ГЛАВА III. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 17. Задачи, приводящие к понятию систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \tag{17.1}$$

где x – независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – искомые функции, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – известные функции. Система (17.1) называется ***системой обыкновенных дифференциальных уравнений***.

Системы дифференциальных уравнений применяются для описания многих процессов реальной действительности. В частности, к ним относятся различного рода физические и химические процессы, процессы нефте- и газодобычи, геологии, экономики и т. д. Действительно, если некоторые физические величины (перемещение тела, пластовое давление жидкости в фиксированной точке с тремя координатами, концентрация веществ, объемы продаж продуктов) оказываются меняющимися со временем под воздействием тех или иных факторов, то, как правило, закон их изменения по времени описывается именно системой дифференциальных уравнений, т. е. системой, связывающей исходные переменные как функции времени и производные этих функций. Независимой переменной в системе дифференциальных уравнений может выступать не только время, но и другие физические величины: координата, цена продукта и т.д. Рассмотрим две задачи, в ходе решения которых возникают системы дифференциальных уравнений.

Задача 1. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Пусть x и y – количества вещества P и Q, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x = 0$, $y = 0$, а через 1 час $x = \frac{3c}{8}$, $y = \frac{c}{8}$, где c – первоначальное количество вещества A.

Решение. К моменту t количество неразложившегося вещества A равно $(c - x - y)$. Тогда, согласно условиям задачи, скорости образования веществ P и Q:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(c - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(c - x - y), \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности скорости образования каждого из веществ P и Q, $x = x(t)$, $y = y(t)$ – искомые функции, описывающие закон изменения количества веществ P и Q.

Не останавливаясь подробно на процессе решения этой системы и нахождении коэффициентов k_1, k_2 запишем окончательный ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{4}\left(1 - 2^{-t}\right), \\ y = \dfrac{3c}{4}\left(1 - 2^{-t}\right). \end{cases}$$

График искомых функций $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 3.1) демонстрирует характер образования веществ P и Q в процессе химической реакции разложения вещества A.

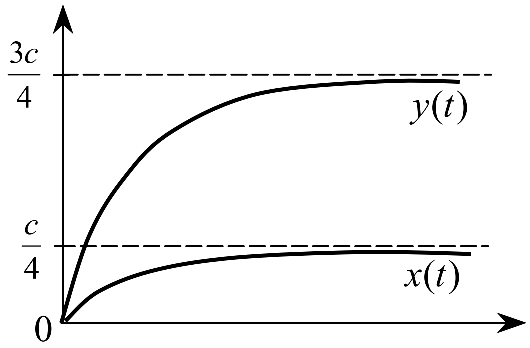

Рис. 3.1.

Задача 2 (о движении материальной точки в пространстве под действием переменной силы). Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения материальной точки в пространстве, где t – время, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ (т.е. в момент времени t точка имеет координаты $\{x(t), y(t), z(t)\}$). Если точка движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, где $\dot{\vec{r}} = \left\{\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ – скорость, то по II закону Ньютона вектор $\vec{r}(t)$ должен удовлетворять уравнению движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \end{cases}$$

где $\vec{F} = \{X,Y,Z\}$. Если считать неизвестными еще и проекции скорости $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$, то система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = w(t), \\ m\dfrac{du}{dt} = X(t,x,y,z,u,v,w), \\ m\dfrac{dv}{dt} = Y(t,x,y,z,u,v,w), \\ m\dfrac{dw}{dt} = Z(t,x,y,z,u,v,w). \end{cases}$$

Или, в более компактной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \\ m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t,\vec{r},\vec{V}), \end{cases}$$

где $\vec{V}$ – вектор с проекциями (u,v,w).

Таким образом, мы убедились, что физические задачи приводят нас к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений. Причем, в зависимости от постановки задачи, число уравнений может быть достаточно большим. В таких случаях удобнее использовать более компактные формы записи (например, векторную, матричную).

§ 18. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \tag{18.1}$$

где x – независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – искомые функции, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – известные функции.

Совокупность n функций $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$ *называется* ***решением системы*** (18.1) *на интервале* (a,b), *если она обращает на* (a,b) *каждое уравнение этой системы в тождество.*

> *Замечание.* Всегда будем предполагать, что число уравнений системы равно числу неизвестных функций. На практике встречаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы дифференциальных уравнений называются уравнениями Монжа. В нашем курсе мы их рассматривать не будем.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется ***канонической:***

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} & = & f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} & = & f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(m_n)} & = & f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \tag{18.2}$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $f_i(x)$ – заданные в некоторой области функции.

Класс систем дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому мы будем изучать главным образом системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, для которых существует законченная теория построения общего решения, и несложные системы нелинейных уравнений, для которых, как правило, можно подобрать интегрируемые комбинации. Для всех остальных случаев на практике используют численные методы, которые выходят за рамки нашего курса.

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}} \qquad (18.3)$$

Система (18.3) *называется* ***нормальной.*** Если известные функции f_i системы (18.3) не зависят от свободной переменной x, то она называется ***автономной*** (стационарной).

Число уравнений системы (18.3) называется ее ***порядком***. В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т. к. каноническую систему (18.2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений. Для этого достаточно ввести k новых функций

$$y_{i0},\ y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

полагая, что

$$y_{i0} = y_i,\ y_{i1} = y_i',\ y_{i2} = y_i'',\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} = y_i^{(m_i-1)} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'). \end{cases}$$

Введем новые функции

$$y_{10} = y_1,\ y_{20} = y_2, y_{30} = y_3,\ y_{11} = y_1',\ y_{21} = y_2',\ y_{31} = y_3'.$$

Тогда исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} y_{11}' = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{21}' = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{31}' = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{10}' = y_{11}, \\ y_{20}' = y_{21}, \\ y_{30}' = y_{31}. \end{cases} \qquad \diamond$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1)$$

можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений. Ее решением будет функция $y_1(x) = \varphi(x)$, которая с геометрической точки зрения представляет собой кривую на плоскости (в двумерном пространстве). Для системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{d\,y_2}{d\,x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

решением будет пара функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \end{cases}$ которые можно рассматривать как уравнения кривой в пространстве трех измерений. Обобщая геометрическую терминологию, будем считать, что решение $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), ...,\ y_n = \varphi_n(x)$ системы (18.3) представляет собой интегральную кривую $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$.

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится также, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее ***начальным условиям***

$$\boxed{y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ \ldots,\ \ y_n(x_0) = y_{n0}.} \qquad (18.4)$$

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 18.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть в системе* (18.3) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют двум условиям*:

1) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *непрерывны как функции* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;
2) *их частные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в области* D *ограничены* (*т. е.* $\exists\ M > 0$ *такое, что* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M$, $i, j = \overline{1, n}$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *области* D *существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ \ y_2 = \varphi_2(x),\ \ \ldots,\ \ y_n = \varphi_n(x)$$

системы (18.3), *определенное в некоторой окрестности точки* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям* (18.4).

Из теоремы 18.1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ (так, чтобы точка $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ получать свое решение. Следовательно, в области D система (18.3) имеет бесчисленное множество решений и эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность n функций*

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned} \tag{18.5}$$

зависящих от x *и* n *произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *называется общим решение системы* (18.3), *если:*

1) *при любых допустимых значениях постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она обращает все уравнения системы* (18.3) *в тождество, т. е. определяет решение системы;*
2) *для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант, при которых функции совокупности* (18.5) *удовлетворяют заданным начальным условиям.*

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i, будем называть ***частным.***

Для нормальных систем справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 18.2. *Всякое дифференциальное уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$y = z_1,\ y' = z_2,\ y'' = z_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = z_n.$$

Тогда

$$y' = \frac{dz_1}{dx} = z_2,\ y'' = \frac{dz_2}{dx} = z_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n,\ y^{(n)} = \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, \ldots z_n),$$

т. е. получили нормальную систему

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{cases}$$

эквивалентную заданному уравнению. ■

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 18.3. *Всякая нормальная система n-го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана нормальная система

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{18.6}$$

Дифференцируем по x обе части первого уравнения системы:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями через $x, y_1, \ldots, y_n$ из системы (18.6) и получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

или, переобозначая правую часть, имеем:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение по x и, заменяя производные их выражениями из системы (18.6), будем иметь

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{18.7}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (18.7) находим $y_2, y_3, \ldots, y_n$, которые будут выражаться через $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_2 &= \psi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \psi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{18.8}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (18.7), приходим к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y_1:

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}). \ \blacksquare \tag{18.9}$$

Теорема 18.3 позволяет найти решения систем дифференциальных уравнений, сведя ее, по сути, к решению одного дифференциального уравнения порядка *n*. Действительно, решив уравнение (18.9) мы получим

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Дифференцируя найденную функцию y_1 $(n-1)$ раз и, подставляя $y_1^{(i)}$ $(i = \overline{1, n-1})$ в (18.8), находим искомое решение нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка n, *называется* ***методом исключения***.

