ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М.Л.Краснов
А.И.Киселев
Г.И.Макаренко
Е.В.Шикин
В.И.Заляпин

2

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Издание второе, исправленное

УРСС

Москва • 2004

ББК 22.1я73

Краснов Михаил Леонтьевич,
Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович,
Шикин Евгений Викторович,
Заляпин Владимир Ильич

Вся высшая математика: Учебник. Т. 2. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — [illegible]

ISBN 5-354-00300-8

Предлагаемый учебник впервые вышел в свет в виде двухтомника сначала на англий[illegible] испанском языках в 1990 году, а затем на французском. Он пользуется большим спросом за рубе[illegible]

В 1999 году книга стала лауреатом конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России.

Этот учебник адресован студентам высших учебных заведений (в первую очередь буду[illegible] инженерам и экономистам) и охватывает практически все разделы математики, но при этом представляет собой не набор разрозненных глав, а единое целое.

Во второй том включен материал по некоторым разделам математического анализа (неопределенный и определенный интегралы, функции нескольких переменных) и дифференциальной геометр[illegible]

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 22.10.2003 г.
Формат 70×100/16. Тираж 4000 экз. Печ. л. 12. Зак. № 628.

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

1859 ID 17344 м / 17345 т

9785354003006

ISBN 5-354-00270-2 (Полное произведение)
ISBN 5-354-00300-8 (Том 2)

Издательство УРСС
научная и учебная литература

Тел./факс: 7(095)135-44-23
Тел./факс: 7(095)135-42-46
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в *Internet:* http://URSS.ru

Глава XII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятие первообразной

Основной задачей дифференциального исчисления являлось нахождение по заданной функции $f(x)$ ее производной $f'(x)$. В интегральном исчислении основной задачей является обратная задача, которая заключается в нахождении функции $f(x)$ по ее известной производной $f'(x)$. Перейдем к рассмотрению этой задачи.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого интервала и ее производная $F'(x) = f(x)$ или, что то же самое, $dF(x) = f(x)\,dx$ для всех $x \in (a, b)$.

Пример 1. Функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$, так как

$$F'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Пример 2. Функция

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1,$$

является первообразной для функции $f(x) = a^x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. В самом деле,

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$ на интервале (a, b). В самом деле,

$$\Phi'(x) = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

для всех $x \in (a, b)$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет на (a, b) первообразную, то она имеет на этом интервале бесконечное множество первообразных. Между двумя различными первообразными для одной и той же функции существует тесная связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две любые первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то их разность равна некоторой постоянной*

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad C = \text{const}, \; x \in (a, b).$$

◀ Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на (a, b), т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Для нее получаем

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всех $x \in (a, b)$. Возьмем в интервале (a, b) любые две точки x_0 и x и применим теорему Лагранжа (о конечных приращениях) к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0, x]$. Тогда получим

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (x - x_0)\varphi'(\xi), \quad \text{где} \quad x_0 < \xi < x.$$

Так как $\varphi'(x) = 0$ на (a, b), то и $\varphi'(\xi) = 0$ и, значит, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ $\forall x \in (a, b)$, т. е. функция $\varphi(x)$ на (a, b) постоянна. Таким образом, $\Phi(x) - F(x) = C$, где $C = \text{const}$, для всех $x \in (a, b)$. ▶

Следствие. *Если $F(x)$ является одной из первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ имеет вид*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C — некоторая постоянная.

---

§ 2. Неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенных на интервале (a, b), называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Здесь знак $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а x называется *переменной интегрирования*.

Если $F(x)$ является какой-либо первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то в силу следствия будем иметь

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C,}$$

где C — произвольная постоянная. При этом любое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, является равенством между множествами. Такое равенство означает, что эти множества содержат одни и те же элементы — первообразные.

Иногда будем понимать символ $\int f(x)\,dx$ как любой элемент из этой совокупности, т. е. как какую-то из первообразных.

В дальнейшем будет доказана теорема о существовании неопределенного интеграла, а сейчас приведем ее формулировку.

Теорема 2. *Функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b), имеет на этом интервале первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.*

Операцию нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называют *интегрированием функции* $f(x)$. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

§ 3. Свойства неопределенного интеграла

Будем считать, что все рассматриваемые функции определены и непрерывны на одном и том же интервале (a, b), следовательно, на этом интервале существуют неопределенные интегралы от этих функций.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.}$$

◀ В самом деле, так как $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, то

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\big[F(x) + C\big] = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx. \ ▶$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),}$$

что следует из свойства 1.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C.}$$

◀ В самом деле, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C. \ ▶$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\boxed{\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad A = \text{const},\ A \neq 0.}$$

◀ В силу свойства 2 имеем

$$\left(\int Af(x)\,dx\right)' = Af(x), \quad \left(A\int f(x)\,dx\right)' = A\left(\int f(x)\,dx\right)' = Af(x). \ ▶$$

Таким образом, $\int Af(x)\,dx$ выражает то же самое множество функций, что и $A\int f(x)\,dx$, т. е. множество первообразных для функции $Af(x)$.

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\boxed{\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.}$$

◀ В силу свойства 2

$$\left(\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

С другой стороны,

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

Таким образом,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$$

являются первообразными для одних и тех же функций $f(x) \pm \varphi(x)$. Следовательно, они отличаются друг от друга на некоторую постоянную C. ▶

Следствие.

$$\int \left[\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)\,dx,$$

где $A_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как выражение вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x),$$

где все A_k — некоторые постоянные, называется *линейной комбинацией функций* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то последнее равенство означает, что

неопределенный интеграл от линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации неопределенных интегралов от этих функций.

Свойства 4 и 5 определяют так называемое *линейное свойство* неопределенного интеграла.

§ 4. Табличные интегралы

Каждая формула для производных конкретных функций, т. е. формула вида $F'(x) = f(x)$, может быть обращена, т. е. записана в виде $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C = \text{const}$. Таким путем получается следующая таблица основных интегралов, которые являются обращением основных формул дифференциального исчисления:

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$

3. $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1.$

   В частности, при $a = e$ получим

   $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C.$$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ (для знака «$-$» должно быть $|x| > |a|$).

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad |x| \neq a.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$

Формулы 8 и 10 являются частными случаями более общих формул

8'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

10'. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Справедливость всех приведенных выше формул устанавливается с помощью дифференцирования, которое показывает, что производная правой части этих равенств равна подынтегральной функции.

Следует отметить, что если операция дифференцирования элементарных функций всегда приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования элементарных функций может привести к неэлементарным функциям, т. е. к таким функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций. Например, доказано, что

следующие интегралы не выражаются через элементарные функции:

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \text{(интеграл Пуассона)},$$

$$\int \sin x^2\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx \qquad \text{(интеграл Френеля)},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \qquad \text{(интегральный логарифм)},\ 0 < x \neq 1,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{(интегральный синус)},\ x \neq 0,$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \text{(интегральный косинус)},\ x \neq 0.$$

Эти интегралы хотя и существуют в силу непрерывности подынтегральных функций в их областях определения, но они не являются элементарными функциями. Некоторые из этих интегралов играют большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях.

В некоторых случаях с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции данный интеграл можно свести к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx.$$

◀ Имеем

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(x^3 - 2 + x^{-3}\right) dx =$$

$$= \int x^3\,dx - 2\int dx + \int x^{-3}\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C. \ ▶$$

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \frac{(1+x)^2}{x^3 + x}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C. \ ▶$$

Пример 3. Найти интеграл

$$\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{5^x}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{5^x}\,dx = 2\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx + 3\int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = 2\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}} + 3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} + C. \ ▶$$

§ 5. Интегрирование заменой переменной

Одним из основных приемов интегрирования функций является *замена переменной*.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$. В подынтегральном выражении положим $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ и обратную функцию $t = \psi(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt,} \tag{1}$$

в правой части которого после интегрирования вместо t надо подставить его выражение через x, т. е. функцию $\psi(x)$.

