ГЛАВА II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 12. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка называют уравнения порядка выше первого. В общем случае такие уравнения имеют вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{12.1}$$

где $n > 1$.

> *Замечание.* Функция F может не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, но обязательно в уравнении (12.1) должна присутствовать производная n-го порядка.

В нашем курсе мы будем рассматривать в основном такие дифференциальные уравнения n-го порядка $(n > 1)$, которые можно записать в виде

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).} \tag{12.2}$$

Уравнение (12.2) называют уравнением, ***разрешенным относительно старшей производной***.

Также как и дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Каждое из этих решений изображается на плоскости xOy некоторой кривой (интегральной кривой). Чтобы из этого множества решений выбрать определенное, надо задать n условий, которым должно удовлетворять искомое решение. Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \tag{12.3}$$

Совокупность этих условий называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (12.1) или (12.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (12.3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, порядка n, разрешенного относительно старшей производной, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 12.1 (Коши). *Пусть в уравнении*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (12.2)$$

функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;
2) *ее частные производные по переменным* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в области* D *ограничены.*

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (12.2), *определенное в некотором интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

> *Замечание.* Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка $(n > 1)$ не означает, что через данную точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$, как это имело место для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Кривых через эту точку проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$ (т. е. через точку (x_0, y_0) не проходит двух кривых с одинаковыми значениями $y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$). Например, для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$, единственность решения означает, что через точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит возможно бесконечное множество интегральных кривых, но только одна из них имеет в этой точке касательную с угловым коэффициентом y_{01}.

Из теоремы 12.1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}$ (так, чтобы точка $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1})$ принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел $y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}$ получать свое решение. Это подтверждает предположение о бесконечном множестве решений уравнения n-го порядка и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция*

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n),$$

зависящая от x *и* n *произвольных постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$, *называется общим решением дифференциального уравнения*

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}),\qquad(12.2)$$

в некоторой области D *существования и единственности решения задачи Коши, если она удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (12.2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0)=y_0,\; y'(x_0)=y_{01},\; y''(x_0)=y_{02},\;\ldots,\; y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1},\qquad(12.3)$$

где $(y_0,y_{01},y_{02},\ldots,y_{0n-1})\in D$, *можно так подобрать значения постоянных* C_{01}, C_{02}, …, C_{0n}, *что решение* $y=\varphi(x,C_{01},C_{02},\ldots,C_{0n})$ *будет удовлетворять заданным начальным условиям* (12.3).

Уравнение $\Phi(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения.***

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (12.2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров. Решение уравнения, удовлетворяющее условиям (12.3) будет изображаться определенной кривой этого семейства. Начальных условий достаточно для того, чтобы выделить это решение из общего. Соответствующие ему значения постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ будут находиться из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n),\\ y_{01}=\varphi'(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{0n-1}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n). \end{cases}$$

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (12.2) *называется* ***частным****, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши.* Любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ (включая значения $C_i=\pm\infty$).

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (12.2), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***. Очевидно, что особое решение не может быть получено из общего решения. Оно будет среди тех решений, которые «теряются» в процессе преобразований.

Задача интегрирования дифференциальных уравнений n-го порядка является более сложной, чем интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения. В следующем параграфе мы рассмотрим несколько типов уравнений, которые можно проинтегрировать таким методом.

§ 13. Понижение порядка уравнения

13.1. Уравнения, содержащие только x и $y^{(n)}$

Пусть уравнение порядка n содержит только x и $y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{13.1}$$

Здесь возможны два случая:

1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$;

2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

Рассмотрим первый случай, когда уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} = f(x),}$$

причем $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a,b).

Общее решение такого уравнения получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части уравнения. Действительно, так как

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

то
$$dy^{(n-1)} = f(x)dx.$$

Интегрируя обе части, получим уравнение порядка $(n-1)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 .$$

Так как
$$y^{(n-1)} = \left(y^{(n-2)}\right)' = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

то
$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2 .$$

Продолжая этот процесс, мы будем каждый раз понижать порядок уравнения на единицу, и после n-кратного интегрирования получим

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n .$$

ПРИМЕР 13.1. Найти общее решение уравнения $y''' = -\frac{1}{x^2}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C_1;$$

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \int\left(\frac{1}{x} + C_1\right)dx = \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

Интегрируя третий раз, получаем общее решение уравнения

$$y = \int\left(\ln|x| + C_1 x + C_2\right)dx = x\ln|x| - x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, надо определить соответствующие значения C_1, C_2, C_3. Полагая $x = 1$ имеем:

$$y = -1 + 0{,}5C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$
$$y' = C_1 + C_2 = 0,$$
$$y'' = 1 + C_1 = 0.$$

Откуда находим

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0{,}5.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = x\ln|x| - 0{,}5x^2 + 0{,}5. \ \diamond$$

Замечание. Если в задаче требуется найти только частное решение дифференциального уравнения, то целесообразно определять значения постоянных в процессе решения, а не после нахождения общего решения. Это ускоряет решение задачи, так как в результате подстановки конкретных значений C_i обычно упрощаются интегралы (см. пример 13.5).

Теперь рассмотрим второй случай, когда уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{13.1}$$

нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$. Если оно допускает параметрическое представление,

$$\boxed{x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),}$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно, из $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ получим

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt .$$

Тогда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1) .$$

Из $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ имеем

$$dy^{(n-2)} = \psi_1(t, C_1)\cdot\varphi'(t)dt ,$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\cdot\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2) .$$

Аналогично найдем выражения для $y^{(n-3)}, y^{(n-4)}, \ldots, y', y$ и получим

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Эти уравнения определяют общее решение уравнения (13.1) в параметрическом виде.

ПРИМЕР 13.2. Проинтегрировать уравнение $y'' + e^{y''} = x$.
РЕШЕНИЕ. Данное уравнение не может быть разрешено относительно y''. Попытаемся найти его решение в параметрическом виде. Полагаем $y'' = t$. Тогда

$$x = t + e^t, \qquad dx = (1 + e^t)dt .$$

Поэтому

$$dy' = y''dx = t(1 + e^t)dt ,$$

$$y' = \frac{t^2}{2} + \int te^t dt = \frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1 .$$

Тогда

$$dy = y'dx = \left(\frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1\right)\cdot(1 + e^t)dt ,$$

$$\Rightarrow \quad dy = \left(\frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1 + \frac{t^2}{2}e^t + e^{2t}(t-1) + C_1e^t\right)dt ,$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{t^3}{6} + \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1t + C_2 .$$

Итак, общее решение уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = t + e^t , \\ y = \dfrac{t^3}{6} + \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1t + C_2 . \end{cases} \diamond$$

13.2. Уравнения, не содержащие искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,\ (1 \le k < n),}$$

т. е. не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k-1)$ включительно. Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц заменой $y^{(k)} = p(x)$. В результате такой замены получим уравнение

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Предположим, что это уравнение интегрируется в квадратурах и $p = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ есть его общее решение. Тогда неизвестную функцию y находим из уравнения $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ k-кратным интегрированием правой части.

ПРИМЕР 13.3. Проинтегрировать уравнение $y'''x\ln x = y''$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $y'' = p(x)$, имеем $y''' = p'$ и уравнение принимает вид

$$p'x\ln x = p.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\ln x} \qquad (\text{где } \ p \ne 0,\ x\ln x \ne 0),$$

$$\Rightarrow \ \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\Rightarrow \ p = C_1 \cdot \ln|x|, \quad C_1 \ne 0.$$

Условие $x\ln x \ne 0$ не приводит к потери решения уравнения $p'x\ln x = p$. Условие $p \ne 0$ приводит к потере решения $p = 0$. Но оно может быть включено в общее решение при $C_1 = 0$. Следовательно, получаем

$$p = C_1 \cdot \ln|x|,\ \forall C_1 \qquad \text{или} \qquad y'' = C_1 \cdot \ln|x|,\ \forall C_1.$$

Интегрируя дважды, находим

$$y' = C_1 \cdot \int \ln|x|dx = C_1(x\ln|x| - x) + C_2,\ \ \forall C_1, C_2;$$

$$y = C_1 \int (x\ln|x| - x)dx + C_2 x + C_3,$$

$$\Rightarrow \ y = C_1\left[x^2\left(\frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] + C_2 x + C_3,\ \forall C_1, C_2, C_3.$$

Это и есть общее решение уравнения. ◇

13.3. Уравнения, не содержащие независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$\boxed{F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,} \tag{13.2}$$

т. е. не содержит независимого переменного. Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $p = y'$, причем p рассматривается как новая неизвестная функция, аргументом которой является y, т. е. $p = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot y' = \frac{dp}{dy}\cdot p = p'\cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\cdot\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2}\cdot p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)\cdot p = p''p^2 + (p')^2\cdot p,$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{n-1}}\right) = \omega(p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}).$$

Подставляя эти выражения в (13.2), получаем уравнение $(n-1)$-го порядка.