Замечание. Уравнение (18.9) было получено в предположении, что из системы (18.8) можно выразить $y_2, y_3, \dots, y_n$ как функции $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$. Но в ряде случаев это сделать невозможно (например, если первое уравнение имеет вид $y_1' = f(x, y_1)$). Тогда следует получить систему вида (18.8) для *i*-го $(i \neq 1)$ уравнения системы и заменить систему уравнением порядка *n* относительно функции y_i. Для системы дифференциальных уравнений нельзя получить эквивалентного ей уравнения порядка *n* только тогда, когда система распадается на отдельные уравнения, т.е. является не системой, а совокупностью уравнений.

ПРИМЕР 18.1. Найти методом исключения общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$$

Указать решение, удовлетворяющее условиям $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 3$.

РЕШЕНИЕ. Продифференцируем второе уравнение системы:

$$y_2'' = y_1' - 2y_2' + 1.$$

Заменим y_1' ее выражением из первого уравнения системы:

$$y_2'' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1 - 2y_2' + 1. \tag{18.10}$$

Из второго уравнения системы находим:

$$y_1 = y_2' + 2y_2 - x.$$

Подставляя выражение для y_1 в (18.10) получим уравнение:

$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = 0.$$

Его общее решение:

$$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Дифференцируя y_2 и подставляя y_2 и y_2' в выражение для y_1 находим:

$$y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 5\,C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Найдем значение постоянных C_1 и C_2, при которых частное решение будет удовлетворять начальным условиям $y_1(0) = 11,\ y_2(0) = 3$. Подставив в общее решение $x_0 = 0$, $y_1 = 11$, $y_2 = 3$, будем иметь

$$\begin{cases} 11 = 5C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 + C_2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{3x} + e^{-x} - x, \\ y_2 = 2e^{3x} + e^{-x}. \end{cases} \diamond$$

ПРИМЕР 18.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. 1) Дифференцируем первое уравнение системы по x два раза, каждый раз заменяя y_2' и y_3' их выражениями из второго и третьего уравнений системы:

$$y_1' = y_2 + y_3;$$

$$y_1'' = y_2' + y_3' = \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{y_2'} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{y_3'},$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' = y_1 + 2y_2.$$

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = (y_2 + y_3) + 2(y_1 + y_2 - y_3),$$

$$\Rightarrow \quad y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \tag{18.11}$$

Получили систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Из системы уравнений $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ находим y_2 и y_3:

$$y_2 = 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1),$$
$$y_3 = y_1' - 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1).$$

Подставляя выражения для y_2 и y_3 в уравнение (18.11) получим

$$y_1''' = 2y_1 + 1{,}5 \cdot (y_1'' - y_1) - y_1' + 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1),$$
$$\Rightarrow \quad y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 0.$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x).$$

2) Теперь найдем y_2 и y_3. Имеем:

$$y_2 = 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1),$$
$$y_3 = y_1' - 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1).$$

Из $y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)$ находим

$$y_1' = e^x (C_2 + C_3 + C_3 x) \quad \text{и} \quad y_1'' = e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x).$$

Тогда

$$y_2 = 0{,}5 \cdot \left[e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x) - C_1 - e^x (C_2 + C_3 x) \right],$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = 0{,}5 \cdot \left[e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x - C_2 - C_3 x) - C_1 \right],$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = -0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x;$$
$$y_3 = e^x (C_2 + C_3 + C_3 x) - \left(-0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x \right),$$
$$\Rightarrow \quad y_3 = 0{,}5 \cdot C_1 + e^x (C_2 + C_3 x).$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x), \\ y_2 = -0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x, \\ y_3 = 0{,}5 \cdot C_1 + e^x (C_2 + C_3 x). \end{cases} \qquad \diamond$$

§ 19. Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{19.1}$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{19.2}$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (19.2) может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, …, C_n. Т. е. в области D справедливы равенства

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \tag{19.3}$$

Совокупность равенств (19.3) называют ***общим интегралом системы*** (19.1), а каждое из равенств системы (19.3) называют ***первым интегралом системы*** (19.1).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы. Так, например, если с помощью элементарных преобразований система (19.1) приводится к виду

$$d\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{19.4}$$

то
$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n})$$

будут первыми интегралами системы, а их совокупность – общий интеграл. Такой способ интегрирования систем называют ***методом интегрируемых комбинаций***.

Замечание. n первых интегралов системы образуют общий интеграл, если они независимы, т. е. ни один из них не может быть получен из оставшихся. Доказано, что если $\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i$ $(i = \overline{1, k})$ – первые интегралы и для каких-нибудь k функций $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$ якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_k}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_k}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k})} \neq 0,$$

то первые интегралы независимы.

ПРИМЕР 19.1. Найти первые интегралы системы

$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases} \diamond$$

Если привести систему к виду (19.4) сложно, но удается найти k ($k < n$) независимых первых интегралов системы, то из них можно выразить k неизвестных функций через остальные $(n-k)$ функций и перейти таким образом к системе с меньшим числом переменных.

ПРИМЕР 19.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Почленно сложим второе и третье уравнения, вычтем первое и получим

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

или
$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Отсюда первый интеграл системы:

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Этот интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через две другие, например,

$$y_3 = C_1 + y_1 - y_2. \tag{19.5}$$

Подставим y_3 в первые два уравнения системы и получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя их, находим:

$$y_1 = C_1 + C_2 e^x, \quad y_2 = 3C_1 + C_3 e^x.$$

Подставим найденные y_1 и y_2 в (19.5) и найдем y_3:

$$y_3 = C_1 + (C_1 + C_2 e^x) - (3C_1 + C_3 e^x) = e^x (C_2 - C_3) - C_1.$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^x, \\ y_2 = 3C_1 + C_3 e^x, \\ y_3 = e^x (C_2 - C_3) - C_1. \end{cases} \qquad \diamond$$

Равенства (19.3), дающие общий интеграл системы (19.1) обладают следующей особенностью: независимая переменная и функции входят в них равноправно. Следовательно, они сохранят свой вид и в том случае, когда мы берем в качестве независимой переменной y_i, хотя сама система дифференциальных уравнений свою форму в этом случае меняет.

Систему дифференциальных уравнений тоже можно записать в виде, который не будет меняться при смене независимого переменного. Действительно, из уравнений

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1,n})$$

получаем:
$$dx = \frac{dy_i}{f_i(x, y_1, \ldots, y_n)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy_1}{f(x) \cdot f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f(x) \cdot f_n(x, y_1, \ldots, y_n)}, \qquad (19.6)$$

где $f(x)$ – любая отличная от нуля функция. Обозначим

$$x = x_1, \ y_1 = x_2, \ \ldots, \ y_n = x_{n+1}.$$

Тогда равенства (19.6) примут вид:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}} \qquad (19.7)$$

Форма (19.7) записи системы дифференциальных уравнений, называется ***симметричной*** (или ***симметрической***)**.** Для метода интегрируемых комбинаций она обычно более удобна.

> *Замечание.* При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным ***свойство равных дробей*** (или ***производных пропорций***):
>
> $$\boxed{\text{если}\ \ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}, \quad \text{то}\ \ \frac{a_1}{b_1}=\frac{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3}{\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3}.}$$
>
> Действительно, пусть
>
> $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$
>
> $$\Rightarrow \quad a_1=k\cdot b_1, \quad a_2=k\cdot b_2, \quad a_3=k\cdot b_3.$$
>
> Тогда
>
> $$\frac{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3}{\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3}=\frac{\alpha_1kb_1+\alpha_2kb_2+\alpha_3kb_3}{\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3}=k=\frac{a_1}{b_1}. \ \blacksquare$$

ПРИМЕР 19.3. Решить систему методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-\dfrac{\ln x}{2y_1}, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{\ln x}{2y_1}-1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dy_1}{-\dfrac{\ln x}{2y_1}}=\frac{dy_2}{\dfrac{\ln x}{2y_1}-1}=\frac{d\,x}{1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_1}{\ln x}=\frac{dy_2}{2y_1-\ln x}=\frac{d\,x}{-2y_1}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл:

$$\frac{dy_1}{\ln x}=\frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad -2y_1dy_1=\ln x d\,x,$$

$$\Rightarrow \quad -y_1^{\,2}=x(\ln x-1)+C_1 \quad \text{или} \quad y_1^{\,2}+x(\ln x-1)=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1 + dy_2}{\ln x + 2y_1 - \ln x} = \frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad dy_1 + dy_2 = -d\,x,$$

$$\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = -x + C_2 \quad \text{или} \quad y_1 + y_2 + x = C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$$y_1^{\,2} + x(\ln x - 1) = C_1 \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 + x = C_2$$

независимы (см. замечание на стр. 129). Имеем:

$$\Phi_1 = y_1^{\,2} + x(\ln x - 1), \qquad \Phi_2 = y_1 + y_2 + x,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y_1 \neq 0.$$

Таким образом, первые интегралы действительно независимы и общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{\,2} + x(\ln x - 1) = C_1, \\ y_1 + y_2 + x = C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

§ 20. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений (18.3) *называется* ***линейной***, *если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *линейны относительно неизвестных функций*, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{20.1}$$

или, более кратко,

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$, то система (20.1) называется ***однородной***.

Систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) можно записать в более компактной *матричной* (*векторно-матричной*) форме. Обозначим матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (20.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}. \qquad (20.2)$$

Для однородной системы матричная форма записи имеет вид

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{O}, \qquad (20.3)$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая матрица-столбец длины n.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, свяжем также систему линейных дифференциальных уравнений с действием некоторого линейного оператора.

Пусть $C_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$, $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Легко доказать, что оба этих множества образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем $D_n[a,b]$ является подпространством $C_n[a,b]$.

Пусть L – оператор, действующий из $D_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ по следующему правилу

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{Y} \in D_n[a,b].$$

Тогда система (20.1) означает, что

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B}. \qquad (20.4)$$

Равенство (20.4) называется ***операторной формой неоднородной системы***. Операторная форма однородной системы имеет вид:

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}. \qquad (20.7)$$

В дальнейшем, мы чаще всего будем использовать именно такую форму записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор $L\left[\mathbf{Y}\right]$ является линейным, т. к. обладает следующими свойствами:

1. $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=CL\left[\mathbf{Y}\right],\ \forall C\in\mathbb{R};$ (20.5)

2. $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].$ (20.6)

Действительно, по свойствам матриц,

1) $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=(C\,\mathbf{Y})'-\mathbf{A}(C\,\mathbf{Y})=C\,\mathbf{Y}'-C\,\mathbf{AY}=C(\mathbf{Y}'-\mathbf{AY})=CL\left[\mathbf{Y}\right];$

2) $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)'-\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)=\mathbf{Y}_1'+\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_1-\mathbf{AY}_2=$

$$=(\mathbf{Y}_1'-\mathbf{AY}_1)+(\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_2)=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].\ \blacksquare$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.

20.1. Интегрирование однородных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему

$$L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{O}, \tag{20.7}$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда в области

$$D=\{(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,|\,x\in[a;b],\ \forall y_i\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$$

для системы (20.7) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения и, следовательно, для любого $x_0\in[a;b]$ и любого $y_{i0}\in\mathbb{R}$ существует единственное решение системы (20.7), удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0)=y_{10},\quad y_2(x_0)=y_{20},\quad \ldots,\quad y_n(x_0)=y_{n0}.$$

Так как оператор $L\left[\mathbf{Y}\right]$ – линейный, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.1. *Если* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$ *– решения линейной однородной системы* (20.7)*, то* $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$ *и* $C\mathbf{Y}_1$ $(\forall C\in\mathbb{R})$ *тоже являются решениями линейной однородной системы* (20.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться, что $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$ и $C\mathbf{Y}_1$ удовлетворяют системе $L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{O}$. Из условия (20.5) получаем:

$$L\left[C\,\mathbf{Y}_1\right]=C\cdot L\left[\mathbf{Y}_1\right]=C\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O}.$$

Из условия (20.6) получаем:

$$L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right]=\mathbf{O}+\mathbf{O}=\mathbf{O}.\ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.2. *Если* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ *– решения линейной однородной системы* (20.7), *то для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *линейная комбинация решений*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + C_k \mathbf{Y}_k$$

тоже является решением системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (20.5) и (20.6) следует справедливость равенства

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i L\left[\mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O},$$

где C_i – произвольные постоянные. Но это и означает, что $\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i$ – решение однородной системы (20.7). ■

Обозначим через $S_n[a,b]$ множество матриц-столбцов порядка n, элементы которых являются решениями системы (20.7). Так как функции любого решения системы (20.7) является непрерывно дифференцируемыми, то

$$S_n[a,b] \subset D_n[a;b],$$

где $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов длины n, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 20.1, $S_n[a,b]$ ***является подпространством линейного пространства*** $D_n[a,b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S_n[a,b]$ конечномерное. Чтобы доказать это, необходимо нам сначала получить условие линейной независимости векторов пространства $S_n[a,b]$.

Возьмем в пространстве $D_n[a,b]$ n векторов:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (20.8)$$

Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0.$$

Это тождество означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0 \end{cases} \tag{20.9}$$

имеет нетривиальные решения. А это возможно только в том случае, когда определитель матрицы системы (20.9) тождественно равен нулю.

Матрица системы (20.9)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}} \tag{20.10}$$

называется ***интегральной матрицей***, а ее определитель называется ***определителем Вронского (вронскианом)*** векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ и обозначается

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \quad \text{или} \quad W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x).$$

Таким образом, мы показали что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.3 (необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$). *Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю*.

Теорема 20.3 дает необходимое условие линейной зависимости векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$. Достаточным это условие для произвольных n элементов пространства $D_n[a,b]$ не будет, т. е. если $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \equiv 0$, то векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

ПРИМЕР 20.1. Для векторов $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Однако эти векторы линейно независимы, так как из $\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 \equiv 0$ следует

$$\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Но ситуация меняется, если $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – решения линейной однородной системы (20.7). Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.4 (условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений)**.** *Если n решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейной однородной системы* (20.7) *линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{ij}(x_0)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \alpha_2 y_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_{21}(x_0) + \alpha_2 y_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \alpha_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{20.11}$$

Определитель матрицы системы (20.11)

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (20.11) имеет нетривиальные решения.

Пусть $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ – одно из нетривиальных решений системы (20.11). Рассмотрим матрицу-столбец

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n.$$

Так как $\mathbf{Y}_i$ – решения линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то $\tilde{\mathbf{Y}}$ – решение той же системы, удовлетворяющее в силу (20.11), начальным условиям $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

С другой стороны, однородная система $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$ всегда имеет нулевое решение $\mathbf{Y}(x) \equiv \mathbf{O}$, которое тоже удовлетворяет начальному условию $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n = \mathbf{O},$$

причем среди коэффициентов $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.5 (теоремы 20.3 и 20.4). Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – *решения системы* (20.7). *Тогда их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно зависимы*; *либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно независимы.*

Следствие 20.5 позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 20.6. *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (20.7) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что для системы (20.7) можно найти n линейно независимых решений.

Возьмем любое $x_0 \in [a;b]$ и любой определитель Δ_n порядка n, отличный от нуля. Например, пусть

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения получаем, что существуют n решений системы (20.7)

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

определенных в окрестности точки x_0 и удовлетворяющих условиям:

1) $y_{11}(x_0) = 1,\ y_{21}(x_0) = 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{n1}(x_0) = 0$

(где $1, 0, \ldots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) $y_{12}(x_0) = 0,\ y_{22}(x_0) = 1,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{n2}(x_0) = 0$

(где $0, 1, \ldots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

……………………………………………………………………

n) $y_{1n}(x_0) = 0,\ y_{2n}(x_0) = 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{nn}(x_0) = 1$

(где $0, 0, \ldots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 20.5, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение однородной системы (20.7) может быть представлено как линейная комбинация ее n линейно независимых решений.

Пусть $\mathbf{Y}_1 = (y_{i1}), \mathbf{Y}_2 = (y_{i2}), \ldots, \mathbf{Y}_n = (y_{in})$ – некоторые линейно независимые решения системы (20.7), $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_i)$ – решение системы (20.7), удовлетворяющее условию $\hat{\mathbf{Y}}(x_0) = \mathbf{Y_0}$, т. е.

$$\hat{y}_1(x_0) = y_{10},\ \hat{y}_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \hat{y}_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0), \\ y_{20} = C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} = C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0). \end{cases} \tag{20.12}$$

Так как $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимые решения системы (20.7), то для матрицы системы $\mathbf{M}$ имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (20.12) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим матрицу-столбец $\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = (\widetilde{y}_i)$. В силу следствия (18.5) она будет являться решением системы (20.7), причем

$\widetilde{y}_1(x_0) = y_{10}$ (из 1-го уравнения системы (20.12)),

$\widetilde{y}_2(x_0) = y_{20}$ (из 2-го уравнения системы (20.12)),

……………………………………………….