◀ Для доказательства равенства (1) находим производные интегралов, стоящих в его левой и правой частях. Производная по x от левого интеграла равна

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x).$$

Производную по x от правого интеграла находим по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом t. Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}, \qquad \text{где} \quad \varphi'(t) \neq 0,$$

получим

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \cdot t'_x = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\frac{1}{\varphi'(t)} = f\left[\varphi(t)\right] = f(x).$$

Так как производные указанных выше интегралов равны, то эти интегралы определяют одно и то же множество функций, а именно — множество первообразных функций $f(x)$. ▶

Равенство (1) выражает собой часто применяемый на практике метод интегрирования, называемый *интегрированием заменой переменной* или *подстановкой*. Функцию $\varphi(t)$ на практике выбирают так, чтобы интеграл в правой части равенства (1) был более простым, чем первоначальный.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0).$$

◄ Положим $x = a\,\mathrm{sh}\,t$. Тогда $dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ и мы будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{\sqrt{a^2(\mathrm{sh}^2\,t+1)}} = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{a\,\mathrm{ch}\,t} = \int dt = t + \tilde{C}.$$

Выразим переменную t через старую переменную x. Для этого разрешим равенство $x = a\,\mathrm{sh}\,t$ относительно t. Так как по определению $\mathrm{sh}\,t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$, то

$$a\frac{e^t-e^{-t}}{2} = x,$$

или

$$ae^{2t} - 2xe^t - a = 0,$$

откуда

$$e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

Учитывая, что $e^t > 0$, берем корень со знаком «+», так что

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

откуда находим

$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C \quad \left(C = \tilde{C} - \ln a\right). ►$$

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$$

◄ Сделаем замену переменной, положив $x = t^2 - 1$, откуда $dx = 2t\,dt$, $t = \sqrt{x+1}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} \int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + C.$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $t = \sqrt{x+1}$, получим

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x+1} + C. ►$$

Замечание. Если в интеграле $\int f(x)\,dx$ подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно представить в виде

$$f(x)\,dx = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)\,dx,$$

т. е.

$$f(x)\,dx = g\left[\psi(x)\right]d\left[\psi(x)\right],$$

причем функция $g(t)$ легко интегрируется, т. е. интеграл

$$\int g(t)\,dt = F(t) + C$$

находится легко, то делая в данном интеграле замену $t = \psi(x)$, будем иметь

$$\int f(x)\,dx = F\left[\psi(x)\right] + C.$$

Пример 3. Найти интеграл

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\,dx.$$

◀ Положим $t = 2^x + 2^{-x}$, $t > 0$. Тогда $dt = (2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2)\,dx$, откуда

$$(2^x - 2^{-x})\,dx = \frac{dt}{\ln 2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2}\ln t + C = \frac{\ln(2^x + 2^{-x})}{\ln 2} + C. \blacktriangleright$$

Пример 4. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

◀ Сделаем замену переменной, положив $\sqrt{e^x + 1} = t$. Тогда $\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\,dt$, $e^x = t^2 - 1$. Поэтому

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int e^x \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x + 1}} = 2\int \left(t^2 - 1\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/2} - 2\sqrt{e^x + 1} + C = \frac{2}{3}\left(e^x - 2\right)\sqrt{e^x + 1} + C. \blacktriangleright$$

§ 6. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$\left[u(x)v(x)\right]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

Это равенство показывает, что произведение данных функций $u(x)v(x)$ является первообразной для суммы $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ и, следовательно,

$$\int \left[u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\right] dx = u(x)v(x) + C.$$

Отсюда, используя линейное свойство интеграла, находим

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx + C.}$$

Так как по определению дифференциала

$$v'(x)\,dx = dv, \quad u'(x)\,dx = du,$$

то полученное равенство можно записать короче

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C,$$

или

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du,} \qquad (1)$$

считая, что постоянная C включена в один из неопределенных интегралов.

Нахождение неопределенного интеграла с помощью этой формулы называется *интегрированием по частям*. Формула (1) сводит нахождение интеграла $\int u\,dv$ к нахождению интеграла $\int v\,du$, который в некоторых случаях можно легко найти. При ее применении к нахождению интеграла приходится разбивать подынтегральное выражение на два множителя u и $dv = v'\,dx$, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части. Выбирать u следует так, чтобы интегрирование дифференциала dv не представляло трудностей и чтобы замена u на du и dv на v в совокупности приводили к упрощению подынтегрального выражения.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int (2-3x)\cos x\,dx.$$

◀ Здесь

$$u\,dv = (2-3x)\cos x\,dx.$$

Положим

$$u = 2-3x, \quad dv = \cos x\,dx.$$

Тогда

$$du = -3\,dx, \quad v = \int \cos x\,dx = \sin x.$$

Применяя формулу (1), будем иметь

$$\int (2-3x)\cos x\,dx = (2-3x)\sin x + 3\int \sin x\,dx = (2-3x)\sin x - 3\cos x + C. \ ▶$$

Замечание. Если взять

$$u = \cos x, \quad dv = (2-3x)\,dx$$

или же

$$u = (2-3x)\cos x, \quad dv = dx$$

и применить формулу (1), то в обоих случаях в ее правой части получим более сложные интегралы, чем первоначальный.

Замечание. При нахождении функции v по ее дифференциалу dv можно брать любое значение постоянной интегрирования $\widetilde{C}$, так как она в конечный результат не входит (для проверки этого достаточно в формулу (1) подставить $v+\widetilde{C}$ вместо v). Поэтому для удобства будем брать $\widetilde{C}=0$.

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \ln x\,dx.$$

◀ Так как в данном интеграле $u\,dv = \ln x\,dx$, то здесь имеется единственный выбор, а именно $u=\ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int dx = x$. По формуле (1) получаем

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \ ▶$$

Пример 3. Найти интеграл

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (|x|<|a|).$$

◀ Применим метод интегрирования по частям, положив

$$u = \sqrt{a^2-x^2}, \quad dv = dx.$$

Отсюда находим

$$du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v = x.$$

Применяя формулу (1), получим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + 2C.$$

Добавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции интеграла в правой части и, произведя деление на $\sqrt{a^2-x^2}$, будем иметь

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + 2C = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} -$$
$$- \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C.$$

Для нахождения данного интеграла мы получили алгебраическое уравнение с одним неизвестным, которым является этот интеграл,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C.$$

Из этого уравнения находим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \blacktriangleright$$

Задача. Показать, что справедливы следующие формулы:

а) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C;$

б) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,$ где $|x| > |a|$.

Замечание. К нахождению интеграла $\int v\,du$ в правой части формулы (1) можно применить снова интегрирование по частям.

Пример 4. Найти интеграл

$$\int x^2 2^x\,dx.$$

◀ Положим $u = x^2$, $dv = 2^x\,dx$, тогда

$$du = 2x\,dx, \quad v = \frac{2^x}{\ln 2} \quad \text{и} \quad \int x^2 2^x\,dx = x^2\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x 2^x\,dx.$$

К интегралу в правой части снова применяем интегрирование по частям, полагая $u = x$, $dv = 2^x\,dx$, откуда

$$du = dx, \quad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

и, следовательно,

$$\int x^2 2^x\,dx = x^2\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx\right) = x^2\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2}\right) + C =$$

$$= \left(x^2 - \frac{2}{\ln 2}x + \frac{2}{\ln^2 2}\right)\frac{2^x}{\ln 2} + C. \blacktriangleright$$

Пример 5. Найти интеграл

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0).$$

◀ Интегрируя по частям, положим, например,

$$u = e^{\alpha x}, \quad dv = \cos\beta x\,dx \quad (\text{или} \quad u = \cos\beta x, \quad dv = e^{\alpha x}\,dx).$$

Тогда

$$du = \alpha e^{\alpha x}\,dx, \quad v = \int \cos\beta x\,dx = \frac{\sin\beta x}{\beta}.$$

Поэтому

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Для нахождения полученного в правой части интеграла снова применим интегрирование по частям:

$$u = e^{\alpha x}, \quad dv = \sin\beta x\,dx; \qquad du = \alpha e^{\alpha x}\,dx, \quad v = -\frac{\cos\beta x}{\beta};$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Подставляя правую часть этого равенства в результат первого интегрирования, будем иметь

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Таким образом, посредством двукратного интегрирования по частям мы получим для нахождения данного интеграла алгебраическое уравнение первой степени с одним неизвестным, из которого находим

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x),$$

откуда

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C.$$

Аналогично находим интеграл

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C. \blacktriangleright$$

С помощью интегрирования по частям можно находить, например, следующие интегралы:

1. $$\boxed{\int P_n(x)\ln x\,dx,}$$

где $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kx^k$ — многочлен n-ой степени.