Предположим, что $p = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ является общим решением получившегося уравнения $(n-1)$-го порядка. Тогда

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = dx.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл уравнения (13.2):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

ПРИМЕР 13.4. Найти общее решение уравнения $2(y')^2 = (y-1)y''$.
РЕШЕНИЕ. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'\cdot p$ и уравнение принимает вид

$$2p^2 = (y-1)\cdot p\cdot p' \quad \text{или} \quad p\left[2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right] = 0,$$

$$\Rightarrow\ p = 0 \quad \text{или} \quad 2p - (y-1)\frac{dp}{dy} = 0.$$

Из условия $p = 0$ находим:

$$p = y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Из условия $2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}=0$ находим:

$$2\frac{dy}{y-1}=\frac{dp}{p} \quad (\text{где } p\neq 0,\ y-1\neq 0);$$

$$\Rightarrow\ 2\ln|y-1|=\ln|p|-\ln C_1, \quad C_1>0;$$

$$\Rightarrow\ C_1(y-1)^2=p, \quad C_1\neq 0.$$

Условие $y-1\neq 0$ не приводит к потери решения уравнения $2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}=0$. Условие $p\neq 0$ приводит к потере решения $p=0$, но оно может быть включено в общее решение при $C_1=0$. Следовательно, получаем

$$C_1(y-1)^2=p,\ \forall C_1 \quad \text{или} \quad y'=C_1(y-1)^2,\ \forall C_1$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx \quad (\text{где } y-1\neq 0).$$

После интегрирования будем иметь

$$-\frac{1}{(y-1)}=C_1x+C_2.$$

Откуда находим общее решение

$$y=1-\frac{1}{C_1x+C_2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (полученные ранее решения $y=C$ получаются по этой формуле при $C_1=0$; предположение $y-1\neq 0$ не привело к потере решения, т. к. $y=1$ получается из общего решения при $C_2=\infty$).◇

ПРИМЕР 13.5. Найти решение уравнения $y''=128y^3$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=8$.

РЕШЕНИЕ. Полагаем $y'=p(y)$. Тогда $y''=p'\cdot p$ и уравнение принимает вид

$$pp'=128y^3.$$

Тогда $$pdp=128y^3dy.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{p^2}{2}=128\frac{y^4}{4}+C_1 \quad \text{или} \quad p^2=64y^4+C_1,$$

$$\Rightarrow\ p=\pm\sqrt{64y^4+C_1} \quad \text{или} \quad y'=\pm\sqrt{64y^4+C_1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Но его интегрирование приводит к неберущимуся интегралу:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{64y^4 + C_1}}.$$

Таким образом, общее решение в данном уравнении найти не удастся. Тем не менее, частное решение найти можно. Из начальных условий получаем

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 8, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 8 = \sqrt{64 + C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Тогда уравнение $y' = \pm\sqrt{64y^4 + C_1}$ примет вид:

$$y' = 8y^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dy}{y^2} = 8dx,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = 8x + C_2 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{C_2 - 8x}.$$

Из начальных условий получаем $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{1 - 8x}. \ \diamond$$

13.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

называется ***однородным относительно*** $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, если при всех $t \neq 0$ выполняется тождество

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу подстановкой

$$\boxed{y' = yz,}$$

где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, пусть $t = \dfrac{1}{y}$. Тогда

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}\right) = F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right)$$

и $$F\left(x,ty,ty',ty'',\ldots,ty^{(n)}\right)=\frac{1}{y^m}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right).$$

Из этих двух равенств получаем:

$$F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=\frac{1}{y^m}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right),$$

$$\Rightarrow\quad F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=y^m\cdot F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right).$$

Следовательно, однородное относительно $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$ уравнение может быть записано в виде

$$y^m\cdot F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0. \qquad (13.3)$$

Далее, из $y'=yz$ находим

$$y''=y'z+yz'=y(z^2+z'),$$

$$y'''=y''z+2y'z'+yz''=y(z^3+3zz'+z''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=y\cdot\omega_n(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}).$$

Откуда получаем:

$$\frac{y'}{y}=z,\qquad \frac{y''}{y}=z^2+z',\qquad \ldots,\qquad \frac{y^{(n)}}{y}=\omega_n\left(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right).$$

Подставляя эти выражения в (13.3) получаем:

$$y^m\cdot\Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0,$$

$$\Rightarrow\ \Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0 \text{ (при условии } y\neq 0\text{)}.$$

Пусть $z=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})$ – общее решение уравнения $\Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0$. Тогда, из $y'=yz$ находим:

$$y'=y\cdot\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}),$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx\quad (y\neq 0),$$

$$\Rightarrow\quad \ln|y|=\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx+C_n,$$

$$\Rightarrow\quad y=C_n\cdot e^{\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx},\quad C_n\neq 0.$$

Условие $y\neq 0$ приводит к потере решения $y=0$. Но оно может быть включено в общее решение при $C_n=0$. Следовательно, окончательно получаем

$$y=C_n\cdot e^{\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx},\quad \forall C_n.$$

ПРИМЕР 13.6. Проинтегрировать уравнение $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.
РЕШЕНИЕ. Проверим, будет ли данное уравнение однородным относительно y, y', y''. Имеем:

$$F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'.$$

Тогда

$$F(x, ty, ty', ty'') = x(ty)(ty'') - x(ty')^2 - (ty)(ty') =$$
$$= t^2(xyy'' - x(y')^2 - yy') = t^2 F(x, y, y', y'').$$

Т. е. уравнение действительно однородное относительно y, y', y''.

Полагаем $y' = yz$. Тогда для y'' будем иметь:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z').$$

Подставляя y' и y'' в уравнение, получаем:

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z,$$
$$\Rightarrow \quad x(z^2 + z') - xz^2 = z \quad (y \neq 0),$$
$$\Rightarrow \quad xz' = z,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad (z \neq 0,\ x \neq 0),$$
$$\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$
$$\Rightarrow \quad z = C_1x, \quad C_1 \neq 0.$$

Условие $x \neq 0$ не приводит к потери решения уравнения $xz' = z$. Условие $z \neq 0$ приводит к потере решения $z = 0$. Но это решение может быть включено в общее решение при $C_1 = 0$. Следовательно, получаем

$$z = C_1x, \ \forall C_1 \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = C_1x, \ \forall C_1;$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = C_1xdx;$$
$$\Rightarrow \quad \ln|y| = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \text{или} \quad y = e^{C_1\frac{x^2}{2} + C_2};$$
$$\Rightarrow \quad y = C_2 \cdot e^{C_1x^2}, \quad C_2 \neq 0.$$

Условие $y \neq 0$ приводит к потере решения $y = 0$, но оно может быть включено в общее решение при $C_2 = 0$.

Следовательно, окончательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_2 \cdot e^{C_1x^2}, \quad \forall C_1, C_2. \ \diamond$$

13.5. Уравнения, левая часть которых являетcя точной производной

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (13.4)$$

в котором левая часть является производной от некоторой функции переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (13.5)$$

Такое уравнение называют иначе ***уравнением в точных производных***.

Если уравнение является уравнением в точных производных, то его порядок легко понизить на единицу. Действительно, из (13.5) получаем

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

$$\Rightarrow \ \Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Уравнение $(n-1)$-го порядка $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C$ называют ***первым интегралом уравнения*** (13.4).

Если уравнение (13.4) не является уравнением в точных производных, то можно попытаться подобрать такую функцию $\mu(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, после умножения на которую уравнение станет уравнением в точных производных.

ПРИМЕР 13.7. Проинтегрировать уравнение $y'y''' - (y'')^2 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде $\frac{y'''}{y''} - \frac{y''}{y'} = 0$ (полагаем $y' \neq 0$, $y'' \neq 0$). Отсюда

$$\left(\ln|y''|\right)' - \left(\ln|y'|\right)' = 0,$$

$$\Rightarrow \ \left(\ln|y''| - \ln|y'|\right)' = 0.$$

Таким образом, левая часть уравнения является точной производной от функции $\Phi(x, y, y', y'') = \ln|y''| - \ln|y'|$. Тогда

$$\ln|y''| - \ln|y'| = \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

и первый интеграл заданного уравнения можно записать в виде

$$y'' = C_1 y', \text{ где } C_1 \neq 0.$$

Первый интеграл является дифференциальным уравнением второго порядка. Запишем его в виде

$$\frac{d(y')}{dx} = C_1 y' \qquad \text{или} \qquad \frac{dy'}{y'} = C_1 dx \ (y' \neq 0).$$

Отсюда находим

$$\ln|y'| = C_1 x + \widetilde{C}_2 \quad \text{или} \quad y' = \pm e^{C_1 x + \widetilde{C}_2},$$

$$\Rightarrow \quad y' = C_2 e^{C_1 x}, \text{ где } C_2 = \pm e^{\widetilde{C}_2} \neq 0.$$

Из уравнения $y' = C_2 e^{C_1 x}$ находим

$$dy = C_2 e^{C_1 x} dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_2 \cdot \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_3 = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + C_3, \text{ где } C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,\ \forall C_3.$$

В процессе интегрирования уравнения мы предполагали, что $y' \neq 0$ и $y'' \neq 0$. Условию $y' = 0$ удовлетворяют функции $y = C_3$, которые являются решениями уравнения и могут быть получены из общего решения при $C_2 = 0$. Условию $y'' = 0$ удовлетворяют функции $y = C_2 x + C_3$, которые тоже являются решениями уравнения, но из общего решения получены быть не могут. Следовательно, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y = C_2 \cdot \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_3 = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + C_3, \quad y = C_2 x + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, $\forall C_2, C_3$. ◇

§ 14. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

14.1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением*** n***-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции* y *и ее производных* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, *т. е. уравнение вида*

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = g(x), \qquad (14.1)$$

где $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ *и свободный член* $g(x)$ *– заданные функции аргумента* x *или постоянные, причем* $p_0(x) \neq 0$ *для всех* x *из той области, где рассматривается уравнение* (14.1).

Если правая часть $g(x) \equiv 0$, то уравнение (14.1) называется ***линейным однородным***, если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (14.1) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Если коэффициент $p_0(x)$ не равен нулю ни в одной точке некоторого отрезка $a \le x \le b$, то, разделив на $p_0(x)$, придем к так называемому ***приведенному уравнению*:**

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (14.2)$$

где $a_1(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad a_2(x) = \dfrac{p_2(x)}{p_0(x)}, \quad \ldots, \quad a_n(x) = \dfrac{p_n(x)}{p_0(x)}, \quad f(x) = \dfrac{g(x)}{p_0(x)}.$

В дальнейшем будем работать только с этим уравнением. Также в дальнейшем будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$. Тогда в области

$$D = \{(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \,\big|\, x \in [a;b], \ \forall y, y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (14.2) будут выполняться условия теоремы 12.1 существования и единственности решения и, следовательно, $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0, y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (14.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_{01}, \ y''(x_0) = y_{02}, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Линейные дифференциальные уравнения обладают рядом свойств, которые значительно облегчают их интегрирование. Но чтобы эти свойства сформулировать, необходимо вспомнить понятие линейного пространства, введенное раннее в курсе линейной алгебры.

