ВАРИАНТ 16

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & 12 & -3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-3\mathbf{A} + \mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -6 & 6 & -8 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 3x_5 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 10x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\0&0&0&3\\1&0&3&0\\0&-2&0&-5\end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3,\overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{1;-1;-3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{-1;1;-3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{-3;-3;-3\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{-1;-1;-2\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 16

1. а) 5; б) 100; в) – 9.

2. а) $\begin{pmatrix}1&2&0\\-9&-11&4\\0&3&-7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-13&-13&-6\\-2&8&13\\-8&-4&5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}7&-1&-2\\-4&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}-28&93\\38&-126\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&2&-4\\4&-1&0\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}-7&-16&20\\20&-13&48\\-8&-26&25\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

8. а) $X=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}23-3x_5\\-34+3x_5\\17-3x_5\\1\\3x_5\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$. **.9.** а) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$;

б) $X=\begin{pmatrix}-x_3-\frac{1}{3}x_4\\x_3-\frac{4}{3}x_4+x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}-1/3\\-4/3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1=0, x=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}; \lambda_2=2, x=\beta\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}; \lambda_3=5, x=\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \lambda_2=2,\ x=\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix};$

$\lambda_3=-2,\ x=\gamma\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\2\end{pmatrix};\ \lambda_4=-3,\ x=\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\dfrac{1}{6}\{1;1;2\}$.

ВАРИАНТ 17

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 0 \\ 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 11 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = -25, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 7x_4 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{3;5;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-4;-3;-2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{4;4;2\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{7;11;4\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 17

1. а) 1; б) 24; в) 14.

2. а) $\begin{pmatrix} -2 & 21 & -12 \\ 6 & 19 & -16 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & -87 & -2 \\ 27 & -23 & -42 \\ -8 & -14 & 14 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 \\ 18 & 11 & 9 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} -46 - x_4 \\ 95 + x_4 \\ -44 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **9.** а) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $X=\begin{pmatrix} -3x_3 - 3x_4 \\ -2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = -2,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3,\ x = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 6,\ x = \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2,\ x = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = -2,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_4 = -3,\ x = \delta\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\{-1;6;8.5\}$.

ВАРИАНТ 18

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 16 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 30 \\ 18 & -2 & 38 \\ 13 & -1 & 25 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 3x - 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + 4x_5 + 7x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 3x_5 + 6x_6 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{1;2;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{2;3;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{3;-1;-4\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{7;6;3\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 18

1. а) – 5; б) 0; в) – 160.

2. а) $\begin{pmatrix}1 & 5 & -15\\ 3 & -11 & -27\\ -5 & 7 & -15\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}6 & -3 & 8\\ 13 & -18 & -19\\ 10 & -9 & 12\end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 5 & 0 & 7\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}-14 & -2 & 6\\ 16 & 0 & -18\\ -16 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 36 & 0 & 0 \\ 15 & 32 & 78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 13 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 3 - x_3 + 2x_5 \\ 1 - x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ -1 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$. **9.** а) $X = \begin{pmatrix} -11x_4 \\ -12x_4 \\ -9x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} 23x_4 - x_5 \\ -34x_4 + x_5 \\ 17x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \\ 3x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 23 \\ -34 \\ 17 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_{1,2} = 2,\ x = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -7,\ x = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1,\ x = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = 2,\ x = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_4 = 3,\ x = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\mathrm{x}} = \{2;1;1\}$.

ВАРИАНТ 19

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 3 & 0 & -4 \\ 11 & 5 & 2 & -4 \\ 7 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 20 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 38 \\ 31 & 41 & 85 \\ 25 & 33 & 68 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix},\qquad \text{б)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&1&0&2\\1&0&-1&0\\0&-1&0&4\end{pmatrix}.$$

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3,\overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{3;1;4\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{2;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{1;-1;5\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{5;0;3\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 19

1. а) 107; б) 18; в) – 24.

2. а) $\begin{pmatrix}-11&-3&15\\-7&8&9\\6&23&-4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}8&7&0\\21&-1&-9\\27&-2&-7\end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-17&21&-12\\8&-10&6\\-5&7&-4\end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}10&-3\\25/2&-11/2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}7&0&2\\5&3&1\\-3&2&2\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2x_4 + 4 \\ 3 - 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9. а) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; б) Общее решение: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(19x_3 + 3x_4 - 4x_5) \\ \frac{1}{8}(7x_3 - 25x_4 + 4x_5) \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 9/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -4/8 \\ 4/8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_{2,3,4} = 2,\ x = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2,\ x = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = -2,\ x = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_4 = 3,\ x = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\mathrm{x}} = \{-1;3;2\}$

ВАРИАНТ 20

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 1 & 8 & -7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -7 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -4 \\ 1 & 0{,}5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{3;-3;0\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{-3;3;1\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{13;-10;0\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 20

1. а) – 35; б) 126; в) 6.

2. а) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -7 \\ 1 & -5 & 13 \\ 2 & 2 & -27 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -42 \\ 9 & 4 & -24 \\ -49 & -21 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -11 & 10 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}0&9&-7\\14&2&-4\\3&-5&-4\end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(1+x_5)\\ \frac{1}{3}(1+3x_3+3x_4-5x_5)\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}5\\4\\3\\1\\2\end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix}x_3+2x_4\\-2x_3-3x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\x_5\\x_5\end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2,\ x=\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_3=3,\ x=\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1=2,\ x=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2,\ x=\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$;

$\lambda_3=3,\ x=\gamma\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_4=-3,\ x=\delta\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\{1;3;-1\}$.