$\widetilde{y}_n(x_0) = y_{n0}$ (из n-го уравнения системы (20.12)).

Но начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}$$

удовлетворяет и решение $\hat{\mathbf{Y}}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = \widetilde{\mathbf{Y}}. \ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейной однородной системы порядка n (базис пространства $S_n[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

Если матрицы-столбцы

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots\dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y}_i}$$

или, подробнее

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x) + \ldots + C_n y_{1n}(x), \\ y_2(x) = C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) + \ldots + C_n y_{2n}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = C_1 y_{n1}(x) + C_2 y_{n2}(x) + \ldots + C_n y_{nn}(x). \end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы свелась к отысканию фундаментальной системы ее решений. Но сделать это для произвольной системы очень сложно. Позже мы рассмотрим один класс однородных систем, для которых практически всегда удается найти фундаментальную систему решений – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР 20.2. Доказать, что $\mathbf{Y_1} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y_2} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Записать общее решение этой системы.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ – линейно независимы (по следствию (20.7)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 20.6). Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}. \ \diamond$$

20.2. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}. \tag{20.13}$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \tag{20.14}$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (20.13) изложенным ниже методом, который называют ***методом вариации постоянных***.

Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы (20.14). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n, \tag{20.15}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\mathbf{Y}_1 + C_2(x)\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n(x)\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i, \tag{20.16}$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Тогда

$$\mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i'.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в неоднородную систему $\mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A}\mathbf{Y}_i) = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\mathbf{Y}_i$ – решения однородной системы, то $\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A}\mathbf{Y}_i = \mathbf{O}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \tag{20.17}$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$, и, следовательно, он отличен от нуля. Значит система (20.7) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1,n}), \tag{20.18}$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные функции $C_i(x)$ в (20.16) и получим общее решение неоднородной системы (20.13):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i .$$

ПРИМЕР 20.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -y_1 .$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Тогда из первого уравнения системы

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{Y}_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{Y}_{он} = C_1(x)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{cases}$$

Тогда функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ должны удовлетворять системе (20.17)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = -tgx, \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \qquad C_2(x) = x + C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\mathbf{Y}_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cdot\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + (x + C_2)\cdot\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}\cdot\ln|\cos x| + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\cdot x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\cdot\ln|\cos x| + x\cos x. \end{cases} \quad \diamond$$

Замечание. Общее решение (20.18) линейной неоднородной системы (20.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i .$$

Здесь слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i$ – общее решение соответствующей однородной системы, а слагаемое $\overline{\mathbf{Y}} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i$ – частное решение системы (20.13) (получается из общего решения при $C_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$).

В общем случае оказалась справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.7 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ *и частного решения* $\overline{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}},} \qquad (20.19)$$

где $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}.$$

По условию теоремы $L[\overline{\mathbf{Y}}] = \mathbf{B}$, $L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{O}$.

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}}\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i}\right) + L(\overline{\mathbf{Y}}) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(\mathbf{Y_i}) + L(\overline{\mathbf{Y}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathbf{O} + \mathbf{B} = \mathbf{B}. \ \blacksquare$$

Таким образом, задача нахождения общего решения неоднородной системы может быть сведена к нахождению одного частного решения этой системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы. В этом случае может оказаться полезной и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.8 (о наложении решений). *Если* $\mathbf{Y_i}$ *– решения неоднородных систем* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m})$,

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$ *является решением неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B_i},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}.$$

По условию теоремы

$$L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y_i}\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\mathbf{Y_i}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}\,. \blacksquare$$

§ 21. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

21.1. Собственные значения и собственные векторы

В предыдущем параграфе мы использовали линейный дифференциальный оператор для компактной формы записи системы дифференциальных уравнений и доказательства некоторых теорем. Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами. А именно, нам понадобятся понятия собственного вектора и собственного значения оператора конечномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ**.** *Пусть* φ *– оператор пространства* L. *Если для некоторого ненулевого вектора* $x \in L$ *и числа* λ *имеем* $\varphi(x) = \lambda x$, *то число* λ *называется собственным значением оператора* φ, *а вектор* x *называется собственным вектором оператора* φ, *относящимся к собственному значению* λ.

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы.

1. *Каждый собственный вектор* x *оператора* φ *относится к единственному собственному значению.*
2. *Если* x_1 *и* x_2 *– собственные векторы оператора* φ, *относящиеся к одному и тому же собственному значению* λ, *то их линейная комбинация* $\alpha x_1 + \beta x_2$ *– собственный вектор оператора* φ, *относящийся к тому же собственному значению.*

Из второго свойства следует:

а) каждому собственному значению λ соответствует *бесчисленное множество собственных векторов*;

б) если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор (нулевой вектор по определению не является собственным), то получим подпространство пространства L. *Это подпространство называется* ***собственным подпространством оператора*** φ и обозначается L_λ.

3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \dots x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n, *не может иметь более* n *собственных значений*. Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы*.

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе. Тогда векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}. \tag{21.1}$$

Но матричное уравнение $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Так как собственные векторы ненулевые, то система (21.1) должна иметь нетривиальные решения. Это будет иметь место, если

$$rang(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq n$$

или, что то же,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Матрица $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$), а ее определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, являющийся многочленом относительно λ – ***характеристическим многочленом*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (21.1) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

ПРИМЕР 21.1. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Запишем характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda & -5 & -3\\ -1 & -2-\lambda & -3\\ 3 & 15 & 12-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

Корни характеристического многочлена (собственные значения):

$$\lambda_1=6,\ \ \lambda_{2,3}=3.$$

2) Для каждого из найденных собственных значений λ_i запишем систему линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ и найдем ее фундаментальную систему решений. Это будут координаты базисных векторов собственного подпространства L_{λ_i}.

а) Для $\lambda_1=6$ имеем:

$$(\mathbf{A}-6\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2-6 & -5 & -3\\ -1 & -2-6 & -3\\ 3 & 15 & 12-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}-4 & -5 & -3\\ -1 & -8 & -3\\ 3 & 15 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0,\\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0,\\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -1 & -8\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 – свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases}-4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0,\\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-4x_1 - 5x_2 = 3x_3,\\ -x_1 - 8x_2 = 3x_3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \Delta=\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -1 & -8\end{vmatrix}=27,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}3x_3 & -5\\ 3x_3 & -8\end{vmatrix}=-9x_3,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-4 & 3x_3\\ -1 & 3x_3\end{vmatrix}=-9x_3;$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3},\\[2mm] x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Чтобы ее записать, придадим свободной переменной x_3 любое отличное от нуля значение. Например, полагаем $x_3 = -3$. Тогда из общего решения находим $$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ – решение фундаментальной системы.

Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=6}$ является вектор $$c_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 = \{1;1;3\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=6} = \{\alpha c_1 | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

б) Для $\lambda_{2,3} = 3$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-3 & -5 & -3 \\ -1 & -2-3 & -3 \\ 3 & 15 & 12-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы имеет три пропорциональные строки и, следовательно, ее ранг равен 1. Выбирая в качестве зависимой переменной x_1 получаем, что ее общее решение имеет вид:

$$x_1 = -5x_2 - 3x_3.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1, \ x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5;$$

$$x_2 = 0, \ x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – решения фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=3}$ являются векторы

$$c_2 = \{-5;1;0\} \quad \text{и} \quad c_3 = \{-3;0;1\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=3} = \{\alpha c_2 + \beta c_3 | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \ \diamond$$

В заключение этого пункта заметим, что говорят также о ***собственных векторах матрицы*** $\mathbf{A}$ порядка n, имея при этом ввиду собственные векторы оператора n-мерного пространства, имеющего $\mathbf{A}$ своей матрицей в некотором базисе. Использование такой терминологии удобно в задачах, в которых на каком-то этапе решения возникает система линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$. В этом случае любое решение системы $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ обычно называют собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, а ее фундаментальную систему решений – линейно независимыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$.

21.2. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+b_i(x)\quad (i=\overline{1,n}),\tag{21.2}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные. Такие системы называют ***системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Систему (21.2) можно решить методом исключения. При этом получится линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Мы умеем интегрировать такие дифференциальные уравнения. Проблема лишь в том, что процесс получения дифференциального уравнения порядка n довольно трудоемкий и требует аккуратности.

Другой способ – найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем найти общее решение неоднородной системы методом вариации постоянных. Этот путь, как правило, менее трудоемкий, так как оказалось, что фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы. Именно установление этой связи и является целью нашего дальнейшего изложения. Нахождение фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы называется ***методом Эйлера***.