14.2. Линейное пространство: основные определения и утверждения

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д.

Договоримся элементы из L обозначать малыми латинскими буквами, а числа – малыми греческими буквами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество L называется* ***линейным пространством над*** $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) *если для любых элементов $a, b, c \in L$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняются условия*:

1) $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения элементов из* L);
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность сложения элементов из* L);
3) *во множестве L существует такой элемент o, что $a + o = a$* (*элемент o называют* ***нулевым элементом множества*** L);
4) *для любого элемента $a \in L$ существует элемент $-a \in L$ такой, что $a + (-a) = o$* (*элемент $-a$ называют* ***противоположным к*** a);

5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (*ассоциативность относительно умножения чисел*);
6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (*дистрибутивность умножения на элемент из* L *относительно сложения чисел*);
7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (*дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из* L);
8) $1a = a$.

Наряду с термином «линейное пространство» используется также термин «*векторное пространство*», элементы линейного пространства принято называть ***векторами***. Линейное пространство над $\mathbb{R}$ называют ***вещественным*** *(действительными) линейным пространством*, а над $\mathbb{C}$ – ***комплексным***. В нашем курсе мы будем иметь дело с вещественными линейными пространствами.

В курсе линейной алгебры было показано, что линейными пространствами над $\mathbb{R}$ являются:

1) множество $M(m \times n, \mathbb{R})$ матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$;
2) множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) свободных векторов пространства (плоскости);
3) множество $\mathbb{R}^{n}$ последовательностей n действительных чисел (его называют ***арифметическим линейным пространством***, элементы множества $\mathbb{R}^{n}$ называют n***-мерными векторами***);
4) множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
5) множество $C[a,b]$ функций, непрерывных на $[a,b]$.

Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, L_1 – непустое подмножество в L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что* L_1 является **подпространством линейного пространства** L (*или линейным подпространством*), если *оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на* L.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.1 (критерий подпространства). *Пусть* L *– линейное пространство над* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, L_1 *– непустое подмножество в* L. L_1 *является подпространством линейного пространства* L *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a, b \in L_1$ *и любого* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *выполняются два условия*: 1) $a - b \in L_1$; 2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

С помощью теоремы 14.1 легко показать, например, что

1) множество $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства;
2) множество $\mathbb{R}^{n}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и имеющих степень меньше n является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
3) если система линейных однородных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ имеет нетривиальные решения, то множество $\mathcal{H}$ ее решений является подпространством арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^{n}$;
4) множество $C^{(n)}[a,b]$ n-раз непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций является подпространством линейного пространства $C[a,b]$.

Очень важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторы a_1, a_2, …, a_k называются* ***линейно зависимыми****, если существуют числа α_1, α_2, …, α_k, не все равные нулю и такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L.*

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы a_1, a_2, …, a_k называют ***линейно независимыми****.*

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 14.2 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов). *Векторы a_1, a_2, …, a_k линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

> *Замечание.* Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 14.2.

Рассматривая линейно независимые системы векторов, например, в пространстве $\mathbb{R}^{n}$, легко доказать, что они могут содержать не более n элементов. Это замечание приводит к следующему важному понятию в теории линейных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется* ***базисом*** *этого линейного пространства.*

Иначе говоря, векторы e_1, e_2, …, $e_n \in L$ образуют базис в линейном пространстве L если выполняются два условия:

1) e_1, e_2, …, e_n – линейно независимы;
2) e_1, e_2, …, e_n, a – линейно зависимы для любого вектора a из L.

Очевидно, что в линейном пространстве существует не единственный базис (например, легко доказать, что если e_1, e_2, …, e_n образуют базис в линейном пространстве L и α_1, α_2, …, α_n – отличные от нуля действительные числа, то векторы $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, …, $\alpha_n e_n$ тоже будут базисом). Но справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.3. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют ***конечномерным***, n называют ***размерностью*** *линейного пространства* (пишут: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему из n векторов, то пространство называют ***бесконечномерным*** (пишут: $\dim L = \infty$).

Конечномерными являются, например, линейные пространства $V^{(3)}$, $M(m \times n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ (размерности: $\dim V^{(3)} = 3$, $\dim M(m \times n, \mathbb{R}) = m \cdot n$, $\dim \mathbb{R}^{\mathrm{n}} = n$). Примером бесконечномерных линейных пространств являются $\mathbb{R}[x]$ и $C[a;b]$.

Роль базиса в линейном пространстве характеризует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.4 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Из теоремы 14.4 следует, что если в конечномерном линейном пространстве известен базис, то мы можем получить любой его вектор, т. е. дать полное описание этого линейного пространства.

Итак, мы вспомнили некоторые определения и утверждения теории линейных пространств. Теперь покажем, что множество решений линейного однородного уравнения порядка n образует конечномерное линейное пространство и определим его размерность.

14.3. Интегрирование линейных однородных уравнений n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (14.3)$$

Для его решений справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 14.5. *Если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения* (14.3), *то* $y_1(x) + y_2(x)$ *и* $C \cdot y_1(x)$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ *тоже является решениями уравнения* (14.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив функцию y_1+y_2 в уравнение (14.3) получим:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)\cdot(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\cdot(y_1+y_2)'+p_n(x)\cdot(y_1+y_2)=$$
$$=[y_1^{(n)}+p_1y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1'+p_ny_1]+$$
$$+[y_2^{(n)}+p_1y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_2'+p_ny_2]\equiv$$
$$\equiv 0+0\equiv 0.$$

Следовательно, функция y_1+y_2 также является решением уравнения (14.3).

Аналогично доказывается, что решением уравнения (14.3) будет и функция Cy_1, где C – произвольная постоянная. ■

СЛЕДСТВИЕ 14.6. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *– решения уравнения* (14.3), *то их линейная комбинация*

$$C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_n=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i \qquad (14.4)$$

тоже является решением уравнения (14.3) *для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пусть $S[a;b]$ – множество решений линейного однородного уравнения (14.3). Так как любое решение уравнения (14.3) является n раз непрерывно дифференцируемой функцией, определенной на $[a;b]$, то

$$S[a;b]\subset C^{(n)}[a;b],$$

где $C^{(n)}[a;b]$ – множество функций, n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 14.1, $S[a;b]$ является подпространством линейного пространства $C^{(n)}[a;b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S[a;b]$ конечномерное (докажем это утверждение позднее).

Рассмотрим систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $(n-1)$ раз дифференцируемых на некотором отрезке $[a;b]$. Составим для них определитель порядка n следующего вида

$$\boxed{W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.} \qquad (14.5)$$

Определитель (14.5) является функцией переменой x. Он обозначается $W(x)=W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W$ и называется ***определителем Вронского*** (или ***вронскианом***) функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Определитель Вронского играет важную роль при изучении линейной зависимости системы функций. А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.7 (необходимое условие линейной зависимости функций). *Если функции* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n-1$ *раз дифференцируемы и линейно зависимы на* $[a;b]$, *то их определитель Вронского на* $[a;b]$ *тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$. Тогда, по определению, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \quad \forall x \in [a;b].$$

Пусть, для определенности, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$y_1 = \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n, \quad \text{где } \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}.$$

Откуда получаем:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

(так как первый столбец определителя является линейной комбинацией остальных столбцов). ■

Теорема 14.7 дает необходимое условие линейной зависимости системы функций. Достаточным это условие для произвольной системы функций не будет, т. е. если $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$, то система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ может оказаться как линейно зависимой, так и линейно независимой. Так, например, легко проверить, что функции

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

являются линейно независимыми, и их вронскиан

$$W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0.$$

Но ситуация меняется, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения линейного однородного уравнения. Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.8 (условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения). *Если* n *решений* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейного однородного уравнения* (14.3) *линейно независимы на* $[a;b]$, *то определитель Вронского* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_0) = y_{20}, & \ldots, & y_n(x_0) = y_{n0}; \\ y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, & y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, & \ldots, & y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}. \end{array}$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{i0}, y_{i0}^{(k)}$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} + C_2 y_{20}^{(1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(1)} = 0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases} \tag{14.6}$$

Определитель матрицы $\mathbf{M}$ системы (14.6)

$$\det \mathbf{M} = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (14.6) имеет ненулевые решения.

Пусть $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ – одно из ненулевых решений системы (14.6). Функция $\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n$ в силу следствия (14.2) будет являться решением уравнения (14.3), причем

$\widetilde{y}(x_0) = 0$ (из 1-го уравнения системы (14.6)),

$\widetilde{y}'(x_0) = 0$ (из 2-го уравнения системы (14.6)),

……………………………………………….

$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из n-го уравнения системы (14.6)).

Но начальным условиям

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

удовлетворяет и тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причем среди коэффициентов $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \ ■$$

СЛЕДСТВИЕ 14.9 (теоремы 14.7 и 14.8). *Пусть* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *решения уравнения* (14.3). *Тогда их определитель Вронского либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* y_i *линейно зависимы; либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* y_i *линейно независимы.*

В свою очередь, следствие 14.9 позволяет доказать утверждение о конечномерности пространства $S[a;b]$.

ТЕОРЕМА 14.10. *Пространство решений* $S[a;b]$ *линейного однородного уравнения* (14.3) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т. е.*

$$\dim S[a;b] = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что для уравнения (14.3) можно найти n линейно независимых решений.