◄ Положим

$$u=\ln x,\quad dv=P_n(x)\,dx.$$

Тогда

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=\int P_n(x)\,dx=Q_{n+1}(x),$$

где $Q_{n+1}(x)$ — многочлен $(n+1)$-ой степени. Поэтому

$$\boxed{\int P_n(x)\ln x\,dx=Q_{n+1}(x)\ln x-\int\frac{Q_{n+1}(x)}{x}\,dx=Q_{n+1}(x)\ln x-H_{n+1}(x)+C,}$$

где $H_{n+1}(x)$ — многочлен $(n+1)$-ой степени. ►

Пример 6. Найти интеграл

$$\int(4x^3+2x)\ln x\,dx.$$

◄ Полагаем

$$u=\ln x,\quad dv=(4x^3+2x)\,dx;$$

тогда

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=\int(4x^3+2x)\,dx=x^4+x^2.$$

Формула (1) дает:

$$\int(4x^3+2x)\ln x\,dx=(x^4+x^2)\ln x-\int(x^3+x)\,dx=(x^4+x^2)\ln x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C. \blacktriangleright$$

2. $$\boxed{\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx,\qquad \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,\alpha x\,dx,}$$

где α — действительное число.

Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Если, например, в первом интеграле взять

$$u = \operatorname{arctg} \alpha x, \quad dv = P_n(x)\, dx,$$

то

$$du = \frac{\alpha\, dx}{1+\alpha^2 x^2}, \quad v = Q_{n+1}(x),$$

и мы получаем

$$\boxed{\int P_n(x) \operatorname{arctg} \alpha x\, dx = Q_{n+1}(x) \operatorname{arctg} \alpha x - \alpha \int \frac{Q_{n+1}(x)}{1+\alpha^2 x^2}\, dx.}$$

Аналогично поступаем и со вторым интегралом.

Пример 7. Найти интеграл

$$\int (3x^2+1) \operatorname{arctg} x\, dx.$$

◀ Пусть

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = (3x^2+1)\, dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x^3 + x.$$

Поэтому

$$\int (3x^2+1) \operatorname{arctg} x\, dx = (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3+x}{1+x^2}\, dx = (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \int x\, dx =$$

$$= (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C. \ ▶$$

3.
$$\boxed{\int P_n(x) \arcsin \alpha x\, dx, \quad \int P_n(x) \arccos \alpha x\, dx,}$$

где α — действительное число.

Для нахождения этих интегралов берем

$$u = \arcsin \alpha x \quad (u = \arccos \alpha x), \quad dv = P_n(x)\, dx;$$

тогда

$$du = \frac{\alpha\, dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \quad \left(du = -\frac{\alpha\, dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}\right), \quad v = Q_{n+1}(x)$$

и формула (1) дает

$$\boxed{\int P_n(x) \arcsin \alpha x\, dx = Q_{n+1}(x) \arcsin \alpha x - \alpha \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}\, dx.}$$

Полученный в правой части интеграл можно находить различными способами, которые мы приведем в примерах (подробнее этот интеграл будет рассмотрен ниже (см. § 8)).

Пример 8. Найти интеграл

$$\int x^2 \arcsin x\, dx.$$

◀ Берем
$$u = \arcsin x, \quad dv = x^2\,dx,$$
откуда
$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$
Применяя формулу (1), будем иметь
$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$
В полученном в правой части равенства интеграле сделаем подстановку $t = \sqrt{1-x^2}$, $x^2 = 1-t^2$, $x\,dx = -t\,dt$. Тогда
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx = -\int \frac{1-t^2}{t}t\,dt = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$$
Окончательно получаем
$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C. \ ▶$$

Используя многократное интегрирование по частям можно найти следующие интегралы:

4.
$$\boxed{\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx,}$$
где λ — действительное число.

Для нахождения этого интеграла в формуле (1) интегрирования по частям полагаем
$$u = P_n(x), \quad dv = e^{\lambda x}\,dx,$$
откуда
$$du = P_n'(x)\,dx, \quad v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$
Поэтому
$$\boxed{\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}P_n(x)e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\int P_n'(x)e^{\lambda x}\,dx,}$$
где $P_n'(x)$ — многочлен $(n-1)$-ой степени. К интегралу в правой части снова применяем формулу (1) и т. д. В результате n-кратного интегрирования по частям придем к табличному интегралу $\int e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C$.

Пример 9. Найти интеграл
$$\int (x^2+2x)e^x\,dx.$$

◀ Полагая
$$u = x^2 + 2x, \quad dv = e^x\,dx,$$
находим
$$du = 2(x+1)\,dx, \quad v = e^x.$$
Тогда
$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (x^2+2x)e^x - 2\int (x+1)e^x\,dx.$$
Интеграл в правой части снова берем по частям, принимая $u = x+1$, $dv = e^x\,dx$, откуда $du = dx$, $v = e^x$. Следовательно,
$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C.$$

Окончательно получаем

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (x^2+2x)e^x - 2xe^x + C = x^2e^x + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Интегралы этого вида можно находить с помощью метода неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем: ищем интеграл в виде произведения многочлена n-ой степени

$$Q_n(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

с неопределенными коэффициентами $b_0, b_1, \ldots, b_n$ на функцию $e^{\lambda x}$, т. е.

$$\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx = Q_n(x)e^{\lambda x}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов b_k дифференцируем обе части этого равенства:

$$P_n(x)e^{\lambda x} = Q_n'(x)e^{\lambda x} + Q_n(x)\lambda e^{\lambda x}.$$

Затем, сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, будем иметь

$$P_n(x) = Q_n'(x) + \lambda Q_n(x).$$

В этом равенстве слева и справа стоят многочлены n-ой степени, приравнивая коэффициенты которых при одинаковых степенях x, получим систему из $n+1$ линейных уравнений, содержащих искомые коэффициенты b_k. Эта линейная система имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля.

Пример 10. Найти интеграл

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx.$$

◄ Положим

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (b_0 + b_1x + b_2x^2)e^x,$$

где b_0, b_1, b_2 — неизвестные коэффициенты. Дифференцируя это равенство, найдем

$$(x^2+2x)e^x = \left(b_1x + 2b_2x\right)e^x + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right)e^x.$$

Обе части последнего равенства сокращаем на $e^x \neq 0$:

$$2x + x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_1 + 2b_2x.$$

В правой части равенства собираем все члены с одинаковыми степенями x:

$$2x + x^2 = (b_0 + b_1) + (b_1 + 2b_2)x + b_2x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^0 & 0 = b_0 + b_1 \\ x^1 & 2 = b_1 + 2b_2 \\ x^2 & 1 = b_2 \end{array}\right\}.$$

Решая эту систему, находим: $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Исходный интеграл будет равен

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = x^2e^x + C. \blacktriangleright$$

5. $$\boxed{\int P_n(x)\sin\beta x\,dx, \qquad \int P_n(x)\cos\beta x\,dx,}$$

где β — действительная постоянная, $\beta \neq 0$.

Для первого из этих интегралов в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u = P_n(x), \quad dv = \sin\beta x\,dx \quad (\text{для второго} \quad dv = \cos\beta x\,dx),$$

откуда

$$du = P_n'(x)\,dx, \quad v = -\frac{\cos\beta x}{\beta} \quad \left(\text{для второго} \quad v = \frac{\sin\beta x}{\beta}\right).$$

Следовательно,

$$\boxed{\int P_n(x)\sin\beta x\,dx = -P_n(x)\frac{\cos\beta x}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int P_n'(x)\cos\beta x\,dx.}$$

Применяя n раз интегрирование по частям, придем к одному из интегралов

$$\int \sin\beta x\,dx = -\frac{\cos\beta x}{\beta} \quad \text{или} \quad \int \cos\beta x\,dx = \frac{\sin\beta x}{\beta}.$$

Пример 11. Найти интеграл

$$\int (x^2-1)\cos x\,dx.$$

◀ Интегрируем два раза по частям, при этом будем пользоваться более короткой записью. Получаем

$$\int (x^2-1)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2-1, & dv = \cos x\,dx \\ du = 2x\,dx, & v = \sin x \end{array} \right| = (x^2-1)\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & dv = \sin x\,dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right| = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C. \ ▶$$

Кроме указанных выше интегралов существуют и другие интегралы, которые находятся посредством метода интегрирования по частям.

Пример 12. Найти интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$$

◀ Полагая

$$u = x, \quad dv = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

получим

$$du = dx, \quad v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx.$$

В интеграле правой части равенства, применяя подстановку $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$, найдем

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C. \ ▶$$

§ 7. Интегрирование рациональных функций

В этом параграфе будет рассмотрен метод интегрирования рациональных функций.

7.1. Краткие сведения о рациональных функциях

Простейшей *рациональной функцией* является многочлен n-ой степени, т. е. функция вида

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные постоянные, причем $a_0 \neq 0$. Многочлен $Q_n(x)$, у которого коэффициент $a_0 = 1$, называется *приведенным*.

Действительное число b называется *корнем* многочлена $Q_n(x)$, если $Q_n(b) = 0$.

