничена при $x\to 0$. Известно, что всякую функцию $f(x)$ в окрестности точки $x=0$ можно однозначно представить в виде суммы четной и нечетной функций

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}=f_1(x)+f_2(x).$$

Показать, что

$$\text{v. p.}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

существует, если существует интеграл $\int\limits_0^R f_2(x)\,dx$, где $f_2(x)$ — четная составляющая функции $f(x)$.

Упражнения

Пользуясь определением, исследуйте на сходимость интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}$. **2.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx$. **3.** $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$. **4.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x+1}$. **6.** $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x+5}\,dx$. **7.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$. **8.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$. **10.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$, α — действительное число. **11.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx$.

12. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ (n — целое число, $n \geqslant 0$).

13. Покажите, что

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0, \quad \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Пользуясь определением, исследуйте на сходимость интегралы:

14. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. **15.** $\int\limits_0^{1} \ln x\,dx$. **16.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

17. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. **18.** $\int\limits_0^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. **19.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

20. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **21.** $\int\limits_0^{1} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. **22.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. **23.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$ (α, β — действительные числа). **25.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\cos x}{x+1}\,dx$.

Ответы

1. Сходится; равен $\frac{\pi}{4}$. **2.** Расходится. **3.** Сходится; равен $\frac{1}{2}$. **4.** Расходится. **5.** Сходится. **6.** Расходится. **7.** Сходится. **8.** Расходится. **9.** Расходится. **10.** Сходится при $\alpha > 1$. **11.** Сходится при $\alpha > 0$. **12.** $\frac{n!}{2}$. **14.** Сходится; равен 2. **15.** Сходится; равен $-\frac{1}{4}$. **16.** Сходится; равен $\frac{3}{2}$. **17.** Сходится; равен $-\frac{2}{e}$. **18.** Расходится. **19.** Расходится. **20.** Сходится. **21.** Расходится. **22.** Сходится. **23.** Расходится. **24.** Сходится, если $\alpha > -1$, $\beta - \alpha > 1$. **25.** Сходится неабсолютно; использовать теорему Абеля—Дирихле.