Пусть $\forall x_0 \in [a;b]$. Возьмем любой определитель порядка n, отличный от нуля. Например,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения имеем:

1) существует единственное решение $y_1(x)$, определенное в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ y_1''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

(где $1, 0, \ldots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) существует единственное решение $y_2(x)$, удовлетворяющее условию

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ y_2''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

(где $0, 1, \ldots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

....

n) существует единственное решение $y_n(x)$, удовлетворяющее условию

$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ y_n''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

(где $0, 0, \ldots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеем:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 14.9, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение линейного однородного дифференциального уравнения (14.3) может быть представлено как линейная комбинация n линейно независимых решений.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – некоторые линейно независимые решения уравнения (14.3), $\hat{y}(x)$ – решение уравнения (14.3), удовлетворяющее условиям

$$\hat{y}(x_0) = y_0, \quad \hat{y}'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad \hat{y}''(x_0) = y_0^{(2)}, \quad \ldots, \quad \hat{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} & + & C_2 y_{20} & + \ldots + & C_n y_{n0} & = & y_0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} & + & C_2 y_{20}^{(1)} & + \ldots + & C_n y_{n0}^{(1)} & = & y_0^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} & + & C_2 y_{20}^{(n-1)} & + \ldots + & C_n y_{n0}^{(n-1)} & = & y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{14.7}$$

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n-1})$.

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые решения уравнения (14.3), то для матрицы $\mathbf{M}$ системы имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (14.7) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n$. В силу следствия (14.6) она будет являться решением уравнения (14.3), причем

$$\widetilde{y}(x_0) = y_0 \text{ (из 1-го уравнения системы (14.7))},$$

$$\widetilde{y}'(x_0) = y_0^{(1)} \text{ (из 2-го уравнения системы (14.7))},$$

……………………………………………….

$$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \text{ (из } n\text{-го уравнения системы (14.7))}.$$

Но тем же самым начальным условиям удовлетворяет и решение $\hat{y}(x)$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного дифференциального уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n = \hat{y}(x). \ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (базис пространства $S[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений****.*

Таким образом, задача интегрирования линейного однородного уравнения n-го порядка сводится к отысканию фундаментальной системы его решений. Но сделать это для произвольного уравнения очень сложно. Фундаментальные системы решений удается найти лишь для некоторых простейших типов линейных однородных уравнений. Одним из таких типов являются линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

14.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \tag{14.8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа. Уравнение (14.8) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами.*** Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Вид уравнения (14.8) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (14.8) будем искать в виде

$$\boxed{y = e^{\lambda x},} \tag{14.9}$$

где λ – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (14.9) обращала уравнение (14.8) в тождество.
Для функции (14.9) имеем:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставим $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (14.8) и получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то решение (14.9) удовлетворяет уравнению, если

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \tag{14.10}$$

Уравнение (14.10) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (14.8), многочлен слева – ***характеристическим многочленом***, корни характеристического уравнения (14.10) – ***характеристическими корнями*** уравнения (14.8).

Замечание. Формально характеристическое уравнение получается из уравнения (14.8) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

Характеристическое уравнение (14.10) есть алгебраическое уравнение n-й степени. В алгебре доказывается, что такое уравнение имеет n корней, среди которых есть как действительные, так и комплексные числа (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Доказывается также, что комплексные корни такого уравнения попарно сопряжены. Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений уравнения (14.8). «Недостающие» решения позволяет найти следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.11. *Пусть* λ *– характеристический корень уравнения* (14.8). *Тогда*

1) *если* λ *– простой действительный корень уравнения* (14.10), *то решением уравнения* (14.8) *является функция* $e^{\lambda x}$;
2) *если* λ *– действительный корень кратности* k *уравнения* (14.10), *то решениями уравнения* (14.8) *являются функции*
$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2e^{\lambda x}, \quad \ldots \quad x^{k-1}e^{\lambda x};$$
3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– простой комплексный корень уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем характеристического уравнения, а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x;$$
4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– комплексный корень кратности* k *уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем характеристического уравнения кратности* k, *а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad x^2e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x.$$
$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad x^2e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n *решений уравнения* (14.8) *будут образовывать его фундаментальную систему решений.*

Для удобства запоминания этой теоремы и применения ее при интегрировании дифференциальных уравнений, составим таблицу, в которой отражается зависимость частных решений от вида характеристических корней.

Таблица 14.1

Вид корня	Решения из фундаментальной системы
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность 1	$y = e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность 1	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность k	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$, … $y_1 = x^{k-1} e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность k	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, ………, ………, $y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

Итак, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами необходимо:

1) записать его характеристическое уравнение;
2) найти характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
3) с помощью теоремы 14.11 (таблицы 14.1) найти частные линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$;
4) записать общее решение $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

ПРИМЕР 14.1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -3.$

Им соответствуют решения

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}, \quad y_3 = xe^{\lambda_3 x} = xe^{-3x}.$$

Так как это будет фундаментальная система решений, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 xe^{-3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 14.2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i$.

Тогда частными линейно независимыми решениями будут

$$y_1 = e^{2x}, \quad \underbrace{y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x}_{\text{так как } \alpha=0, \ \beta=2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_2 \sin 2x . \diamond$$

ПРИМЕР 14.3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0 .$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 8\lambda^4 + 8\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

или $\lambda \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \ \lambda_5 = 0$.

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{-x} \cos x, \qquad y_2 = xe^{-x} \cos x,$$

$$y_3 = e^{-x} \sin x, \qquad y_4 = xe^{-x} \sin x,$$

$$y_5 = e^{0 \cdot x} = 1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x\right) + C_5 . \diamond$$

14.5. Уравнения Эйлера

Еще одним типом линейных однородных дифференциальных уравнений, для которых можно найти фундаментальную систему решений, являются уравнения Эйлера.

Линейное однородное уравнение вида

$$\boxed{a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0} \qquad (14.11)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$), называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера заменой $x = e^t$ сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

Действительно, если $x = e^t$, то $y(x) = \widetilde{y}(t)$ и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\widetilde{y}'_t}{x'_t} = \frac{\widetilde{y}'_t}{e^t} = \widetilde{y}'_t \cdot e^{-t};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\widetilde{y}'_t \cdot e^{-t})'}{e^t} = \frac{\widetilde{y}''_t \cdot e^{-t} - \widetilde{y}'_t \cdot e^{-t}}{e^t} = (\widetilde{y}''_t - \widetilde{y}'_t) \cdot e^{-2t};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_x)'_t}{x'_t}=\frac{((\widetilde{y}''_t-\widetilde{y}'_t)\cdot e^{-2t})'}{e^t}=\frac{(\widetilde{y}'''_t-\widetilde{y}''_t)\cdot e^{-2t}+(\widetilde{y}''_t-\widetilde{y}'_t)\cdot(-2e^{-2t})}{e^t}=$$

$$=(\widetilde{y}'''_t-3\widetilde{y}''_t+2\widetilde{y}'_t)\cdot e^{-3t};$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi\left(\widetilde{y}_t^{(n)},\widetilde{y}_t^{(n-1)},\ldots,\widetilde{y}'_t\right)\cdot e^{-nt}.$$

Подставим $x=e^t$ и найденные выражения для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, … , $\frac{d^ny}{dx^n}$ в (14.11) и получим уравнение

$$a_0\widetilde{y}_t^{(n)}+b_1\widetilde{y}_t^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}\widetilde{y}'_t+b_n\widetilde{y}(t)=0. \qquad (14.12)$$

где $a_0,b_i\in\mathbb{R}$.

Так как (14.12) – линейное однородное с постоянными коэффициентами, то, согласно теореме 14.11, его фундаментальная система решений может содержать лишь функции вида

$$e^{\lambda t},\quad t^{\ell}e^{\lambda t},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Значит, фундаментальная система решений уравнения (14.11) будет состоять из функций вида:

$$e^{\lambda t}=x^{\lambda},\quad t^{\ell}e^{\lambda t}=(\ln^{\ell}x)\cdot x^{\lambda},$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t=x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad e^{\alpha t}\sin\beta t=x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),$$

$$t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t=(\ln^{\ell}x)\cdot x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t=(\ln^{\ell}x)\cdot x^{\alpha}\sin(\beta\ln x).$$

Замечание. На практике, при решении уравнения Эйлера, уравнение (14.12) не записывают. Записывают сразу его характеристическое уравнение. Это достаточно легко сделать. Действительно, характеристическое уравнение для (14.12) – это условие для λ, при котором функция $\widetilde{y}=e^{\lambda t}$ является решением уравнения (14.12). Но $e^{\lambda t}=x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получим, если потребуем, чтобы функция $y=x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (14.11).