Известно, что каждый многочлен $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на действительные множители вида

$$x - b \quad \text{и} \quad x^2 + px + q,$$

где p, q — действительные коэффициенты, причем квадратичные множители не имеют действительных корней и, следовательно, неразложимы на действительные линейные множители. Объединяя одинаковые множители (если таковые имеются) и полагая, для простоты, многочлен $Q_n(x)$ приведенным, можно записать его разложение на множители в виде

$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s$ — натуральные числа.

Так как степень многочлена $Q_n(x)$ равна n, то сумма всех показателей $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, сложенная с удвоенной суммой всех показателей $\mu_1, \ldots, \mu_s$, равна n:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_s) = n.$$

Корень a многочлена называется *простым* или *однократным*, если $\alpha = 1$, и *кратным*, если $\alpha > 1$; число α называется *кратностью* корня a. То же самое относится и к другим корням многочлена.

Рациональной функцией $f(x)$ или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

причем предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих множителей. Рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т. е. $m < n$. Если же $m \geqslant n$, то рациональная дробь называется *неправильной* и в этом случае, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x)$, $\widetilde{P}(x)$ — некоторые многочлены, а $\frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ является правильной рациональной дробью.

Пример 1. Рациональная дробь $\frac{x^5+1}{x^2+1}$ является неправильной дробью. Разделив $P_5(x) = x^5 + 1$ на $Q_2(x) = x^2 + 1$ «уголком», будем иметь

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5 \qquad\quad + 1 & x^2 + 1 \\
\underline{x^5 + x^3 \qquad\quad} & \overline{x^3 - x} \\
-\,{-x^3} + 1 & \\
\underline{-x^3 - x} & \\
x + 1 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Здесь $R_3(x) = x^3 - x$, $\widetilde{P}(x) = x + 1$, причем $\frac{x+1}{x^2+1}$ есть правильная дробь. ▶

Определение. *Простейшими* (или *элементарными*) *дробями* называются рациональные дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где A, M, N, a, p, q — действительные числа, k — натуральное число, большее или равное 2, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, так что его дискриминант $\frac{p^2}{4} - q < 0$ или $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

В алгебре доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Правильная рациональная дробь* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ *с действительными коэффициентами, знаменатель которой* $Q_n(x)$ *имеет вид*

$$Q_n(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

разлагается единственным способом на сумму простейших дробей по правилу

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_sx+q_s)^1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}}.\end{aligned} \qquad (1)$$

В этом разложении $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, $B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots$, M_1, N_1, M_2, $N_2, \ldots$, M_{μ_s}, N_{μ_s} *— некоторые действительные постоянные, часть которых может быть равна нулю. Для нахождения этих постоянных правую часть равенства* (1) *приводят к общему знаменателю, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях* x *в числителях левой и правой частей. Это дает систему линейных уравнений, из которой находятся искомые постоянные. Этот метод нахождения неизвестных постоянных называется методом неопределенных коэффициентов.*

Иногда бывает удобнее применить другой способ нахождения неизвестных постоянных, который состоит в том, что после приравнивания числителей получается тождество относительно x, в котором аргументу x придают некоторые значения, например, значения корней, в результате чего получаются уравнения для нахождения постоянных. Особенно он удобен, если знаменатель $Q_n(x)$ имеет только действительные простые корни.

Пример 2. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}.$$

◀ Данная дробь правильная. Разлагаем знаменатель на множители:

$$(x^3-3x^2+2x) = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2).$$

Так как корни знаменателя действительные и различные, то на основании формулы (1) разложение дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравнивая числители в его левой и правой частях, получим тождество

$$3x^2-6x+2=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1), \qquad (*)$$

или

$$3x^2-6x+2=(A+B+C)x^2+(-3A-2B-C)x+2A.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C найдем двумя способами.

Первый способ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, т. е. при x^2, x^1, x^0 (свободный член), в левой и правой частях тождества, получим линейную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B+C=3 \\ x^1 & -3A-2B-C=-6 \\ x^0 & 2A=2 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}.$$

Это система имеет единственное решение

$$A=1, \quad B=1, \quad C=1.$$

Второй способ. Так как корни знаменателя равны $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, то полагая в тождестве $(*)$:

$x=0$, получим $2=2A$, откуда $A=1$;

$x=1$, получим $-1=-B$, откуда $B=1$;

$x=2$, получим $2=2C$, откуда $C=1$,

и искомое разложение имеет вид

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}. \ ►$$

Пример 3. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}.$$

◄ Разлагаем многочлен, стоящий в знаменателе, на множители:

$$x^5+3x^4+3x^3+x^2=x^2(x^3+3x^2+3x+1)=(x+1)^3x^2.$$

Знаменатель имеет два различных действительных корня: $x_1=0$ кратности 2 и $x_2=-1$ кратности 3. Поэтому разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, найдем

$$x^3+3x+1=A_1x(x+1)^3+A_2(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1)+B_3x^2,$$

или

$$x^3+3x+1=(A_1+B_1)x^4+(3A_1+A_2+2B_1+B_2)x^3+(3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3)x^2+(A_1+3A_2)x+A_2.$$

Первый способ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, получим линейную систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A_1+B_1=0 \\ x^3 & 3A_1+A_2+2B_1+B_2=1 \\ x^2 & 3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3=0 \\ x^1 & A_1+3A_2=3 \\ x^0 & A_2=1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}.$$

Эта система имеет единственное решение

$$A_1=0, \quad A_2=1, \quad B_1=0, \quad B_2=0, \quad B_3=-3,$$

и искомым разложением будет

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{(x+1)^3}.$$

Второй способ. В полученном тождестве полагая $x=0$, получаем $1=A_2$, или $A_2=1$; полагая $x=-1$, получим $-3=B_3$, или $B_3=-3$. При подстановке найденных значений коэффициентов A_1 и B_3 в тождество оно примет вид

$$x^3+3x+1=A_1x(x+1)^3+(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1)-3x^2,$$

или
$$x^3+3x+1-(x+1)^3+3x^2=A_1x(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1),$$
т. е.
$$0=A_1x(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1).$$
Сокращая на $x(x+1)$, будем иметь
$$A_1(x+1)^2+B_1x(x+1)+B_2x=0.$$
Полагая $x=0$, а затем $x=-1$, найдем, что $A_1=0$, $B_2=0$ и, значит, $B_1=0$. Таким образом, опять получаем
$$A_1=0,\quad A_2=1,\quad B_1=0,\quad B_2=0,\quad B_3=-3. ▶$$

Пример 4. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь
$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

◀ Знаменатель дроби не имеет действительных корней, так как функция x^2+1 не обращается в нуль ни при каких действительных значениях x. Поэтому разложение на простейшие дроби должно иметь вид
$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$
Отсюда получаем
$$x^3+x^2+1=(M_1x+N_1)(x^2+1)+M_2x+N_2,$$
или
$$x^3+x^2+1=M_1x^3+N_1x^2+(M_1+M_2)x+(N_1+N_2).$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, будем иметь
$$M_1=1,\quad N_1=1,\quad M_1+M_2=0,\quad N_1+N_2=1,$$
откуда находим
$$M_1=1,\quad N_1=1,\quad M_2=-1,\quad N_2=0,$$
и, следовательно,
$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. ▶$$

Следует отметить, что в некоторых случаях разложения на простейшие дроби можно получить быстрее и проще, действуя каким-либо другим путем, не пользуясь методом неопределенных коэффициентов.

Например, для получения разложения дроби в примере 3, можно прибавить и вычесть в числителе $3x^2$ и произвести деление, так как указано ниже:
$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{(x^3+3x^2+3x+1)-3x^2}{x^2(x+1)^3}=\frac{(x+1)^3-3x^2}{x^2(x+1)^3}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{(x+1)^3}.$$

7.2. Интегрирование простейших дробей

Как было сказано выше, любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби (§ 7), причем это представление единственно. Интегрирование многочлена не представляет трудностей, поэтому рассмотрим вопрос об интегрировании правильной рациональной дроби.

Так как любая правильная рациональная дробь представима в виде суммы простейших дробей, то ее интегрирование сводится к интегрированию простейших дробей.

Рассмотрим теперь вопрос об их интегрировании.