Итак, рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\quad (i=\overline{1,n}).\tag{21.3}$$

Вид уравнений системы (21.3) наводит на мысль, что решения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x},\ y_2 = d_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = d_n e^{\lambda x}, \tag{21.4}$$

где $\lambda, d_1, d_2, \ldots, d_n$ – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (21.4) удовлетворяли системе (21.3).

Запишем систему (21.3) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{21.5}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в (21.5) и получим

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D},$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \lambda \mathbf{D} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O}. \tag{21.6}$$

Матричное уравнение (21.6) представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Но это означает, что λ *должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{D}$ *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

I. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны и различны*

В этом случае для каждого характеристического корня $\lambda_i \quad (i=\overline{1,n})$ найдем собственный вектор $\mathbf{D_i}=(d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i}=e^{\lambda_i x}\mathbf{D_i}$:

$$\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}d_{11} \\ e^{\lambda_1 x}d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x}d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x}d_{12} \\ e^{\lambda_2 x}d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x}d_{n2} \end{pmatrix}, \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} e^{\lambda_n x}d_{1n} \\ e^{\lambda_n x}d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x}d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W\,[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]=\begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Действительно, так как все собственные векторы $\mathbf{D_i}$ относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы, т. е. $\alpha_1\mathbf{D_1}+\alpha_2\mathbf{D_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{D_n}=\mathbf{O}$ только при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 d_{11} + \alpha_2 d_{12} + \ldots + \alpha_n d_{1n} = 0, \\ \alpha_1 d_{21} + \alpha_2 d_{22} + \ldots + \alpha_n d_{2n} = 0, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\dots\dots\quad\dots\quad\dots\dots \\ \alpha_1 d_{n1} + \alpha_2 d_{n2} + \ldots + \alpha_n d_{nn} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение и, следовательно, ее определитель

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Так как $W[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]\neq 0$, то решения $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y}_2+\ldots+C_n\mathbf{Y}_n$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 21.2. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

Характеристические корни являются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Найдем ее собственные векторы, относящиеся к каждому из собственных значений.

а) Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 5$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{5x}\\2e^{5x}\end{pmatrix}.$$

б) Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1+1 & 2\\4 & 3+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x_1 + 2x_2 = 0,\\4x_1 + 4x_2 = 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \; x_2 = -x_1 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{D_2}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = -1$, то решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-x}\\-e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{5x} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases}y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^{-x},\\y_2 = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}.\end{cases} \diamond$$

II. *Характеристические корни матрицы* A *различны, но среди них есть комплексные*

Так как характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получатся сопряженные значения.

Пусть $\mathbf{D}=(d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Тогда $\overline{\mathbf{D}}=(\overline{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{Z_1}=e^{\lambda_1 x}\mathbf{D}=e^{(\alpha+i\beta)x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D},$$

$$\mathbf{Z_2}=e^{\lambda_2 x}\overline{\mathbf{D}}=e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\overline{\mathbf{D}}.$$

В силу выбора $\mathbf{D}$ и $\overline{\mathbf{D}}$ эти матрицы-столбцы $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Полагаем далее

$$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\mathbf{Z_2}\right), \quad \mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\mathbf{Z_2}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Более того, можно доказать, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Замечание. На практике матрицу-столбец $\mathbf{Z_2}$ не записывают, так как $\mathbf{Z_2}=\overline{\mathbf{Z}}_1$. Действительно,

$$\overline{\mathbf{Z}}_1=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D}}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)}\cdot\overline{\mathbf{D}}=$$

$$=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\cdot\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{Z_2}.$$

Следовательно, $\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\overline{\mathbf{Z}}_1\right)=\operatorname{Re}\mathbf{Z_1}$,

$$\mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\overline{\mathbf{Z}}_1\right)=\operatorname{Im}\mathbf{Z_1}.$$

ПРИМЕР 21.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2-y_3, \\ y_2'=y_1+y_2, \\ y_3'=3y_1+y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

2) Действительный корень $\lambda_1 = 1$ является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 3x_1 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 1$ и находим его:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^x \mathbf{D_1} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$\mathbf{Z} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x + i \cdot 2\cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3\cos 2x + i \cdot 3\sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

Откуда находим

$$\mathbf{Y_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_2} = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y}_3$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$
$$= C_1e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + C_3e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = \quad - 2C_2e^x \sin 2x + 2C_3e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2e^x \cos 2x + C_3e^x \sin 2x, \\ y_3 = C_1e^x + 3C_2e^x \cos 2x + 3C_3e^x \sin 2x. \end{cases} \diamond$$

III. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны, но среди них есть кратные*

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы $\mathbf{A}$ кратности ℓ, $r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Возможны два случая.

$\boxed{\mathbf{1)}\ \boldsymbol{n - r = \ell}.}$

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений. Следовательно, существуют ℓ линейно независимых собственных векторов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D}_\ell$ матрицы $\mathbf{A}$, относящихся к собственному значению λ. Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ldots,\ \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x}\mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

$\boxed{\mathbf{2)}\ \boldsymbol{n - r \neq \ell}}$ (точнее, $n - r < \ell$, случай $n - r > \ell$ вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

Первый способ – искать ℓ решений вида

$$\mathbf{Y}=e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \ldots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \ldots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \ldots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов a_{ij} находят, подставляя $\mathbf{Y}$ в исходную систему.

ПРИМЕР 21.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2-4\lambda+4.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell=2$. При этом $r=rang(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=1$ (т. к. $\left|\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|=0$). Следовательно,

$$n-r=2-1=1 \quad \text{и} \quad n-r<\ell.$$

Будем искать решения системы в виде

$$\mathbf{Y}=e^{2x}\begin{pmatrix} a & + & bx \\ c & + & dx \end{pmatrix},$$

т. е. полагаем

$$y_1=(a+bx)e^{2x}, \qquad y_2=(c+dx)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_1'=(2a+2bx+b)e^{2x}, \qquad y_2'=(2c+2dx+d)e^{2x}.$$

Подставим y_1, y_2, y_1', y_2' в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a+b+2bx)e^{2x} = (a+bx-c-dx)e^{2x}, \\ (2c+d+2dx)e^{2x} = (a+bx+3c+3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на e^{2x}:

$$\begin{cases} 2a + b + 2bx = a + bx - c - dx, \\ 2c + d + 2dx = a + bx + 3c + 3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + b + c) + (b + d)x = 0, \\ (-a - c + d) - (b + d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях *x,* получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a - c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Или, после преобразований:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a, b будут зависимыми, c и d – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d - c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d = 1,\ c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -1;$$

$$d = 0,\ c = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1,\ b = 0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ($a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 1$) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ($a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$) дает решение

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \diamond$$

Как показывает рассмотренный пример, чтобы найти решения для системы дифференциальных уравнений второго порядка, нам пришлось решать алгебраическую систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. А если порядок исходной системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать в лучшем случае шесть уравнений и шесть неизвестных (а в худшем – девять уравнений и неизвестных). И хотя мы в каждом случае точно знаем количество свободных переменных (их количество совпадает с кратностью корня), задача получается трудоемкая.

Второй способ решения – найти k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие $\ell - k$ решений искать в виде

$$\mathbf{Y_{k+1}} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{k}}_{+1,0} + \mathbf{D_{k}}_{+1,1}x),$$

$$\mathbf{Y_{k+2}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k+2}}_{,0} + \mathbf{D_{k}}_{+2,1}x + \mathbf{D_{k}}_{+2,2}\cdot\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{Y_{k+3}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k}}_{+3,0} + \mathbf{D_{k}}_{+3,1}x + \mathbf{D_{k}}_{+3,2}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D_{k}}_{+3,3}\cdot\frac{x^3}{3}\right) \text{ и т.д.}$$

Здесь $\mathbf{D_{ij}}$ – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы $\mathbf{Y_i}$ были решениями системы дифференциальных уравнений.

На первый взгляд кажется, что этот способ такой же трудоемкий, как и предыдущий. Но на самом деле это не так. Рассмотрим его применительно к системам дифференциальных уравнений 3-го порядка, т. е. к системам вида

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{21.7}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица третьего порядка, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Число характеристических корней матрицы совпадает с ее порядком, следовательно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет кратный характеристический корень λ, то его кратность ℓ равна двум или трем. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Пусть $\ell = 2$, $n - r = 1$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}}x).$$

Тогда
$$\mathbf{Y_2'} = e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D_{20}} + \lambda\mathbf{D_{21}}x + \mathbf{D_{21}})$$

и, подставляя $\mathbf{Y_2}$ и $\mathbf{Y_2'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D}_{20} + \lambda\mathbf{D}_{21}x + \mathbf{D}_{21}) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21}x).$$

После преобразований будем иметь:

$$\lambda\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21} + \lambda\mathbf{D}_{21}x = \mathbf{A}\mathbf{D}_{20} + \mathbf{A}\mathbf{D}_{21}x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D}_{21} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{21}, \\ \lambda\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{20} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{D}_{21} - \lambda\mathbf{D}_{21} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_{20} - \lambda\mathbf{D}_{20} = \mathbf{D}_{21}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{21} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{20} = \mathbf{D}_{21}. \end{cases} \tag{21.8}$$

Первое уравнение системы (21.8) означает, что $\mathbf{D}_{21}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_1$. Тогда второе уравнение системы (21.8) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{20} = \mathbf{D}_1,$$

т. е. в качестве $\mathbf{D}_{20}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$.