ПРИМЕР 14.4. Найти общее решение уравнения

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$$

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную по формуле

$$x=e^t \quad\Rightarrow\quad t=\ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y=x^{\lambda}.$$

Тогда:

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}.$$

Подставляя выражения для y, y', y'', y''' в исходное уравнение, получаем:

$$x^3\underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}}_{y'''} - 3x^2\underbrace{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}}_{y''} + 6x\underbrace{\lambda x^{\lambda-1}}_{y'} - 6\underbrace{x^{\lambda}}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x^{\lambda}[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)[\lambda(\lambda-2) - 3\lambda + 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Им соответствуют решения

$$\widetilde{y}_1(t) = e^t, \quad \widetilde{y}_2(t) = e^{2t}, \quad \widetilde{y}_3(t) = e^{3t},$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^3.$$

Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3. \diamond$$

14.6. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами

Еще один случай, когда удается найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения – уравнение второго порядка, для которого известно одно из решений.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \qquad (14.13)$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (14.13). Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

$$\Rightarrow \quad y = y_1\left(C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1}\right) = y_1 \cdot u(x).$$

Найдем функцию $u(x)$. Имеем:

$$y' = y_1'u + y_1u', \quad y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Подставив эти выражения в уравнение (14.13) получим:

$$\underbrace{y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''}_{y''} + a_1(x)\cdot\underbrace{(y_1'u + y_1u')}_{y'} + a_2(x)\cdot\underbrace{y_1u}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) + u\cdot\underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_{0,\ \text{т.к. } y_1 \text{ – решение (14.13)}} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) = 0. \qquad (14.14)$$

Уравнение (14.14) не содержит искомой функции. Для его интегрирования введем новую функцию $z(x) = u'$. Тогда

$$z'\cdot y_1 + z\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{2y_1' + a_1(x)y_1}{y_1}dx \quad (\text{где } z \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = -\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(x)\right)dx + \widetilde{C}_1,$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = -2\ln|y_1| - \int a_1(x)dx + \widetilde{C}_1,$$

$$\Rightarrow \quad z = \pm\frac{1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx + \widetilde{C}_1},$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}, \quad \text{где } C_1 = \pm e^{\widetilde{C}_1} \neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $z = 0$. Оно может быть получено из общего при $C_1 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}, \quad \forall C_1.$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx} \qquad \text{или} \qquad du = \left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx,$$

$$\Rightarrow \quad u = \int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (14.13) имеет вид:

$$y = y_1 u = y_1\cdot\left(\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2\right).$$

ПРИМЕР 14.5. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, если известно, что его решением является функция $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $y = y_1\cdot u = \frac{\sin x}{x}\cdot u$. Тогда

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' \cdot u + \frac{\sin x}{x} \cdot u' = \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \cdot u + \frac{\sin x}{x} \cdot u';$$

$$y'' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)'' \cdot u + 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)' \cdot u' + \frac{\sin x}{x} \cdot u'' =$$

$$= \left(-\frac{\sin x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3}\right) \cdot u + 2\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \cdot u' + \frac{\sin x}{x} \cdot u''.$$

Подставим выражения для y, y', y'' в исходное уравнение и получим:

$$\underbrace{\left(-\frac{\sin x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3}\right) \cdot u + 2\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \cdot u' + \frac{\sin x}{x} \cdot u''}_{y''} +$$

$$+ \frac{2}{x}\underbrace{\left[\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \cdot u + \frac{\sin x}{x} \cdot u'\right]}_{y'} + \underbrace{\frac{\sin x}{x} \cdot u}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow \ \frac{\sin x}{x} \cdot u'' + 2\frac{\cos x}{x} \cdot u' = 0,$$

$$\Rightarrow \ \sin x \cdot u'' + 2\cos x \cdot u' = 0.$$

Так как полученное уравнение не содержит искомой функции, то его порядок можно понизить, сделав замену $z(x) = u'$. Тогда

$$\sin x \cdot z' + 2\cos x \cdot z = 0,$$

$$\Rightarrow \ \frac{dz}{z} = -2\operatorname{ctg} x dx \quad (\text{где } z \neq 0),$$

$$\Rightarrow \ \ln|z| = -2\ln|\sin x| + \ln \overline{C}_1, \quad \overline{C}_1 > 0,$$

$$\Rightarrow \ z = \frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x}, \ \text{ где } \widetilde{C}_1 = \pm\overline{C}_1 \neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $z = 0$, которое может быть получено из общего при $\widetilde{C}_1 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x}, \ \ \forall \widetilde{C}_1.$$

Учитывая, что $z(x) = u'$, получаем уравнение

$$u' = \frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x} \quad \text{или} \quad du = \frac{\widetilde{C}_1 dx}{\sin^2 x},$$

$$\Rightarrow \ u = -\widetilde{C}_1 \operatorname{ctg} x + C_2 = C_1 \operatorname{ctg} x + C_2, \ \text{ где } \ C_1 = -\widetilde{C}_1;$$

и общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = y_1 \cdot u = \frac{\sin x}{x} \cdot (\widetilde{C}_1 \operatorname{ctg} x + C_2) \quad \text{или} \quad y = \widetilde{C}_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}. \diamond$$

§ 15. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка

15.1. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (15.1)$$

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (15.2)$$

то можно найти и общее решение неоднородного уравнения (15.1).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (15.2). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \quad (15.3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i, \quad (15.4)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Для определения *n* неизвестных $C_i(x)$ есть пока только одно обязательное условие – функция (15.4) должна удовлетворять неоднородному уравнению (15.1). Следовательно, $(n-1)$ условие для выбора функций $C_i(x)$ можно задать произвольно, лишь бы полученная система условий оказалась совместной. Например, можно потребовать, чтобы *производные* $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *функции* (15.4) *структурно совпадали с производными функции* (15.3), *т. е. чтобы они получались из соответствующих производных функции* (15.3) *заменой констант* C_i *функциями* $C_i(x)$. Так как для функции (15.3)

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i',$$

а для функции (15.4)

$$y' = \left[C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1'\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n + C_n(x)y_n'\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i',$$

то такое требование приведет к первому произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0. \quad (a_1)$$

Далее, для функции (15.3)

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'',$$

а для функции (15.4) (при условии a$_1$)

$$y'' = \left[C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1''\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n' + C_n(x)y_n''\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'',$$

что приводит ко второму произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0. \qquad (a_2)$$

Продолжая этот процесс, в качестве $(n-1)$-го произвольного условия получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0. \qquad (a_{n-1})$$

Так как согласно нашим предположениям производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) имеют вид

$$y^{(k)} = C_1(x)y_1^{(k)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(k)} \;\; (k = \overline{1, n-1}),$$

то $$y^{(n)} = \left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_1(x)y_1^{(n)}\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n^{(n-1)} + C_n(x)y_n^{(n)}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)},$$

и из обязательного условия получаем:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}}_{y^{(n)}} + a_1(x)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + \ldots + a_n(x)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i}_{y} = f(x),$$

$$\Rightarrow \; \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\underbrace{\left[y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_i\right]}_{0} = f(x),$$

$$\Rightarrow \; \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x). \qquad (a_n)$$

Итак, требование, чтобы производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) получались из соответствующих производных функции (15.3) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$ дало для функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ условия (a$_1$), (a$_2$), …, (a$_n$), т. е. систему

$$
\begin{cases}
C_1'(x)y_1 & + & C_2'(x)y_2 & + \ldots + & C_n'(x)y_n & = & 0, \\
C_1'(x)y_1' & + & C_2'(x)y_2' & + \ldots + & C_n'(x)y_n' & = & 0, \\
C_1'(x)y_1'' & + & C_2'(x)y_2'' & + \ldots + & C_n'(x)y_n'' & = & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)} & + \ldots + & C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = & 0, \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)} & + \ldots + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{cases} \tag{15.5}
$$

Система (15.5) – система n линейных уравнений с n неизвестными. Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по теореме 14.8 их определитель Вронского отличен от нуля при любом x. Поэтому система (15.5) совместна и имеет единственное решение. Решая ее, находим

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \widetilde{C}_i,$$

где $\widetilde{C}_i$ – произвольные постоянные. Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \widetilde{C}_i\right) y_i . \tag{15.6}$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

ПРИМЕР 15.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = tg^2 x$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Его общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x .$$

Система для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ будет для данного уравнения иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = tg^2 x. \end{cases}$$

Из этой системы находим (например, по формулам Крамера)

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \qquad C_2'(x) = tg^2 x \cdot \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x$$

или

$$y = (C_1\cos x + C_2\sin x) + \left(\sin x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\right).\diamond$$

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения $x^2 y'' - xy' + y = 6x\ln x$.
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Введем новую переменную по формуле

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y = x^\lambda,$$

$$\Rightarrow \quad y' = \lambda x^{\lambda-1}, \qquad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Подставив y, y', y'' в однородное уравнение и сократив на x^λ, получим:

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Им соответствуют решения

$$\tilde{y}_1(t) = e^t, \qquad \tilde{y}_2(t) = te^t,$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x\ln x.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x.$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Прежде всего, запишем его в виде

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{6\ln x}{x}$$

(так как система (15.5) была получена для приведенного уравнения). Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$y = C_1(x) \cdot x + C_2(x) \cdot x \ln x,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – функции, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot x & + & C_2'(x) \cdot x \ln x & = & 0, \\ C_1'(x) & + & C_2'(x) \cdot (\ln x + 1) & = & \dfrac{6\ln x}{x}. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$D = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = x,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \dfrac{6\ln x}{x} & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = -6\ln^2 x, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{6\ln x}{x} \end{vmatrix} = 6\ln x,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{6\ln^2 x}{x}, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{6\ln x}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{6\ln^2 x}{x} dx = -2\ln^3 x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{6\ln x}{x} dx = 3\ln^2 x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = (-2\ln^3 x + C_1) \cdot x + (3\ln^2 x + C_2) \cdot x \ln x$$

или

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^3 x. \diamond$$

15.2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (15.6) и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \widetilde{C}_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i .$$

Заметим, что первая получившаяся сумма – общее решение соответствующего однородного уравнения, вторая – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $\widetilde{C}_i = 0$). Более того, оказалось, что в общем случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.1 (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка равно сумме общего решения* $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ *соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения* $\widetilde{y}$ *неоднородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \widetilde{y}(x) . \tag{15.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что

1) функция (15.7) является решением линейного неоднородного уравнения n-го порядка при любых значениях констант $C_1, \ldots, C_n$;
2) любое решение $\hat{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения n-го порядка может быть получено из (15.7) при некоторых значениях констант $C_1, \ldots, C_n$.

