Контрольная работа по теме «Элементы теории линейных пространств и линейных операторов»

Примерный вариант

1. Относительно базиса $e_1 = \{1,0,0\}$, $e_2 = \{0,1,0\}$, $e_3 = \{0,0,1\}$ даны четыре вектора: $f_1 = \{3,2,-4\}$, $f_2 = \{4,1,-2\}$, $f_3 = \{5,2,-3\}$, $x = \{9,5,-8\}$.

   а) Доказать, что f_1, f_2, f_3 можно принять за новый базис.

   б) Записать матрицу перехода от базиса e_i к базису f_i, и наоборот, от базиса f_i к базису e_i. Сделать проверку.

   в) Найти координаты вектора x в базисе f_i.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

   $\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}^2\mathrm{e}^{\mathbf{x}}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

   $\varphi\mathbf{x} = (4x_1 - 5x_2 + 2x_3,\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3,\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3)$.

   а) Найти матрицу оператора в стандартном базисе

   пространства $\mathbb{R}^3$.

   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым.

   Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из

   собственных векторов.