Таким образом, *если* $\ell = 2$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x}\mathbf{D}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),} \tag{21.9}$$

где $\mathbf{D}_1$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$*, относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D}_{20}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$.

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ входят в фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы.

Действительно, рассматривая

$$\alpha\mathbf{Y}_1 + \beta\mathbf{Y}_2 = \mathbf{O},$$

получаем

$$(\alpha\mathbf{D}_1 + \beta\mathbf{D}_{20}) + \beta\mathbf{D}_1 x = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta\mathbf{D}_1 = \mathbf{O}, \\ \alpha\mathbf{D}_1 + \beta\mathbf{D}_{20} = \mathbf{O}. \end{cases}$$

По определению собственного вектора $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{O}$. Тогда из этой системы находим

$$\alpha = \beta = 0.$$

А это означает, что $\mathbf{Y}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ – линейно независимы.

Замечание. При получении формул (21.9) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$\left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 2$. При этом $r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$ (т. к. $\left| \mathbf{A} - 2\mathbf{E} \right| = 0$). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.9).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_2 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде $\mathbf{Y_2} = e^{2x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x)$,

где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x_1 = 1 - x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Полагаем $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:

$$\mathbf{Y_2} = e^{2x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}. \ \diamond$$

б) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 1$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Необходимо найти еще два решения. Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{21}}$ были нами уже получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{21}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ, и, следовательно, можно считать $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$; $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Третье решение системы запишем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{Y}_3' = e^{\lambda x}\left(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \lambda\,\mathbf{D}_{31}x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right)$$

и, подставляя $\mathbf{Y_3}$ и $\mathbf{Y_3'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda\mathbf{D}_{30} + \lambda\mathbf{D}_{31}x + \lambda\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}\right).$$

После преобразований будем иметь:

$$(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}) + (\lambda\,\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32})x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} = \mathbf{AD}_{30} + \mathbf{AD}_{31}x + \mathbf{AD}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD}_{32}, \\ \lambda\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD}_{31}, \\ \lambda\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} = \mathbf{AD}_{30}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{AD}_{32} - \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{AD}_{31} - \lambda\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ \mathbf{AD}_{30} - \lambda\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}. \end{cases} \tag{21.10}$$

Первое уравнение системы (21.10) означает, что $\mathbf{D_{32}}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D_{32}} = \mathbf{D_1}$. Тогда второе уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_1,$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{31}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Так как $\mathbf{D_{20}}$ тоже является решением этой системы, то можем полагать

$$\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{20}.$$

С учетом этого, третье уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{20},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{30}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

Таким образом, *если* $\ell = 3$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}\,,\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x)\,,\ \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D_{20}}x + \mathbf{D_1}\cdot\frac{x^2}{2}\right),} \quad (21.11)$$

где $\mathbf{D_1}$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$, *относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{20}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ будут линейно независимыми.

Замечание. При получении формул (21.11) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Система является линейной однородной с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2,3} = 1.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-1 & -3 & 3\\ -2 & -6-1 & 13\\ -1 & -4 & 8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad r=rang(\mathbf{A}-\mathbf{E})=2.$$

Следовательно, $n-r=3-2=1$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.11).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0,\\ -x_1-4x_2+7x_3=0.\end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 2 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0;\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 3x_2=3x_3,\\ 2x_1+7x_2=13x_3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} x_2=x_3,\\ x_1=3x_3\end{cases} \text{– общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1}=e^x\mathbf{D_1}=e^x\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^x\\ e^x\\ e^x\end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде $$\mathbf{Y_2}=e^x(\mathbf{D}_{20}+\mathbf{D}_1 x),$$
где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_1}$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}-3x_2+3x_3=3,\\-2x_1-7x_2+13x_3=1,\\-x_1-4x_2+7x_3=1.\end{cases}$$

Выбирая переменные x_1,x_2 зависимыми, а x_3 свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases}x_2=-1+x_3,\\x_1=3+3x_3.\end{cases}$$

Полагаем $x_3=0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:

$$\mathbf{Y_2}=e^x\left[\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}x\right]=e^x\begin{pmatrix}3+3x\\-1+x\\x\end{pmatrix}.$$

4) Третье решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде $$\mathbf{Y_3}=e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30}+\mathbf{D_{20}}x+\mathbf{D_1}\cdot\frac{x^2}{2}\right),$$

где $\mathbf{D}_{30}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{20}}$.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_{20}},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}-3x_2+3x_3=3,\\-2x_1-7x_2+13x_3=-1,\\-x_1-4x_2+7x_3=0.\end{cases}$$

Выбирая переменные x_1,x_2 зависимыми, а x_3 – свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 4 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] = e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] + C_3 e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 3 + 3x \\ -1 + x \\ x \end{pmatrix} + C_3 e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1 e^x + C_2 e^x (3 + 3x) + C_3 e^x (4 + 3x + 1{,}5x^2), \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^x (-1 + x) + C_3 e^x (-1 - x + 0{,}5x^2), \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x + C_3 e^x \cdot 0{,}5x^2. \end{cases} \diamond$$

в) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 2$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$, относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$, $\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2}$ – решения системы (21.7). Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{30}}$ и $\mathbf{D_{31}}$, нами получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{31}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ; $\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$.

В нашем случае размерность собственного подпространства матрицы $\mathbf{A}$ для собственного значения λ равна двум, а в качестве его базиса выбраны $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$. Следовательно,

$$\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2},$$

где α,β – некоторые числа, ***одновременно не равные нулю***, которые следует выбрать так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ была совместна.

Замечание. Если $\alpha=\beta=0$, то $\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2}=\mathbf{O}$ и, следовательно, $\mathbf{D_{31}}$ не будет собственным вектором.

Таким образом, *если* $\ell=3$ и $n-r=2$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1}=e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \ \mathbf{Y_2}=e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ \mathbf{Y_3}=e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30}+\mathbf{D}_{31}x),} \tag{21.12}$$

где $\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}$ – *линейно независимые собственные векторы матрицы* $\mathbf{A}$, *относящиеся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2}$, α,β – *числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ *была совместна*;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D}_{31}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1},\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3$ будут линейно независимыми.

Замечание. Формулы (21.12) останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n, так как при их получении не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка.

ПРИМЕР 21.7. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=2y_1, \\ y_2'=y_2-y_3, \\ y_3'=y_2+3y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-1\\0&1&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=-(\lambda-2)^3,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2,3}=2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell=3$. При этом

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2-2&0&0\\0&1-2&-1\\0&1&3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ r=rang(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=1.$$

Следовательно, $\qquad n-r=3-1=2$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda=2$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}0\cdot x_1-x_2-x_3=0,\\0\cdot x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1,x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3=0\cdot x_1-x_2.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_1=1,\ x_2=0\quad\Rightarrow\quad x_3=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=1\quad\Rightarrow\quad x_3=-1.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{D_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ – линейно независимые собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решения системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y_2} = e^{2x}\mathbf{D_2} = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 = \alpha,\\ 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = \beta,\\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = -\beta.\end{cases}$$

Система будет совместна при $\alpha = 0$ и $\forall\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Тогда

$$\mathbf{D_{31}} = 0\cdot\mathbf{D_1} + (-1)\cdot\mathbf{D_2} = -\mathbf{D_2}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1,\\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1.\end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 0\cdot x_1 - x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = -\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] =$$

$$= C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x}, \\ y_2 = C_2e^{2x} - C_3xe^{2x}, \\ y_3 = -C_2e^{2x} + C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases} \quad \diamond$$

ПРИМЕР 21.8. Найти общее решение системы $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда $$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda) = -\lambda^3,$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-0 & -4 & 2 \\ 2 & -2-0 & 1 \\ -4 & 4 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ r = rang(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 0$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 1 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $|1|$. Тогда переменная x_3 будет зависимой, а x_1, x_2 – свободными. Отбрасываем первое и третье уравнение системы и находим общее решение:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$\Rightarrow \ x_3 = -2x_1 + 2x_2 \ \text{– общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Полагая $x_1 = 1, \ \ x_2 = 0$ и $x_1 = 0, \ \ x_2 = 1$, находим их:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D}_2$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 0$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{0 \cdot x}\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = e^{0 \cdot x}\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на –2 и 2 и прибавим к первой и третьей строке соответственно. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}.$$

Система будет совместна при $\alpha - 2\beta = -2\alpha + 4\beta = 0$, где β – любое действительное число. Пусть

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2.$$

Тогда
$$\mathbf{D_{31}} = 2\cdot\mathbf{D_1} + \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\{2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = 2 \cdot \mathbf{D_1} + \mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{0 \cdot x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} + C_3 \mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_3 x, \\ y_2 = C_2 + C_3 x, \\ y_3 = -2C_1 + 2C_2 + C_3(1-2x). \end{cases} \qquad \diamond$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

1) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны и различны;
2) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ различны, но среди них есть комплексные;
3) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы $\mathbf{A}$ есть кратные комплексные корни. В этой ситуации алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.