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, достаточно подставить (15.7) в линейное неоднородное уравнение:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \widetilde{y}(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \widetilde{y}(x)\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \widetilde{y}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{\left[y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_i(x)\right]}_{\substack{0 \\ (\text{т.к. } y_i - \text{решение однородного уравнения})}} +$$

$$+ \underbrace{\left[\widetilde{y}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \widetilde{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot \widetilde{y}(x)\right]}_{\substack{f(x) \\ (\text{т.к. } \widetilde{y} - \text{решение неоднородного уравнения})}} =$$

$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Докажем второе утверждение. Рассмотрим разность $\hat{y}(x) - \widetilde{y}(x)$. Эта функция будет являться решением однородного уравнения. Действительно,

$$\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]=$$
$$=\left[\hat{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\hat{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\hat{y}(x)\right]-$$
$$-\left[\tilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\tilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\tilde{y}(x)\right]=$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

Но если $\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)$ является решением линейного однородного уравнения, то она является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения. Т. е. существуют такие значения $\hat{C}_1,\ldots,\hat{C}_n$, что

$$\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x),$$
$$\Rightarrow\ \hat{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x)+\tilde{y}(x).\ \blacksquare$$

Таким образом, интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения можно свести к интегрированию соответствующего однородного уравнения и нахождению какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Однако обычно нахождение частного решения неоднородного уравнения представляет собой достаточно трудную задачу. Исключение составляют дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_s(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x\right],\qquad(15.8)$$

где $P_s(x), P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа. Функцию (15.8) принято называть ***функцией специального вида.*** Для таких уравнений удалось выяснить структуру частного решения. А именно, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.2 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида). *Если правая часть* $f(x)$ *линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид* (15.8), *то частное решение такого уравнения может быть найдено в виде*

$$\tilde{y}=x^{\ell}e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right],\qquad(15.9)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *– некоторые многочлены степени* m (*где* m *– большая из степеней многочленов* $P_s(x), P_k(x)$ *в правой части* $f(x)$), ℓ *– кратность характеристического корня* $\alpha\pm\beta i$ ($\ell=0$, *если число* $\alpha\pm\beta i$ *не является характеристическим корнем*).

ПРИМЕРЫ.

1. Если линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x) = P_s(x)$, то частное решение такого уравнения имеет вид:
   а) $\tilde{y} = R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\tilde{y} = x^\ell \cdot R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.
2. Если $f(x) = P_s(x)e^{\alpha x}$, то частное решение имеет вид:
   а) $\tilde{y} = R_s(x)e^{\alpha x}$, если число α не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\tilde{y} = x^\ell R_s(x)e^{\alpha x}$, если число α является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.
3. Если $f(x) = P_s(x)\cos\beta x + P_k(x)\sin\beta x$, (где один из многочленов $P_s(x)$ или $P_k(x)$ может быть равен нулю), то частное решение имеет вид:
   а) $\tilde{y} = R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x$, если число $\pm\beta i$ не является характеристическим корнем уравнения;
   б) $\tilde{y} = x^\ell\left[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right]$, если число $\pm\beta i$ является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.

Находя частное решение по теореме 15.2, многочлены $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ записывают с неопределенными коэффициентами, а затем определяют их, подставляя решение в дифференциальное уравнение.

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения
$$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}.$$
РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y = C_1e^x + C_2xe^x.$$
Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть является произведением числа и показательной функции e^{3x}:

$$f(x)=8e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \alpha=3,\ \beta=0,\ s=0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 3$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y}=Ae^{3x},$$

где A – неизвестный коэффициент.

Имеем: $\qquad \tilde{y}'=3Ae^{3x}, \quad \tilde{y}''=9Ae^{3x}.$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$9Ae^{3x}-2\cdot 3Ae^{3x}+Ae^{3x}=8e^{3x},$$

$$\Rightarrow \ 4Ae^{3x}=8e^{3x},$$

$$\Rightarrow \ 4A=8 \quad \text{или} \quad A=2.$$

Таким образом, $\tilde{y}=2e^{3x}$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=(C_1e^x+C_2xe^x)+2e^{3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 15.3. Найти общее решение уравнения

$$y''-3y'+2y=e^x(3-4x).$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''-3y'+2y=0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена первой степени и показательной функции e^x:

$$f(x)=e^x(3-4x) \quad \Rightarrow \ \alpha=1,\ \beta=0,\ s=1.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y}=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx),$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $\qquad \tilde{y}'=e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right],$

$$\tilde{y}''=e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+(2A+2B)\right].$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+(2A+2B)\right]-3e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right]+2e^x\left[Ax^2+Bx\right]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow\ e^x\big[(A-3A+2A)x^2+(4A+B-6A-3B+2B)x+(2A+2B-3B)\big]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow\ -2A\cdot x+(2A-B)=3-4x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-2A=-4,\\ 2A-B=3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=2,\quad B=1.$$

Таким образом, $\widetilde{y}=e^x\cdot x(2x+1)$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=(C_1e^x+C_2e^{2x})+xe^x(2x+1).\diamond$$

ПРИМЕР 15.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=4\cos 2x+\sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''+2y'+5y=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Правая часть уравнения $f(x)=4\cos 2x+\sin 2x$, т. е. $\alpha=0$, $\beta=2$, степени многочленов при синусе и косинусе $s=k=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\widetilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Имеем

$$\widetilde{y}'=2B\cos 2x-2A\sin 2x,\qquad \widetilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим $\widetilde{y},\widetilde{y}',\widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)+2(2B\cos 2x-2A\sin 2x)+5(A\cos 2x+B\sin 2x)=$$
$$=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (-4A+4B+5A)\cdot\cos 2x+(-4B-4A+5B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (A+4B)\cdot\cos 2x+(-4A+B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}A+4B=4,\\ -4A+B=1;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=0,\quad B=1.$$

Таким образом $\widetilde{y}=\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\sin 2x.\diamond$$

ПРИМЕР 15.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = \cos x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$[-A\cos x + B\sin x] - [A\cos x + B\sin x] = \cos x,$$

$$\Rightarrow \ -2A\cos x - 2B\sin x = \cos x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1, \\ 2B = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Таким образом, $\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x. \ \diamond$$

ПРИМЕР 15.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \cos x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x),$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $$\widetilde{y}' = [A\cos x + B\sin x] + x\cdot[-A\sin x + B\cos x],$$

$$\widetilde{y}'' = 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x].$$

Подставим $\widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x] + x\cdot[A\cos x + B\sin x] = \cos x,$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] = \cos x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 0, \\ 2B = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow\ A = 0,\quad B = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\widetilde{y} = \dfrac{x}{2}\sin x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x. \ \diamond$$

При нахождении частных решений линейного неоднородного уравнения часто оказывается полезной следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.3 (о наложении решений). *Если $\widetilde{y}_1(x)$ и $\widetilde{y}_2(x)$ – частные решения уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

соответственно, то функция $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x). \quad (15.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедится в справедливости теоремы, достаточно подставить функцию $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ в уравнение (15.10):

$$[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n)} + a_1(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]' + a_n(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2] =$$

$$=\left[\widetilde{y}_1^{(n)}+a_1(x)\cdot\widetilde{y}_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_1'+a_n(x)\cdot\widetilde{y}_1\right]+$$
$$+\left[\widetilde{y}_2^{(n)}+a_1(x)\cdot\widetilde{y}_2^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_2'+a_n(x)\cdot\widetilde{y}_2\right]=$$
$$=f_1(x)+f_2(x).\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 15.7. Найти общее решение уравнения
$$y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2.$$
РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-8=0$ имеет корни $\lambda_1=2$ и $\lambda_{2,3}=\pm 2i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид
$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$$

Правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но она состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид. Обозначим $f_1(x)=e^{2x}\sin 2x$, $f_2(x)=2x^2$ и найдем частные решения $\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2$ неоднородных уравнений
$$y'''-2y''+4y'-8y=f_1(x) \quad \text{и} \quad y'''-2y''+4y'-8y=f_2(x).$$
Тогда частное решение $\widetilde{y}$ исходного уравнения будет равно сумме этих частных решений, т. е.
$$\widetilde{y}=\widetilde{y}_1+\widetilde{y}_2.$$

1) $f_1(x)=e^{2x}\sin 2x$, т. е. $s=0$, $\alpha=2$, $\beta=2$, $\alpha\pm\beta i=2\pm 2i$. Так как число $\alpha\pm\beta i=2\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ следует искать в виде
$$\widetilde{y}_1=e^{2x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$
Имеем:
$$\widetilde{y}_1'=2e^{2x}\left[(A+B)\cos 2x+(B-A)\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1''=8e^{2x}\left[B\cos 2x-A\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1'''=16e^{2x}\left[(B-A)\cos 2x+(-A-B)\sin 2x\right].$$
Подставим $\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_1',\widetilde{y}_1'',\widetilde{y}_1'''$ в уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим
$$e^{2x}\cdot\left[(8B-16A)\cos 2x+(-8A-16B)\sin 2x\right]=e^{2x}\sin 2x,$$
$$\Rightarrow\ (8B-16A)\cos 2x+(-8A-16B)\sin 2x=0\cdot\cos 2x+\sin 2x,$$
$$\Rightarrow\ \begin{cases}8B-16A=0,\\ -16B-8A=1;\end{cases}\quad\Rightarrow\ B=-\frac{1}{20},\quad A=-\frac{1}{40},$$
$$\Rightarrow\ \widetilde{y}_1=e^{2x}\left(-\frac{1}{40}\cos 2x-\frac{1}{20}\sin 2x\right)=-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right).$$

2) $f_2(x) = 2x^2$, т. е. правая часть представляет собой многочлен степени $s = 2$, $\alpha = \beta = 0$. Так как число $\alpha \pm \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}_2 = Ax^2 + Bx + C.$$

Имеем $$\tilde{y}_2' = 2Ax + B, \quad \tilde{y}_2'' = 2A, \quad \tilde{y}_2''' = 0.$$

Подставим $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2'', \tilde{y}_2'''$ в неоднородное уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим:

$$-8Ax^2 + 8(A-B)x - 4(A - B + 2C) = 2x^2,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A = 2, \\ A - B = 0, \\ A - B + 2C = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}_2 = -\frac{1}{4}(x^2 + x).$$

Итак, частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = -\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) - \frac{1}{4}(x^2 + x),$$

а его общее решение

$$y = \left(C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x\right) - \frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) - \frac{1}{4}(x^2 + x). \diamond$$

§ 16. Понятие краевой задачи

Решая дифференциальные уравнения, мы получаем множество решений. Чтобы выделить из этого множества одно решение, дополнительно задают условия. До сих пор мы имели дело лишь с задачей Коши, т.е. условием выбора решения являлось значение функции и ее производных в некоторой точке. Но в дифференциальных уравнениях, наряду с задачей Коши приходится решать и так называемые краевые (или граничные) задачи. В этих задачах условием выбора решения является значение искомой функции (или значение линейной комбинации искомой функции и ее производных) на концах отрезка, на котором это решение рассматривается.