I. $$\boxed{\int \frac{A\,dx}{x-a}} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a| + C.}$$

II. $$\boxed{\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) =$$
$$= \frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1} + C = \boxed{\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.}$$

III. Для нахождения интеграла от простейшей дроби третьего типа выделим у квадратного трехчлена полный квадрат двучлена:
$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как второе слагаемое $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то положим его равным a^2, где $a = +\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, а затем сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$, $x^2 + px + q = t^2 + a^2$. Тогда, учитывая линейные свойства интеграла, найдем:
$$\boxed{\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx} = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}\,dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$
$$\boxed{= \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.}$$

Пример 5. Найти интеграл
$$\int \frac{2 - x}{x^2 + 4x + 6}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция является простейшей дробью третьего типа, так как квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 6$ не имеет действительных корней (его дискриминант отрицателен: $\frac{p^2}{4} - q = -2 < 0$), а в числителе стоит многочлен первой степени. Поэтому поступаем следующим образом:

1) выделяем полный квадрат в знаменателе
$$x^2 + 4x + 6 = (x^2 + 4x + 4) + 2 = (x + 2)^2 + 2;$$

2) делаем подстановку
$$x + 2 = t, \quad dx = dt, \quad x = t - 2, \quad x^2 + 4x + 6 = t^2 + 2$$
(здесь $a^2 = 2$);

3) находим интеграл
$$\int \frac{2 - x}{x^2 + 4x + 6}\,dx = \int \frac{2 - (t - 2)}{t^2 + 2}\,dt = 4\int \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2 + 2} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(t^2 + 2) + C = 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x + 2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 6) + C. \blacktriangleright$$

IV. Для нахождения интеграла от простейшей дроби четвертого типа положим, как и выше,

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Тогда получим ($k \geqslant 2$)

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}\,dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int (t^2 + a^2)^{-k}\,d(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} =$$
$$= \frac{M}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Интеграл в правой части обозначим через J_k и преобразуем его следующим образом:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2}J_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\,\frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Интеграл в правой части интегрируем по частям, полагая

$$u = t, \quad dv = \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k},$$

откуда

$$du = dt, \quad v = \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}},$$

и, следовательно,

$$J_k = \frac{1}{a^2}J_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1 - k}\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}}\right] =$$
$$= \frac{1}{a^2}J_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{k - 1}J_{k-1}\right],$$

или

$$\boxed{J_k = \frac{t}{2a^2(k - 1)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k - 3}{2a^2(k - 1)}J_{k-1}.}$$

Мы получили так называемую *рекуррентную формулу*, которая позволяет найти интеграл J_k для любого $k = 2, 3, \ldots$. Действительно, интеграл J_1 является табличным:

$$\boxed{J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.}$$

Полагая в рекуррентной формуле $k = 2$, найдем

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{J_1}{2a^2} = \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Зная J_2 и полагая $k = 3$, легко найдем J_3 и так далее.

В окончательном результате, подставляя всюду вместо t и a их выражения через x и коэффициенты p и q, получим для первоначального интеграла выражение его через x и заданные числа M, N, p, q.

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция есть простейшая дробь четвертого типа, так как дискриминант квадратного трехчлена x^2-4x+5 отрицателен, т. е. $\frac{p^2}{4}-q=-1<0$, а значит, знаменатель действительных корней не имеет, и числитель есть многочлен 1-ой степени.

1) Выделяем в знаменателе полный квадрат

$$x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1.$$

2) Делаем подстановку:

$$x-2=t, \quad dx=dt; \quad x=t+2 \quad (a^2=1).$$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=\int \frac{t+3}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}+3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Полагая в рекуррентной формуле $k=2$, $a^2=1$, будем иметь

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C,$$

и, следовательно, искомый интеграл равен

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{3t}{2(t^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t+C=\frac{3t-1}{2(t^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=\frac{3x-7}{2(x^2-4x+5)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C. \ ▶$$

7.3. Общий случай

Из результатов пп. 1 и 2 этого параграфа непосредственно следует важная теорема.

Теорема 4. *Неопределенный интеграл от любой рациональной функции всегда существует (на интервалах, в которых знаменатель дроби $Q_n(x)\neq 0$) и выражается через конечное число элементарных функций, а именно, он является алгебраической суммой, членами которой могут быть лишь многочлены, рациональные дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.*

Итак, для нахождения неопределенного интеграла от дробно-рациональной функции следует поступать следующим образом:

1) если рациональная дробь неправильная, то делением числителя на знаменатель выделяется целая часть, т. е. данная функция представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) затем знаменатель полученной правильной дроби разлагается на произведение линейных и квадратичных множителей;

3) эта правильная дробь разлагается на сумму простейших дробей;

4) используя линейность интеграла и формулы п. 2, находятся интегралы от каждого слагаемого в отдельности.

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}\,dx.$$

◀ Так как знаменатель $(x-1)(x^2-4) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ есть многочлен третьей степени, то подынтегральная функция является неправильной дробью. Выделяем в ней целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2} x^3 - x^2 - 4x + 4 & 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 4x - 4 & \end{array}$$

Следовательно, будем иметь

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)} = 1 + \frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)},$$

где $R_0(x) = 1$, $\widetilde{P}(x) = x^2 + 4x - 4$. Знаменатель правильной дроби

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)}$$

имеет три различных действительных корня:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2,$$

и поэтому ее разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Отсюда находим

$$x^2 + 4x - 4 = A(x^2-4) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2).$$

Придавая аргументу x значения, равные корням знаменателя, найдем из этого тождества, что:

$$\begin{array}{lll} \text{если } x = 1, & \text{то} & 1 = -3A, \ A = -\dfrac{1}{3}; \\ \text{если } x = 2, & \text{то} & 8 = \ \ 4B, \ B = \ \ 2; \\ \text{если } x = -2, & \text{то} & -8 = \ 12C, \ C = -\dfrac{2}{3}. \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} + 2\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x+2}.$$

Искомый интеграл будет равен

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)(x^2-4)} = \int \left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + 2\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + 2\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + C. ▶$$

Пример 8. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция является правильной дробью, знаменатель которой имеет два различных действительных корня: $x = 0$ кратности 1 и $x = 1$ кратности 3. Поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x-1}.$$

Приводя правую часть этого равенства к общему знаменателю и сокращая обе части равенства на этот знаменатель, получим

$$x^2 + 1 = A_1x^2(x-1) + A_2(x-1)x + A_3(x-1) + Bx^3,$$

или

$$x^2 + 1 = (A_1 + B)x^3 + (-A_1 + A_2)x^2 + (-A_2 + A_3)x - A_3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого тождества:

$$A_1 + B = 0, \quad -A_1 + A_2 = 1, \quad -A_2 + A_3 = 0, \quad -A_3 = 1.$$

Отсюда находим $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = -1$, $B = 2$. Подставляя найденные значения коэффициентов в разложение, будем иметь

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^3} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x-1}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2\ln|x-1| + C. \blacktriangleright$$

Пример 9. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

◀ Знаменатель дроби не имеет действительных корней. Поэтому разложение на простейшие дроби подынтегральной функции имеет вид

$$\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$x^3 - x = (M_1x+N_1)(x^2+1) + M_2x + N_2,$$

или

$$x^3 - x = M_1x^3 + N_1x^2 + (M_1+M_2)x + (N_1+N_2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого тождества, будем иметь

$$M_1 = 1, \quad N_1 = 0, \quad M_1 + M_2 = -1, \quad N_1 + N_2 = 0,$$

откуда находим

$$M_1 = 1, \quad N_1 = 0, \quad M_2 = -2, \quad N_2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\left[\frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C. \blacktriangleright$$

Замечание. В приведенном примере подынтегральную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей более простым способом, а именно, в числителе дроби выделяем бином, стоящий в знаменателе, а затем производим почленное деление:

$$\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1)-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

§ 8. Интегрирование иррациональных функций

Функция вида

$$\boxed{R(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \frac{P_m(u_1, u_2, \ldots, u_k)}{Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)},}$$

где P_m и Q_n являются многочленами степеней m и n соответственно от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_k$, называется *рациональной функцией* от $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Например, многочлен второй степени от двух переменных u_1 и u_2 имеет вид

$$P_2(u_1, u_2) = A_{00} + A_{10}u_1 + A_{01}u_2 + A_{20}u_1^2 + A_{11}u_1u_2 + A_{02}u_2^2,$$

где A_{00}, A_{10}, A_{01}, A_{20}, A_{11}, A_{02} — некоторые действительные постоянные, причем $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

Пример 1. Функция

$$f(x,y)=\frac{x^2+2y^3+xy}{x+x^3y^2+1}$$

является рациональной функцией от переменных x и y, так как она представляет собой отношение многочлена третьей степени $P_3(x,y)=x^2+2y^3+xy$ и многочлена пятой степени $Q_5(x,y)=x+x^3y^2+1$, а функция $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-2xy+3}}{x+y}$ таковой не является.