§ 22. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

22.1. Понятие уравнения с частными производными и его интегрирование

Уравнением с частными производными[1] *называется соотношение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных, ее аргументы и ее частные производные. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется* ***порядком уравнения****.*

Функция, обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется ***решением*** *этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения с частными производными называется* ***интегрированием*** *этого уравнения.*

Так как обыкновенные дифференциальные уравнения можно рассматривать как частный случай уравнения с частными производными, то можно утверждать, что если уравнение с частными производными имеет решение, то решений будет множество.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n вся совокупность решений (за исключением некоторых) представлялась функцией, зависящей от независимой переменной x и n произвольных постоянных C_1, C_2, … , C_n (общим решением)[2]. Для дифференциальных уравнений с частными производными общее решение будет иметь более сложную структуру. Оно тоже будет содержать некоторые произвольные элементы, но это уже будут не константы, а функции. В этом можно убедиться, рассмотрев несколько простых примеров.

ПРИМЕРЫ.

1) Рассмотрим уравнение $F(x, y, z, z'_x) = 0$, где $z = z(x, y)$.

   Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x, где y – параметр. Общее решение такого уравнения будет иметь вид
   $$z = \varphi(x, y, C(y)),$$
   где $C(y)$ – произвольная функция.

---

[1] Или «***уравнением в частных производных***».

[2] Справедливо и обратное. Т. е. для любого семейства функций $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ существует дифференциальное уравнение порядка n, для которого это семейство является общим решением. Оно получается в результате исключения констант $C_1, \ldots, C_n$ из системы $\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$

2) Рассмотрим уравнение $z'_x = z'_y$, где $z = z(x,y)$.

Введем новые переменные по формулам

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Тогда
$$z(x,y) = f(u,v),$$

$$z'_x = f'_u \cdot \underbrace{u'_x}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_x}_{1} = f'_u + f'_v,$$

$$z'_y = f'_u \cdot \underbrace{u'_y}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_y}_{-1} = f'_u - f'_v.$$

Из уравнения $z'_x = z'_y$ получаем:

$$f'_u + f'_v = f'_u - f'_v,$$

$$\Rightarrow \quad 2f'_v = 0,$$

$$\Rightarrow \quad f(u,v) = \varphi(u) \quad \text{или} \quad z(x,y) = \varphi(x+y),$$

где $\varphi(x+y)$ – произвольная функция.

3) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } y,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) \text{ – произвольная функция;}$$

$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(x)dx + \psi(y) = \omega(x) + \psi(y),$$

где $\omega(x), \psi(y)$ – произвольные функции.

4) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } x,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y), \text{ где } \varphi(y) \text{ – произвольная функция;}$$

$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(y)dx + \psi(y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где $\varphi(y), \psi(y)$ – произвольные функции.

Как показывают рассмотренные примеры, уравнение с частными производными имеет множество решений, которые определяются с точностью до некоторой функции. Поэтому, для выбора одного решения необходимо задавать некоторые условия, которым эта функция должна удовлетворять.

Если уравнение можно разрешить относительно старшей частной производной, т. е. записать, например, в виде

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots \right), \tag{22.1}$$

здесь $k_1 + \ldots + k_n = k \le m$ и $k_1 < m$, то обычно полагают, что

$$\boxed{\left.\begin{aligned} & z\Big|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \\ & \left.\frac{\partial z}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \left.\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}\right|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_{m-1}(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\}} \tag{22.2}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$, …, $\varphi_{m-1}(x_2, \ldots, x_n)$ – заданные функции $n-1$ аргумента. Условия (22.2) называют ***начальными условиями для уравнения*** (22.1), а задача нахождения решения уравнения (22.1), удовлетворяющего начальным условиям (22.2), называется ***задачей Коши***.

В частности, для уравнения первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \tag{22.3}$$

начальное условие будет иметь вид

$$z\Big|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \tag{22.4}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

В случае функции $z = z(x, y)$ задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка имеет простой *геометрический смысл*. Действительно, для уравнения $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ частное решение $z = \varphi(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в пространстве $Oxyz$ (ее называют ***интегральной поверхностью***). Тогда, общее решение – некоторое семейство поверхностей. Начальное условие $z(x = x_0, y) = \varphi_0(y)$ задает в пространстве некоторую кривую $x = x_0$, $z(y) = \varphi_0(y)$. Следовательно, ***задача Коши представляет собой нахождение поверхности, проходящей через заданную кривую.***

Например, если общее решение $z = \varphi(x^2 + y^2)$ – семейство поверхностей вращения (*рис. 22.1*), то частным решением будет та поверхность, на которой лежит заданная кривая (начальное условие $z(x = x_0, y) = \varphi_0(y)$). Так на рис 22.1 в качестве начального условия выбрана ветка гиперболы $z(x = x_0, y) = \sqrt{x_0^2 + y^2}$ и, следовательно, частным решением является конус, на поверхности которого она лежит.

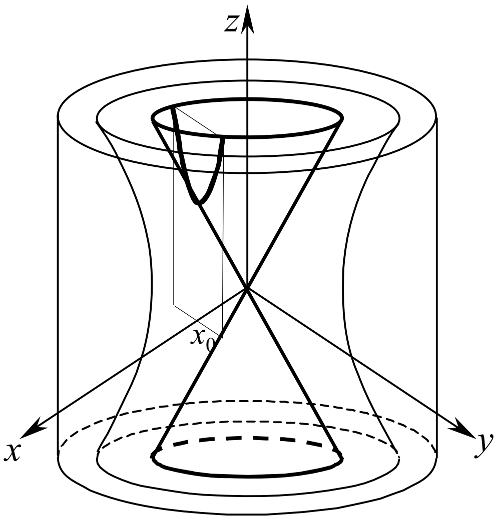

Рис. 22.1.

По аналогии с трехмерным пространством, говорят, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ – точка $n+1$-мерного пространства, $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – гиперповерхность (поверхность n измерений) в $n+1$-мерном пространстве, а условие

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$$

определяют в $n+1$-мерном пространстве гиперповерхность $n-1$-измерения. Поэтому говорят, что *для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка задача Коши в общем случае состоит в нахождении интегральной гиперповерхности, проходящей через заданную гиперповерхность $n-1$-измерения.*

В нашем курсе мы будем рассматривать только линейные уравнения с частными производными первого порядка, поскольку их интегрирование сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

22.2. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка***[3] называется уравнение вида

$$\boxed{F_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,} \qquad (22.5)$$

где $F_i(x_1,\ldots,x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbb{R}^{\text{n}}$, $z=z(x_1,\ldots,x_n)$ – неизвестная функция.

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n)}.} \qquad (22.6)$$

Ее называют ***соответствующей*** уравнению (22.5). Связь между уравнением (22.5) и системой обыкновенных уравнений (22.6) устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.1. *Функция* $z=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *является решением уравнения* (22.5) тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=C$ *является первым интегралом системы* (22.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=C. \qquad (22.7)$$

Очевидно, что уравнение (22.7) определяет первый интеграл системы (22.6) тогда и только тогда, когда для любого ее решения $x_1,\ldots,x_{n+1}$

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\equiv C.$$

Отсюда $$d\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\equiv 0;$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}\equiv 0.$$

Но из (22.6) находим: $\quad dx_i=kF_i(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Следовательно,

$$k\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\right]\equiv 0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\equiv 0. \qquad (22.8)$$

---

[3] или «***линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка***»

Таким образом, функция

$$z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

является решение уравнения (22.5).