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения, отвечающего краевой задаче, то для решения самой задачи надо из граничных условий определить значения произвольных постоянных, входящих в общее решение. При этом решение не всегда существует, а если существует, то не всегда единственное.

ПРИМЕР 16.1. На отрезке $[0; x_1]$ найти решение уравнения

$$y'' + y = 0, \tag{16.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1.$$

РЕШЕНИЕ. Общее решение уравнения (16.1) имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из первого граничного условия получаем $C_1 = 0$, поэтому

$$y = C_2 \sin x.$$

Второе граничное условие для функции $y = C_2 \sin x$ дает равенство

$$y_1 = C_2 \sin x_1. \tag{16.2}$$

Рассмотри равенство (16.2). Возможны три случая.

1) Если $x_1 \neq n\pi$, где n – целое число, то $\sin x_1 \neq 0$, и из (16.2), находим

$$C_2 = \frac{y_1}{\sin x_1}.$$

Следовательно, при $x_1 \neq n\pi$ существует единственное решение краевой задачи, а именно

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x.$$

2) Если $x_1 = n\pi$ и $y_1 = 0$, то равенство (16.2) справедливо при любом C_2. Значит, в этом случае имеется бесконечно много решений $y = C_2 \sin x$ рассматриваемой краевой задачи.
3) Если $x_1 = n\pi$ и $y_1 \neq 0$, то равенство (16.2) невозможно ни при каком C_2. Следовательно, в этом случае решения краевой задачи не существует. ◇

Помимо граничных условий, рассмотренных в этом примере 16.1, могут быть и другие граничные условия. Например,

$$y'(x_1) = y_1, \quad y'(x_2) = y_2$$

или

$$\alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = y_1, \quad \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = y_2,$$

где x_i, y_i, α_i, β_i – заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ ($i = 1,2$).

Рассмотрим еще одну краевую задачу, которая может иметь различные решения в зависимости от входящего в нее параметра.

ПРИМЕР 16.2. На отрезке $[0; \ell]$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0, \tag{16.3}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0, \; y(\ell) = 0$$

(ℓ – фиксированное число).

РЕШЕНИЕ. При любом λ эта задача имеет очевидное решение $y \equiv 0$ (его называют ***тривиальным решением***). Поэтому логично задать вопрос: существуют ли такие значения параметра λ, при которых рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальные решения? Выясним это.

Уравнение (16.3) – линейное однородное с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda = 0. \tag{16.4}$$

Такое уравнение может иметь корни трех видов. Они соответствуют случаям: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda = 0$; в) $\lambda > 0$.

Пусть $\lambda < 0$. Тогда характеристическое уравнение (16.4) имеет два простых действительных корня $k_1 = -\sqrt{-\lambda}$, $k_2 = \sqrt{-\lambda}$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda} x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$ и рассматриваемая краевая задача имеет только тривиальное решение $y \equiv 0$.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда характеристическое уравнение (16.4) имеет кратный действительный корень $k_{1,2} = 0$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 + C_2 \ell = 0. \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$ и рассматриваемая краевая задача снова имеет только тривиальное решение $y \equiv 0$.

Пусть $\lambda > 0$. В этом случае характеристическое уравнение (16.4) имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\ell) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\ell) & \sin(\sqrt{\lambda}\ell) \end{vmatrix} = \sin(\sqrt{\lambda}\ell).$$

Так как этот определитель может обращаться в ноль, то система может иметь нетривиальные решения. Имеем:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\ell = \pi k,\ k = 1,2,3,\ldots$$

(k – натуральное, а не целое, так как $\sqrt{\lambda}\ell > 0$),

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2,\ k = 1,2,3,\ldots$$

Найденным таким образом значениям λ_k будут соответствовать нетривиальные решения

$$y_k = C_2 \sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right), \quad \forall C_2.$$

Рассмотренная нами задача нахождения значений параметра λ и соответствующих им нетривиальных решений краевой задачи для уравнения (16.3) представляет собой частный случай так называемой задачи Штурма – Лиувилля, которая часто возникает в уравнениях математической физики.

Уравнением Штурма – Лиувилля *называется дифференциальное уравнение вида*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\cdot y = -\lambda\cdot\rho(x)\cdot y, \qquad (16.5)$$

где функции $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$ *всюду на некотором интервале* $(x_1; x_2)$, *причём* $\rho(x)$ *является ограниченной функцией.*

Говорят, что *решение* $y(x)$ *уравнения* (16.4) *удовлетворяет на конце интервала* $(x_1; x_2)$ *краевому (или граничному) условию первого, второго, третьего или четвёртого рода, если функция* $y(x)$ *удовлетворяет в точке* $x = x_i$ $(i = 1,2)$ *соответственно условию*:

1) $y(x_i)=0$;
2) $y'(x_i)=0$;
3) $y'(x_i)+\beta y(x_i)=0, \quad \beta>0$;
4) *функция* $y(x)$ *ограничена при* $x\to x_1+o$ (*при* $x\to x_2-o$).

Краевые условия первого, второго или третьего рода ставятся в точке x_i только тогда, когда функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определены и непрерывны не только на интервале $(x_1;x_2)$, но и в точке x_i, причём $p(x_i)\neq 0$. Краевое условие четвёртого рода ставится в точке $x_1(x_2)$ только тогда, когда $\rho(x)\to 0$ при $x\to x_1+o(x\to x_2-o)$.

Значения λ, *для которых уравнение Штурма – Лиувилля имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, называют* ***собственными значениями*** (*или* ***собственными числами***) *данной краевой задачи. Нетривиальные (отличные от* $y\equiv 0$*) решения, соответствующие собственным значениям* λ, *называются* ***собственными функциями*** (*или* ***собственными решениями***).

Задача нахождения всех собственных чисел и собственных функций уравнения Штурма – Лиувилля при краевых условиях 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типов на концах интервала $(x_1;x_2)$ *называется* ***задачей Штурма – Лиувилля***.

В связи с тем, что задача Штурма – Лиувилля играет важную роль в уравнениях математической физики, отметим некоторые интересные свойства ее собственных чисел и собственных функций. А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 16.1. *Пусть для уравнения* (16.4) *на интервале* $(x_1;x_2)$ *заданы краевые условия 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типа. Тогда собственные числа и собственные функции этой краевой задачи обладают следующими свойствами:*

1) *собственные числа образуют бесконечную возрастающую последовательность:* $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$;
2) *все собственные числа неотрицательны; каждому собственному числу соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция; каждой собственной функции отвечает только одно собственное число;*
3) *собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на интервале* $(x_1;x_2)$ *с весом* $\rho(x)$, *т. е.*

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\cdot y_k(x)\cdot y_m(x)dx=0, \quad k\neq m.$$

ПРИМЕР 16.3. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + \lambda\, y = 0$ $\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$, удовлетворяющие граничным условиям $y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Так как характеристическое уравнение в данной задаче такое же как и в примере 16.2, выделяем три случая: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda = 0$; в) $\lambda > 0$. В первых двух случаях получаем только тривиальные решения $y \equiv 0$. В последнем случае ($\lambda > 0$) общее дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2}, \\ 0 = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \sqrt{\lambda} \cos\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2}. \end{cases} \tag{16.6}$$

Система (16.6) будет иметь нетривиальные решения, если ее определитель равен нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} & \sin\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} \\ -\sqrt{\lambda} \sin\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} & \sqrt{\lambda} \cos\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\lambda}\left[\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cos\frac{3\sqrt{\lambda}}{2} + \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{3\sqrt{\lambda}}{2}\right] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\lambda} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \cos\sqrt{\lambda} = 0 \quad (\text{так как } \sqrt{\lambda} > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Откуда находим собственные значения

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Найдем собственные функции, соответствующие найденным собственным значениям. Для этого необходимо найти общее решение системы

(16.6) если $\lambda = \lambda_k$. В качестве свободной переменной можно выбрать, например, C_2. Тогда из первого уравнения системы (16.6) находим:

$$C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -C_2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} = -C_2 tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Подставляем выражение для C_1 в общее решение и получаем, что собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k имеют вид

$$y_k(x) = -C_2 tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$$

или

$$y_k(x) = C\left[-tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right], \quad \forall C. \diamond$$

ПРИМЕР 16.4. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$ $(0 \le x \le 1)$, удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = y'(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Из характеристического уравнения получаем, что необходимо рассмотреть два случая: а) $\lambda = 0$, б) $\lambda > 0$.

а) Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения $y(x) = C_1 + C_2 x$. Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 0 = C_2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, при $\lambda = 0$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

б) Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x).$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1\lambda \sin(\lambda x) + C_2\lambda \cos(\lambda x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\lambda + C_2 \sin\lambda, \\ 0 = -C_1 \cdot \lambda \cdot 0 + C_2 \cdot \lambda \cdot 1. \end{cases}$$

Так как $\lambda > 0$ отсюда находим

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\lambda, \\ 0 = C_2. \end{cases}$$

Нетривиальные решения эта система будет иметь если $\cos\lambda = 0$.