В том случае, когда переменные $u_1, u_2, \ldots, u_k$, в свою очередь, являются функциями переменной x:

$$u_1=f_1(x),\quad u_2=f_2(x),\quad \ldots,\quad u_k=f_k(x),$$

то функция $R\big[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\big]$ называется *рациональной функцией* от функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$.

Пример 2. Функция

$$f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+3\sqrt{x^2+x+1}}$$

есть рациональная функция от x и радикала $\sqrt{x^2+x+1}$:

$$f(x)=R\Big(x,\sqrt{x^2+x+1}\Big).$$

Пример 3. Функция вида

$$f(x)=\frac{\ln x+e^{\sqrt{x^2+1}}}{2+\sin x^2}$$

не является рациональной функцией от x и радикала $\sqrt{x^2+1}$, но она является рациональной функцией от функций $\ln x$, $e^{\sqrt{x^2+1}}$ и $\sin x^2$:

$$f(x)=R\Big(\ln x, e^{\sqrt{x^2+1}}, \sin x^2\Big).$$

Как показывают примеры, интегралы от иррациональных функций не всегда выражаются через элементарные функции. Например, часто встречающиеся в приложениях интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad \text{и}\quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad 0<k<1,$$

не выражаются через элементарные функции; эти интегралы называются *эллиптическими интегралами первого* и *второго родов* соответственно.

Рассмотрим те случаи, когда интегрирование иррациональных функций можно свести с помощью некоторых подстановок к интегрированию рациональных функций.

1. Пусть требуется найти интеграл

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

где $R(x,y)$ — рациональная функция своих аргументов x и y; $m\geqslant 2$ — натуральное число; a, b, c, d — действительные постоянные, удовлетворяющие условию $ad-bc\neq 0$ (при $ad-bc=0$ коэффициенты a и b пропорциональны коэффициентам c и d, и поэтому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от x; значит, в этом случае подынтегральная функция будет являться рациональной функцией переменной x, интегрирование которой было рассмотрено ранее).

◀ Сделаем в данном интеграле замену переменной, положив

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad \text{или}\quad t^m=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Отсюда выражаем переменную x через новую переменную t. Имеем

$$(cx+d)t^m=ax+b,\quad ax-cxt^m=d\cdot t^m-b;$$

$x=\frac{d\cdot t^m-b}{a-ct^m}$ — рациональная функция от t. Далее находим

$$dx=\frac{d\cdot mt^{m-1}(a-ct^m)+cmt^{m-1}(d\cdot t^m-b)}{(a-ct^m)^2}\,dt,$$

или, после упрощения,

$$dx=\frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{d\cdot t^m-b}{a-ct^m},t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(a-ct^m)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t, так как рациональная функция от рациональной функции, а также произведение рациональных функций, представляют собой рациональные функции.

Интегрировать рациональные функции мы умеем. Пусть

$$\int R_1(t)\,dt=F(t)+C,\quad F'(t)=R_1(t).$$

Тогда искомый интеграл будет равен

$$\boxed{\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)+C.\ ▶}$$

Пример 4. Найти интеграл

$$\int\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

◀ Подынтегральная функция есть рациональная функция от x и $y=\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$, т. е. $R(x)=\frac{y}{(2x+3)^2}$. Поэтому полагаем $t=\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$. Тогда

$$2x-3=2xt^4+3t^4,\quad x=\frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{1-t^4}-1\right),\quad dx=\frac{12t^3}{(1-t^4)^2},\quad 2x+3=\frac{6}{1-t^4}.$$

Таким образом, получим

$$\int\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2}=\int t\frac{(1-t^4)^2}{36}\frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\,dt=\frac{1}{3}\int t^4\,dt=\frac{1}{15}t^5+C=\frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5+C.\ ▶$$

Пример 5. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}.$$

◀ Общий знаменатель дробных показателей степеней x равен 12, поэтому подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{(\sqrt[12]{x})^3\left[(\sqrt[12]{x})^4+(\sqrt[12]{x})^6\right]},$$

откуда видно, что она является рациональной функцией от x и $\sqrt[12]{x}$, т. е. $R(x, \sqrt[12]{x})$. Учитывая это, положим $t=\sqrt[12]{x}$, $x=t^{12}$, $dx=12t^{11}\,dt$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}=\int\frac{12t^{11}\,dt}{t^3(t^4+t^6)}=12\int\frac{t^4\,dt}{1+t^2}=12\int\frac{(t^4-1)+1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=12\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=12\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)+C=4\sqrt[4]{x}-12\sqrt[12]{x}+12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}+C. \text{ ▶}$$

2. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где подынтегральная функция такова, что заменив в ней радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ через y, получим функцию $R(x, y)$ — рациональную относительно обоих аргументов x и y. Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции другой переменной *подстановками Эйлера*.

8.1. Первая подстановка Эйлера

Пусть коэффициент $a>0$. Положим

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x.$$

Тогда

$$(t-\sqrt{a}\,x)^2=ax^2+bx+c,$$

или

$$t^2-2\sqrt{a}\,xt=bx+c.$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t:

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

и, значит,

$$dx=\frac{2t(2\sqrt{a}\,t+b)-(t^2-c)2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt=2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}.$$

Таким образом, указанная подстановка выражает x, dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально через t. Поэтому будем иметь

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_1(t)\,dt,}$$

где

$$\boxed{R_1(t)=R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}}$$

является рациональной функцией от t.

Замечание. Первую подстановку Эйлера можно брать и в виде

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x.$$

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}.$$

◀ Так как $a = 1 > 0$, то применяя подстановку Эйлера $t = \sqrt{x^2+\alpha^2} + x$, найдем

$$x = \frac{t^2-\alpha^2}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+\alpha^2} = t - \frac{t^2-\alpha^2}{2t} = \frac{t^2+\alpha^2}{2t}.$$

Поэтому будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int \frac{2t}{t^2+\alpha^2}\,\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha^2}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задача. Применяя первую подстановку Эйлера, показать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-\alpha^2}\right| + C, \quad |x| > |\alpha|.$$

8.2. Вторая подстановка Эйлера

Пусть трехчлен ax^2+bx+c имеет различные действительные корни x_1 и x_2 (коэффициент a может иметь любой знак). В этом случае полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t \quad \left(\text{или} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_2)t\right).$$

Так как

$$ax^2+bx+c = (x-x_1)^2t^2,$$

то получаем

$$a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2t^2, \quad \text{или} \quad a(x-x_2) = (x-x_1)t^2,$$

откуда находим

$$x = \frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a} - x_1\right)t = \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}.$$

Так как x, dx и $\sqrt{ax^2+bc+c}$ выражаются рационально через t, то исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции, т. е.

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R_1(t)\,dt,}$$

где

$$\boxed{R_1(t) = R\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}}$$

— рациональная функция от t.

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

◀ Функция $1 - x^2$ имеет различные действительные корни $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Поэтому применяем вторую подстановку Эйлера

$$\sqrt{1-x^2} = (1+x)t \quad (\text{или} \quad \sqrt{1-x^2} = (1-x)t).$$

Отсюда находим

$$1 - x^2 = (1+x)^2 t^2, \quad 1 - x = (1+x)t^2, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x - 2 = -\frac{3t^2+1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = -\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Подставляя найденные выражения для $x-2$, $\sqrt{1-x^2}$ и dx в данный интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(t^2+1)(t^2+1)4t\,dt}{(3t^2+1)2t(t^2+1)^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}\,t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3 \cdot \frac{1-x}{1+x}} + C. ▶$$

8.3. Третья подстановка Эйлера

Пусть коэффициент $c > 0$. Делаем замену переменной, положив

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \quad (\text{или } \sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}).$$

Заметим, что для приведения интеграла

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

к интегралу от рациональной функции достаточно первой и второй подстановок Эйлера. В самом деле, если дискриминант $b^2 - 4ac > 0$, то корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ действительны, и в этом случае применима вторая подстановка Эйлера. Если же $b^2 - 4ac < 0$, то знак трехчлена $ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком коэффициента a, и так как трехчлен должен быть положительным, то $a > 0$. В этом случае применима первая подстановка Эйлера.

Для нахождения интегралов указанного выше вида не всегда целесообразно применять подстановки Эйлера, так как для них можно найти и другие способы интегрирования, приводящие к цели быстрее. Рассмотрим некоторые из таких интегралов.

1. Для нахождения интегралов вида

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a \neq 0,}$$

выделяют полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + P,$$

где

$$\boxed{P = \frac{4ac - b^2}{4a}.}$$

После этого делают подстановку

$$\boxed{t = x + \frac{b}{2a},} \quad dx = dt$$

и получают

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + P}},}$$

где коэффициенты a и P имеют разные знаки или они оба положительны. При $a > 0$ и $P > 0$, а также при $a > 0$ и $P < 0$ интеграл сведется к логарифму, если же $a < 0$ и $P > 0$ — к арксинусу.