2) Необходимость ($\Rightarrow$). Легко проверить, что условие (22.8) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что уравнение $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = C$ определяет первый интеграл системы дифференциальных уравнений (22.6). Следовательно, если $z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ – решение уравнения (22.5), то уравнение $\varphi(x_1, \dots, x_n) = C$ определяет первый интеграл системы (22.6). ■

Пусть найдена система независимых[4] первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.15), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

По теореме 22.1 функции $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = \overline{1, n-1})$ являются решениями уравнения (22.5), причем справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.2. *Если* $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = C_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ – *независимые первые интегралы системы* (22.6) *и* Φ – *произвольная непрерывно дифференцируемая функция* $n-1$ *аргумента, то* $z = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ – *общее решение уравнения* (22.5).

ПРИМЕР 22.1. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u = u(x, y, z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$

[4] т. е. ни один из них не следует из остальных.

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \qquad \text{или} \qquad \frac{z}{x} = C_1 .$$

Из равенства второй и третьей дроби получим другой первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{z},$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{z}{y} = C_2 .$$

Первые интегралы $\frac{z}{x} = C_1$ и $\frac{z}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z}{x}; \frac{z}{y}\right). \quad \diamond$$

Теперь покажем, как найти решение задачи Коши для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Пусть дано уравнение

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{22.5}$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^n$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция. Требуется найти его решение, удовлетворяющее условию

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

Найдем систему независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.6), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_{n-1}. \end{cases} \tag{22.9}$$

Разрешим (22.9) относительно $x_1,\dots,x_{n-1}$ (это всегда можно сделать в окрестности точки $M_0(x_{10},x_{20}\dots,x_{n0})$, такой что $F_i(M_0)\neq 0$). Получим:

$$\begin{cases} x_1=\omega_1(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\ x_2=\omega_2(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}). \end{cases} \tag{22.10}$$

Тогда решение уравнения (22.5), удовлетворяющее условию

$$z(x_1,\dots,x_{n-1},x_n=x_{n0})=\Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

будет иметь вид

$$\boxed{z=\Phi_0[\omega_1(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\omega_2(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\dots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})].} \tag{22.11}$$

Действительно, в силу теоремы 2, функция (22.11) определяет решение уравнения (22.5). А при $x_n=x_{n0}$ имеем

$$z(x_1,\dots,x_{n-1},x_n=x_{n0})=$$

$$\Phi_0(\omega_1(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\dots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))\big|_{x_n=x_{n0}}=$$

$$=\Phi_0\left(\omega_1\Big(\underbrace{\varphi_1\big|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1},\dots,\underbrace{\varphi_{n-1}\big|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\Big),\dots,\omega_{n-1}\Big(\underbrace{\varphi_1\big|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1},\dots,\underbrace{\varphi_{n-1}\big|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\Big)\right)=$$

$$=\Phi_0\left(\underbrace{\omega_1(\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_{n-1})}_{x_1},\dots,\underbrace{\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_{n-1})}_{x_{n-1}}\right)=$$

$$=\Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Замечание. Алгоритм нахождения решения задачи Коши показывает, что решение начальными данными определяется однозначно.

ПРИМЕР 22.2. Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{z}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, удовлетворяющее начальному условию $u(1,y,z)=y+z^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u=u(x,y,z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z/2}.$$

Из равенства 1-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x}=\frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \qquad \text{или} \qquad \frac{z^2}{x} = C_1 .$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим другой первый интеграл:

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{z^2}{y} = C_2 .$$

Первые интегралы $\frac{z^2}{x} = C_1$ и $\frac{z^2}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z^2}{x}; \frac{z^2}{y}\right).$$

2) Имеем: $\qquad \varphi_1(x,y,z) = \frac{z^2}{x}, \quad \varphi_2(x,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

Тогда $\qquad \overline{\varphi}_1 = \varphi_1(1,y,z) = z^2, \quad \overline{\varphi}_2 = \varphi_2(1,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

$$\Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\overline{\varphi}_1}, \qquad y = \frac{z^2}{\overline{\varphi}_2} = \frac{\overline{\varphi}_1}{\overline{\varphi}_2}.$$

Подставляя найденные выражения для y и z в начальное условие и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$u(x,y,z) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \varphi_1 = \frac{z^2/x}{z^2/y} + \frac{z^2}{x},$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 22.3. Найти решение уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,0) = x - 1$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $z = z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Она имеет единственный первый интеграл (общий интеграл дифференциального уравнения):

$$-xdx = ydy,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 = C.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$z = \Phi\left(y^2 + x^2\right).$$

С геометрической точки зрения, общее решение представляет собой всевозможные поверхности вращения с осью Oz.

2) Имеем: $\quad \varphi(x, y) = y^2 + x^2.$

Тогда $\quad \overline{\varphi} = \varphi(x,0) = x^2,$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\overline{\varphi}}.$$

Подставляя найденное выражения для x в начальное условие и «теряя черточку», получаем искомое частное решение:

$$z(x, y) = \pm\sqrt{\varphi} - 1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

С геометрической точки зрения, это частное решение представляет собой конус $(z+1)^2 = x^2 + y^2$, т.е. поверхность вращения, проходящую через прямую

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = x - 1. \end{cases} \quad \diamond$$

22.3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = P(x_1, \ldots, x_n, z), \quad (22.12)$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n, z)$, $P(x_1, \ldots, x_n, z)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция.

Интегрирование уравнения (22.12) сводится к интегрированию некоторого линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка. Действительно, предположим, что уравнение

$$u(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \quad (22.13)$$

задает в неявном виде решение уравнения (22.12). Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{u'_{x_i}}{u'_z}$$

и из уравнения (22.12) находим:

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_1}}{u'_z}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_n}}{u'_z}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z),$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_1}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_n}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot u'_z.$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}+P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0. \quad (22.14)$$

Уравнение (22.14) – линейное однородное первого порядка, в котором искомая функция u зависит от $n+1$ переменной $x_1,\ldots,x_n,z$. Соответствующая ему система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n,z)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n,z)}=\frac{dz}{P(x_1,\ldots,x_n,u)} \quad (22.15)$$

имеет n независимых первых интегралов

$$\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,z)=C_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x_1,\ldots,x_n,z)=C_n$$

и, следовательно, общее решение уравнения (22.14) будет иметь вид

$$u=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n).$$

Но тогда уравнение $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=0$ будет определять в неявном виде общее решение (22.12).

Замечание. На практике, при интегрировании линейных неоднородных уравнений с частными производными первого порядка, уравнение (22.14) обычно не записывают. Записывают сразу его соответствующую систему (22.15).

ПРИМЕР 22.4. Найти общее решение уравнения

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z=z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2},$$

$$\Rightarrow\ 0{,}5z=y+C_1 \quad \text{или} \quad z-2y=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz-dx-dy}{2-(1+\sqrt{z-x-y})-1},$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{1}=\frac{d(z-x-y)}{\sqrt{z-x-y}},$$

$$\Rightarrow\ y-2\sqrt{z-x-y}=C_2.$$

Первые интегралы $z-2y=C_1$ и $y-2\sqrt{z-x-y}=C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(z-2y;y-2\sqrt{z-x-y}\right)=0.\ \diamond$$

ПРИМЕР 22.5. Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,1)=x^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z=z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Из равенства 1-й и 2-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y},$$

$$\Rightarrow\ 2\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow\ 2\ln|x|=-\ln|y|+\ln C_1 \quad \text{или} \quad x^2y=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{xdx}{x^2}=\frac{-0{,}5ydy}{y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2},$$

$$\Rightarrow\ \frac{xdx-0{,}5ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad xdx - 0{,}5ydy = dz \quad \text{или} \quad d\left(z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C_2.$$

Первые интегралы $x^2 y = C_1$ и $z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(x^2 y; z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно второй переменной, получим общее решение неоднородного уравнения в явном виде:

$$z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = f(x^2 y),$$

$$\Rightarrow \quad z = f(x^2 y) + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}.$$

2) Найдем искомое частное решение. Имеем:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 y, \qquad \varphi_2(x, y, z) = z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}.$$

Тогда $\qquad \overline{\varphi}_1 = \varphi_1(x, 1, z) = x^2, \quad \overline{\varphi}_2 = \varphi_2(x, 1, z) = z - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}.$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\overline{\varphi}_1}, \qquad z = \overline{\varphi}_2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} = \overline{\varphi}_2 + \frac{\overline{\varphi}_1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные выражения для x и z в начальное условие $z(x,1) = x^2$ и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = \left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = \varphi_1 \ \text{или} \ \varphi_2 - \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2 y}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{1}{4}. \diamond$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Краснов М. Л. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
2. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие / Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1978. – 287 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учебное пособие / Филиппов А. Ф. – 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 240 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для вузов / Степанов В. В. – 9-е изд., стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 472 с.
5. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / Матвеев Н. М. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
6. Барышева В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения (часть 1, 2): учебное пособие / Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Имас О.Н., Пахомова Е.Г. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 112 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