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Подставляем найденные λ_k и $C_2 = 0$ в общее решение и получаем, что соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_k(x) = C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, \quad \forall C. \diamond$$

ПРИМЕР 16.5. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + 4y' + \lambda y = 0$ $(0 \le x \le \ell)$, удовлетворяющие граничным условиям $y'(0) = y'(\ell) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 + 4k + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; k = -2 \pm \sqrt{4-\lambda}.$$

Следовательно, необходимо рассматривать три случая: а) $\lambda < 4$, б) $\lambda = 4$, в) $\lambda > 4$.

а) Если $\lambda < 4$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})x}.$$

Тогда

$$y'(x) = (-2-\sqrt{4-\lambda})C_1 e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})x} + (-2+\sqrt{4-\lambda})C_2 e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})x}$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 = (-2-\sqrt{4-\lambda})C_1 + (-2+\sqrt{4-\lambda})C_2, \\ 0 = (-2-\sqrt{4-\lambda})e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})\ell}C_1 + (-2+\sqrt{4-\lambda})e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})\ell}C_2. \end{cases}$$

Эта система имеет только тривиальное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (-2-\sqrt{4-\lambda}) & (-2+\sqrt{4-\lambda}) \\ (-2-\sqrt{4-\lambda})\cdot e^{(-2-\sqrt{16-\lambda})\ell} & (-2+\sqrt{4-\lambda})\cdot e^{(-2+\sqrt{16-\lambda})\ell} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(-2-\sqrt{4-\lambda})\cdot(-2+\sqrt{4-\lambda})}_{4-(\sqrt{4-\lambda})^2 = \lambda > 4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-2-\sqrt{4-\lambda}\cdot\ell} & e^{-2+\sqrt{4-\lambda}\cdot\ell} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Следовательно, при $\lambda < 4$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

б) Если $\lambda = 4$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Тогда

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 - 2C_2, \\ 0 = -2C_1 e^{-2\ell} - 2C_2 e^{-2\ell} + C_2 e^{-2\ell}; \end{cases}$$

которая имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda = 4$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

в) Пусть $\lambda > 4$. В этом случае $k = -2 \pm \sqrt{4-\lambda} = -2 \pm i\sqrt{\lambda - 4}$ и общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{\lambda-4}\,x) + C_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{\lambda-4}\,x).$$

Тогда

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\,x) - C_1\sqrt{\lambda-4}e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\,x) -$$
$$-2C_2 e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\,x) + C_2\sqrt{\lambda-4}e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\,x)$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$y'(x) = [-2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}]\cdot e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\cdot x) + [-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4}]\cdot e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = (-2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4})\cos(\ell\sqrt{\lambda-4}) + (-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4})\sin(\ell\sqrt{\lambda-4}). \end{cases} \tag{16.8}$$

(Во втором уравнении сократили на общий множитель $e^{-2\ell}$).

Заметим, что во втором уравнении системы (16.8) слагаемое

$$(-2C_1 + \sqrt{\lambda-4}C_2)\cos(\ell\cdot\sqrt{\lambda-4}) = 0$$

(из первого уравнения системы). Тогда

$$(-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4})\cdot\sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell) = 0,$$

$$-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4} = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell) = 0.$$

Следовательно, система (16.8) распадается на две:

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = -2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell). \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = -2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4}. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & \sqrt{\lambda-4} \\ -\sqrt{\lambda-4} & -2 \end{vmatrix} = 4 + (\sqrt{\lambda-4})^2 = \lambda \neq 0$$

и, следовательно, она имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell). \end{cases}$$

Из ее второго уравнения находим

$$\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell=\pi k\,,\quad k=1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_k=\frac{\pi^2k^2}{\ell^2}+4\,,\quad k=1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Тогда из первого уравнения системы

$$C_1=C_2\frac{\sqrt{\lambda-4}}{2}\,,$$

$$\Rightarrow\quad C_1=C_2\cdot\frac{\pi k}{2\ell}\,.$$

Таким образом, найденным собственным значениям $\lambda_k=\dfrac{\pi^2k^2}{\ell^2}+4$ ($k=1,2,3,\ldots$) соответствуют собственные функции

$$y_k(x)=C_2\cdot\frac{\pi k}{2\ell}\cdot e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda_k-4}\,x)+C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda_k-4}\,x)$$

или

$$y_k(x)=C\left[\frac{\pi k}{2\ell}\cos\frac{\pi kx}{\ell}+\sin\frac{\pi kx}{\ell}\right]\cdot e^{-2x}\,,\quad \forall C\,.\ \diamond$$

ПРИМЕР 16.6. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y''-8y'-\lambda y=0$ $(0\le x\le 1)$, удовлетворяющие граничным условиям $y'(0)=y'(1)=0$.

> *Замечание*. Уравнение в примере 16.6 не является уравнением Штурма – Лиувилля, т.к. оно получено из уравнения вида
>
> $$\frac{d}{dx}\left(e^{-8x}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=\lambda\cdot y\,.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2-8k-\lambda=0\qquad\Rightarrow\qquad k_{1,2}=4\pm\sqrt{16+\lambda}\,.$$

Следовательно, необходимо рассматривать три случая: а) $\lambda>-16$, б) $\lambda=-16$, в) $\lambda<-16$.

а) Если $\lambda>-16$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{(4-\sqrt{16+\lambda})x}+C_2e^{(4+\sqrt{16+\lambda})x}\,.$$

Тогда

$$y'(x)=(4-\sqrt{16+\lambda})C_1e^{(4-\sqrt{16+\lambda})x}+(4+\sqrt{16+\lambda})C_2e^{(4+\sqrt{16+\lambda})x}\,.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases}0\ =\ (4-\sqrt{16+\lambda})C_1\ +\ (4+\sqrt{16+\lambda})C_2\,,\\ 0\ =\ (4-\sqrt{16+\lambda})e^{4-\sqrt{16+\lambda}}C_1\ +\ (4+\sqrt{16+\lambda})e^{4+\sqrt{16+\lambda}}C_2\,.\end{cases}$$

Ее определитель:

$$\begin{vmatrix} (4-\sqrt{16+\lambda}) & (4+\sqrt{16+\lambda}) \\ (4-\sqrt{16+\lambda})\cdot e^{4-\sqrt{16+\lambda}} & (4+\sqrt{16+\lambda})\cdot e^{4+\sqrt{16+\lambda}} \end{vmatrix} =$$

$$=(4-\sqrt{16+\lambda})\cdot(4+\sqrt{16+\lambda})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{4-\sqrt{16+\lambda}} & e^{4+\sqrt{16+\lambda}} \end{vmatrix} =$$

$$=\left[16-(\sqrt{16+\lambda})^2\right]\cdot\left(e^{4+\sqrt{16+\lambda}}-e^{4-\sqrt{16+\lambda}}\right)=-\lambda\cdot\underbrace{\left(e^{4+\sqrt{16+\lambda}}-e^{4-\sqrt{16+\lambda}}\right)}_{\neq 0}.$$

Следовательно, нетривиальное решение система имеет только при $\lambda=0$.

Полагая $\lambda=0$, находим:

$$y(x)=C_1+C_2e^{8x},$$

$$\Rightarrow\quad y'(x)=8C_2e^{8x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим

$$\begin{cases} y'(0)=8C_2e^0=0, \\ y'(1)=8C_2e^8=0. \end{cases}$$

Откуда получаем $C_2=0$ и, следовательно, искомое нетривиальное решение имеет вид

$$y_0(x)=C,\quad \forall C\neq 0.$$

б) Если $\lambda = 16$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$$

Тогда

$$y'(x)=4C_1e^{4x}+4C_2xe^{4x}+C_2e^{4x}.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0=4C_1+4C_2, \\ 0=4C_1e^4+4C_2e^4+C_2e^4; \end{cases}$$

которая имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda = 16$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

в) Пусть $\lambda<-16$. В этом случае $k=4\pm\sqrt{16+\lambda}=4\pm i\sqrt{-\lambda-16}$ и общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x)+C_2e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x).$$

Тогда

$$y'(x)=4C_1e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x)-C_1\sqrt{-\lambda-16}e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x)+$$
$$+4C_2e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x)+C_2\sqrt{-\lambda-16}e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x)$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$y'(x)=[4C_1+C_2\sqrt{-\lambda-16}]e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}x)+[4C_2-C_1\sqrt{-\lambda-16}]e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = (4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16})\cos\sqrt{-\lambda-16} + (4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16})\sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases} \tag{16.7}$$

(Во втором уравнении сократили на общий множитель e^4).

Заметим, что во втором уравнении системы (16.7) слагаемое

$$(4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16})\cos\sqrt{-\lambda-16} = 0$$

(из первого уравнения системы). Тогда

$$(4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16}) \cdot \sin\sqrt{-\lambda-16} = 0,$$

$$4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16} = 0 \quad \text{или} \quad \sin\sqrt{-\lambda-16} = 0.$$

Следовательно, система (16.7) распадается на две:

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = 4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = \sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = 4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{-\lambda-16} \\ -\sqrt{-\lambda-16} & 4 \end{vmatrix} = 16 + (\sqrt{-\lambda-16})^2 = -\lambda \neq 0$$

и, следовательно, она имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = \sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Из ее второго уравнения находим

$$\sqrt{-\lambda-16} = \pi k, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \ \lambda_k = -(\pi^2 k^2 + 16), \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Тогда из первого уравнения системы

$$C_1 = -C_2\frac{\sqrt{-\lambda-16}}{4}, \quad \Rightarrow \ C_1 = -C_2 \cdot \frac{\pi k}{4}.$$

Таким образом, найденным собственным значениям $\lambda_k = -(\pi^2 k^2 + 16)$ ($k = 1,2,3,\ldots$) соответствуют собственные функции

$$y_k(x) = -C_2 \cdot \frac{\pi k}{4} \cdot e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda_k - 16}\,x) + C_2 e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda_k - 16}\,x)$$

или $$y_k(x) = C\left[-\frac{\pi k}{4}\cos\pi kx + \sin\pi kx\right] \cdot e^{4x}, \quad \forall C. \ \diamond$$