Пример 8. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

◀ Так как $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, то, полагая $x - 2 = t$, $dx = dt$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C = \ln\left(x - 2 + \sqrt{x^2-4x+5}\right) + C. ▶$$

Пример 9. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}}.$$

◀ Имеем $6x - x^2 = -\left[(x^2 - 6x + 9) - 9\right] = 9 - (x-3)^2$. Полагая $x - 3 = t$, $dx = dt$, будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x-3}{3} + C. ▶$$

2. Интеграл вида

$$\boxed{\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \quad a \neq 0,}$$

приводится к интегралу из п. 1 следующим образом. Учитывая, что производная $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, выделяем ее в числителе:

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \int \frac{M\frac{1}{2a}[(2ax + b) - b] + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Пример 10. Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx.$$

◄ Выделяем в числителе производную подкоренного выражения. Так как $(6x-x^2)' = 6-2x$, то будем иметь, учитывая результат примера 9,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(6-2x)-8}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx =$$

$$= 4\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(6x-x^2)}{\sqrt{6x-x^2}} = 4\arcsin\frac{x-3}{3} - \sqrt{6x-x^2} + C. \ ►$$

3. Интегралы вида

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,}$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-ой степени, можно находить методом неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем. Допустим, что имеет место равенство

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A_n\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

где $Q_{n-1}(x)$ —многочлен $(n-1)$-ой степени с неопределенными коэффициентами:

$$Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ продифференцируем обе части (1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + + Q_{n-1}\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + A_n\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{2}$$

Затем правую часть равенства (2) приводим к общему знаменателю, равному знаменателю левой части, т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$, сокращая на который обе части (2), получим тождество

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + A_n, \tag{3}$$

в обеих частях которого стоят многочлены степени n. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (3), получим $n+1$ уравнений, из которых находим искомые коэффициенты $A_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя их значения в правую часть (1) и найдя интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

получим ответ для данного интеграла.

Пример 11. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

◀ Положим

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (A_0 + A_1 x)\sqrt{x^2+2x+2} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \tag{4}$$

Дифференцируя обе части равенства, будем иметь

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A_1\sqrt{x^2+2x+2} + (A_0 + A_1 x)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и сокращая на него обе части, получим тождество

$$x^2 = A_1(x^2+2x+2) + (A_0 + A_1 x)(x+1) + A_2,$$

или

$$x^2 = 2A_1x^2 + (2A_1 + A_1 + A_0)x + (A_0 + 2A_1 + A_2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 2A_1 = 1 \\ x^1 & A_0 + 3A_1 = 0 \\ x^0 & A_0 + 2A_1 + A_2 = 0 \end{array}\right\},$$

из которой находим $A_0 = -\frac{3}{2}$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Затем находим интеграл, стоящий в правой части равенства (4):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

Следовательно, искомый интеграл будет равен

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C. \ ▶$$

§ 9. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx,} \tag{1}$$

в котором подынтегральная функция является рациональной функцией как от $\sin x$, так и от $\cos x$ одновременно. Например, функция

$$f(x) = \frac{1 - 2\sin x}{2 + \cos^2 x}$$

является рациональной функцией одновременно и от $\sin x$ и от $\cos x$; функция

$$g(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\sqrt{\cos x} + \cos x}$$

является рациональной относительно $\sin x$, но не является рациональной относительно $\cos x$ (функции такого типа мы рассматривать не будем).

Интеграл (1) с помощью замены переменной $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, где $-\pi < x < \pi$, сводится к интегралу от рациональной функции. В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

поэтому

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,}$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

◄ Применяя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, найдем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \text{ ►}$$

Указанная подстановка иногда приводит на практике к громоздким выкладкам, поэтому укажем несколько частных случаев, в которых интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ может быть найден с помощью более простых подстановок.

А. Пусть интеграл имеет вид

$$\boxed{\int R(\sin x)\cos x\,dx.}$$

Тогда подстановка $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ приводит интеграл к виду

$$\boxed{\int R(t)\,dt.}$$

Пример 2.

$$◄ \int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x} = \left|\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\sin x\right) + C. \text{ ►}$$

Б. Интеграл имеет вид

$$\boxed{\int R(\cos x)\sin x\,dx.}$$

Полагая $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$, приводим интеграл к виду

$$-\int R(t)\,dt.$$

Пример 3.

$$◄ \int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \cos x \\ \sin x\,dx = -dt \end{array}\right| = -\int \frac{dt}{2+t} = -\int \frac{d(2+t)}{2+t} = -\ln(2+t) + C = -\ln(2+\cos x) + C. \text{ ►}$$

В. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ содержит $\sin x$ и $\cos x$ только в четных степенях, то удобно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Функция $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ в этом случае выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$, а следовательно, и через t. В самом деле,

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

В результате этой подстановки интеграл приведется к виду

$$\boxed{\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,}$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t.

Пример 4. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2}$$

◀ Положим $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{4}{1+t^2} + 2}\,\frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + C. \ ▶$$

Г. Рассмотрим интеграл вида

$$\boxed{\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx,}$$

где α, β — действительные числа, и укажем два случая, когда этот интеграл выражается через элементарные функции.

а) Одно из чисел α или β является положительным нечетным числом. Пусть, например, $\beta = 2k+1$, где $k > 0$ — целое, а второй показатель степени, т. е. α, может быть любым действительным числом. Тогда, используя тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, интеграл можно представить в виде

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx = \int \sin^\alpha x \cos^{2k+1} x\,dx =$$
$$= \int \sin^\alpha x (\cos^2 x)^k \cos x\,dx = \int \sin^\alpha x (1 - \sin^2 x)^k \cos x\,dx.$$

Положив

$$\sin x = t, \quad \cos x\,dx = dt,$$

будем иметь

$$\int \sin^\alpha x \cos^{2k+1} x\,dx = \int t^\alpha (1-t^2)^k\,dt.$$

Возводя $1-t^2$ в степень k по формуле бинома Ньютона и умножая все члены полученного многочлена на t^α, получим $k+1$ степенных функций, интегрирование которых очевидно.

Пример 5. Найти интеграл

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx.$$

◀ Имеем

$$\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^4 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\end{matrix}\right| =$$
$$= \int t^2(1-t^2)^2\,dt = \int (t^2-2t^4+t^6)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C. \blacktriangleright$$

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ \sin x\,dx = -dt\end{matrix}\right| =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \blacktriangleright$$

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\end{matrix}\right| =$$
$$= \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt = 2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}(\sqrt{\sin x})^5 + C. \blacktriangleright$$

б) Числа α и β являются положительными четными числами, т. е. $\alpha = 2m$, $\beta = 2n$, где m и n — натуральные числа. В этом случае иногда удобно преобразовывать подынтегральную функцию, используя известные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{1}$$

В результате применения этих формул при $m \neq n$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx = \int (\sin^2 x)^m(\cos^2 x)^n\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2^{m+n}}\int (1-\cos 2x)^m(1+\cos 2x)^n\,dx.$$

Возводя биномы $1-\cos 2x$ и $1+\cos 2x$ соответственно в степени m и n и раскрывая скобки, получим сумму, члены которой содержат нечетные и четные степени $\cos 2x$. Члены с нечетными степенями $\cos 2x$ интегрируются как указано в п. а). К членам с четными степенями $\cos 2x$ снова применяем формулы (1), в результате чего получим степени $\cos 4x$. Продолжая так дальше, дойдем до интегралов вида $\int \cos kx\,dx$ (где $k > 0$ — четное число), которые легко находятся.

В случае, когда $m = n$, используется также формула

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

применение которой дает

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2n} x \, dx = \int (\sin x \cos x)^{2n} \, dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^{2n} dx =$$
$$= \frac{1}{4^n} \int \sin^{2n} 2x \, dx = \frac{1}{4^n} \int (\sin^2 2x)^n \, dx =$$
$$= \frac{1}{4^n} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{8^n} \int (1 - \cos 4x)^n \, dx.$$

Последний интеграл находится так, как указано выше.

Пример 8.

$$◀ \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \left[1 + \cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\right] dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \sin^2 2x \cos 2x\right) dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C. ▶$$

Пример 9.

$$◀ \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C. ▶$$

2. Интегралы вида

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx}$$

легко находятся с помощью тригонометрических формул ($\alpha \neq \beta$):

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x\right],$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x\right],$$
$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right].$$

Найдем, например, первый интеграл. Имеем

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta}\right] + C.$$

Остальные два интеграла находятся аналогично.

Пример 10.

$$◀ \int \cos 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. ▶$$

Упражнения

Используя таблицу простейших интегралов, найдите следующие интегралы:

1. $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.
3. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.
4. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.
5. $\int 2^x 8^x\,dx$.
6. $\int \frac{6^x}{3^{2x}}\,dx$.
7. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$.
8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$.
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos^3 x}\,dx$.
10. $\int \frac{\sin 7x+\sin 3x}{\sin 5x\cos 2x}\,dx$.
11. $\int (\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)^2\,dx$.
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$.
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x}$.
14. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} x}\,dx$.
15. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.
16. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.
17. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.
18. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Применяя метод подстановки, найдите следующие интегралы:

21. $\int xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx$.
22. $\int x^2\sin\frac{x^3}{3}\,dx$.
23. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
24. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(1+\sqrt[4]{x})}$.
26. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.
28. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$.
29. $\int x^2(x-1)^{18}\,dx$.
30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.
31. $\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx$.
32. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.
33. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
34. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$.
35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$.
36. $\int \frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$.
37. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln\sin x}\,dx$.
38. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}e^{\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.
39. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\cdot e^{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2}\,dx$.
40. $\int \frac{\ln x}{x(4+\ln^2 x)}\,dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, найдите следующие интегралы:

41. $\int xe^{-x}\,dx$.
42. $\int x2^x\,dx$.
43. $\int x\sin 2x\,dx$.
44. $\int (1+x)e^x\,dx$.
45. $\int (1+x\ln 2)2^x\,dx$.
46. $\int (2x-x^2)e^{-x}\,dx$.
47. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.
48. $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$.
49. $\int \arcsin x\,dx$.
50. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.
51. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.
52. $\int \cos(\ln x)\,dx$.
53. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

Найдите интегралы от простейших дробей:

54. $\int \frac{2\,dx}{5+2x}$. **55.** $\int \frac{dx}{2-3x}$. **56.** $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$.

57. $\int \frac{dx}{(1-2x)^5}$. **58.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. **59.** $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$.

60. $\int \frac{x+1}{x^2-x+2}\,dx$. **61.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+7x+13}$.

Найдите интегралы от рациональных функций, применяя метод неопределенных коэффициентов:

62. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx$. **63.** $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$. **64.** $\int \frac{3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$.

65. $\int \frac{x^3-x+2}{x^2-1}\,dx$. **66.** $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx$. **67.** $\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx$.

68. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^4}\,dx$. **69.** $\int \frac{dx}{x^3+x^4}$. **70.** $\int \frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$.

71. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **72.** $\int \frac{dx}{x^4-1}$. **73.** $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

Найдите интегралы от иррациональных функций:

74. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. **75.** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$. **76.** $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

77. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$. **78.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$. **81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. **82.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

83. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-6x-1}}\,dx$. **84.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+6x-x^2}}\,dx$. **85.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{1+6x-x^2}}\,dx$.

86. $\int \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. **87.** $\int \frac{1+2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **88.** $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$.

89. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **90.** $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Найдите интегралы от тригонометрических функций:

91. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$. **92.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. **93.** $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

94. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. **95.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$. **96.** $\int \frac{\cos x\,dx}{5+\sin^2 x-6\sin x}$.

97. $\int \frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x+\sin x}\,dx$. **98.** $\int \cos^3 x\,dx$. **99.** $\int \sin^5 x\,dx$.

100. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$. **101.** $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$. **102.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

103. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$. **104.** $\int \sin^4 x\,dx$. **105.** $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

106. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. **107.** $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$. **108.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

109. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x}$. **110.** $\displaystyle\int \sin 5x \cos x\,dx$. **111.** $\displaystyle\int \sin x \cos 5x\,dx$.

112. $\displaystyle\int \cos 7x \cos 3x\,dx$. **113.** $\displaystyle\int \sin 15x \sin 10x\,dx$. **114.** $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.

115. $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$.

Ответы

1. $0{,}3x^{10/3}+C$. **2.** $4\sqrt[4]{x}+C$. **3.** $\frac{8}{15}x^{15/8}+C$. **4.** $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+C$. **5.** $\frac{16^x}{\ln 16}+C$. **6.** $\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$. **7.** $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$. **8.** $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$. **9.** $2\operatorname{tg} x+C$. **10.** $2x+C$. **11.** $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x-4x+C$. **12.** $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. **13.** $-\operatorname{th} x-\operatorname{cth} x+C$. **14.** $2\operatorname{ch} x+C$. **15.** $x-\operatorname{th} x+C$. **16.** $x-\operatorname{ch} x+C$. **17.** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x+C$. **18.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$. **19.** $\ln\sqrt{2x+\sqrt{4x^2+9}}+C$. **20.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}x+C$. **21.** $e^{x^2/2}+C$; **22.** $-\cos\frac{x^3}{3}+C$. **23.** $-\sqrt{1-x^2}+C$. **24.** $\ln|\ln x|+C$. **25.** $4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. **26.** $-8\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}+C$. **27.** $-2\ln\left(e^{-x/2}+\sqrt{1+e^{-x}}\right)+C$. **28.** $\ln|e^x-1|+e^x+C$. **29.** $\frac{(x-1)^{21}}{21}+\frac{(x-1)^{20}}{10}+\frac{(x-1)^{19}}{19}+C$. **30.** $2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x-1}$. **31.** $\frac{3}{7}(x+1)^{7/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+C$. **32.** $\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3)+C$. **33.** $-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{(1-x)^3}+C$. **34.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x^2+C$. **35.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3+C$. **36.** $\frac{1}{4}\ln^2\operatorname{tg} x+C$. **37.** $\ln|\ln\sin x|+C$. **38.** $\frac{1}{2}e^{\operatorname{tg}^2 x}+C$. **39.** $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}^2 x}+C$. **40.** $\ln\sqrt{4+\ln^2 x}+C$. **41.** $-(x+1)e^{-x}+C$. **42.** $\frac{x\ln 2-1}{\ln^2 2}2^x+C$. **43.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+C$. **44.** xe^x+C. **45.** $x2^x+C$. **46.** $x^2e^{-x}+C$. **47.** $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}+C$. **48.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C$. **49.** $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$. **50.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. **51.** $-\frac{x^2}{2}+x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. **52.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$. **53.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **54.** $\ln|5+2x|+C$. **55.** $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **56.** $-\frac{1}{6(3x+5)^2}+C$. **57.** $\frac{1}{8(1-2x)^4}+C$. **58.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. **59.** $\ln\sqrt{x^2+2x+5}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}+C$. **60.** $\ln\sqrt{x^2-x+2}+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$. **61.** $\ln\sqrt{x^2+7x+13}-\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C$. **62.** $\ln|x^2+3x-10|+C$. **63.** $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{|2x+1|}}+C$. **64.** $\ln|(x-1)(x^2-4)|+C$. **65.** $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **66.** $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$. **67.** $\frac{1}{x+3}+\ln|x+3|+C$. **68.** $\frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{1}{x+1}+C$. **69.** $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. **70.** $\frac{1}{x-1}+\ln|x+1|+C$. **71.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **72.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. **73.** $\frac{1}{3}\left(\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$. **74.** $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$. **75.** $2\sqrt{1+x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$. **76.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **77.** $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3}+C$. **78.** $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}|+C$. **79.** $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. **80.** $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}|+C$. **81.** $\ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+5})+C$. **82.** $\arcsin\frac{x+2}{3}$. **83.** $\sqrt{x^2-6x-1}+4\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-1}|+C$. **84.** $2\sqrt{1+6x-x^2}+4\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{10}}+C$. **85.** $-\sqrt{1+6x-x^2}+C$. **86.** $x\sqrt{x^2+2x+2}+C$. **87.** $x^2\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$. **88.** $x\sqrt{x^2+2}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C$. **89.** $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}+C$. **90.** $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$. **91.** $\ln\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+C$. **92.** $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. **93.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C$. **94.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. **95.** $\ln(1+\sin^2 x)+C$. **96.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}+C$. **97.** $-x+2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **98.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. **99.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. **100.** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. **101.** $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. **102.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$. **103.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **104.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **105.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **106.** $-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. **107.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. **108.** $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{ctg} 2x+C$. **109.** $-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **110.** $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 4x}{8}+C$. **111.** $-\frac{\cos 6x}{12}+\frac{\cos 4x}{8}+C$. **112.** $\frac{\sin 10x}{20}+\frac{\sin 4x}{8}+C$. **113.** $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$. **114.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+C$. **115.** $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$.