1	2	3	4	5	Σ
5	4.5	5	5	5	24.5

Отл (10 б)

3) Найти уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

а) Найдём $x_0 = x(\frac{\pi}{2})$, $y_0 = y(\frac{\pi}{2})$: $x_0 = 2(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}) = \pi - 2$

$y_0 = 2(\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}) = \pi$

б) Найдём $y'_x(\frac{\pi}{2})$: $x'_t = 2(1 - \cos t)$
$y'_t = 2(1 + \sin t)$ $\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}$,

+

$y'_x(\frac{\pi}{2}) = 2$

Уравнение касательной: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

$\Rightarrow y - \pi = 2(x - \pi + 2)$

$\Rightarrow y - \pi = 2x - 2\pi + 4$

$\Rightarrow \underline{2x - y - \pi + 4 = 0}$ +

5

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

$\Rightarrow y - \pi = -\frac{1}{2}(x - \pi + 2)$

$\Rightarrow y - \pi = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - 1$

$\Rightarrow \underline{\frac{x}{2} + y - \frac{3\pi}{2} + 1 = 0}$ +

4) Проведите необходимое исследование и постройте график функции $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$

а) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x\to -0} y = \lim\limits_{x\to -0}(xe^{\frac{2}{x}} + 1) = (-0 \cdot \underbrace{e^{\frac{2}{-0}}}_{e^{-\infty}} + 1) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to +0} y = \lim\limits_{x\to +0}(xe^{\frac{2}{x}} + 1) = (+0 \cdot e^{+\infty} + 1) = (\lim\limits_{x\to +0} xe^{\frac{2}{x}}) + 1 =$

$= \lim\limits_{x\to +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} + 1 = \lim\limits_{x\to +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}(-\frac{2}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})} + 1 = \lim\limits_{x\to +0} 2e^{\frac{2}{x}} + 1$

$= +\infty + 1 = +\infty$

$\Rightarrow$ прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота б) Наклонная асимптота.

При $x \to +\infty$:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x e^{\frac{2}{x}}+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left(e^0 + \frac{1}{\infty}\right) = 1+0 = 1.$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{2}{x}}+1-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)x+1\right]$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1 + \lim_{x\to+\infty} 2e^{\frac{2}{x}} = 3$$

$\Rightarrow$ Прямая $y = x+3$ – асимптота при $x \to +\infty$

При $x \to -\infty$:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x e^{\frac{2}{x}}+1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^0 + \frac{1}{\infty} = 1+0 = 1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{2}{x}}+1-x = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)+1\right] =$$

$$= 3$$

$\Rightarrow$ Прямая $y = x+3$ – асимптота при $x \to -\infty$.

в) Точки экстремума:

$$y' = 1\cdot e^{\frac{2}{x}} + x\, e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right) = e^{\frac{2}{x}}\left(1-\frac{2}{x}\right) = e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{x-2}{x}$$

$y' = 0$: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$y'\ \nexists$: $x = 0 \notin D(y)$.

Знак y':
$$\begin{array}{ccccccc} & + & \circ & - & \overset{min}{\bullet} & + & \\ & \nearrow & 0 & \searrow & 2 & \nearrow & \end{array}$$

$x=2$ – точка минимума

$y_{min} = y(2) = 2e^1+1 = 2e+1 \approx 6{,}4$

г) Точки перегиба:

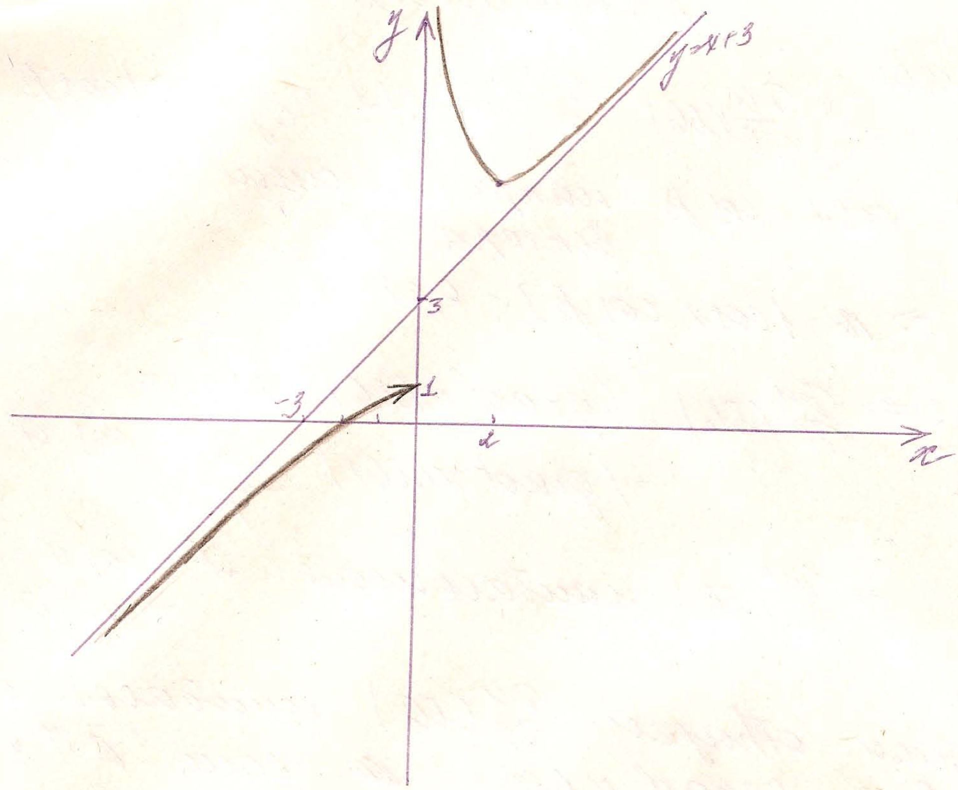
$$y'' = e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot\frac{x-2}{x} + e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2} = e^{\frac{2}{x}}\frac{2}{x^2}\left(-1+\frac{2}{x}+1\right) = e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{4}{x^3}$$

$y'' = 0$: таких точек нет

$y''\ \nexists$: $x = 0 \notin D(y)$

знак y'':
$$\begin{array}{ccccc} & - & \circ & + & \\ & \cap & 0 & \cup & \end{array}$$

Точек перегиба нет.



+

5

1) Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной если $\exists M>0$ такое, что $|x_n|<M$, $\forall n$.
В противном случае последовательность называется неограниченной
Последовательность $\{10^n\}$ - неограничена
Действительно, пусть $M>0$. Тогда $\exists \lg M$,
$N=[\lg M]+1$,
т.к. $N > \lg M$, то получаем:

$$\underbrace{10^N}_{x_n} > \underbrace{10^{\lg M}}_{M}$$

5

Получили: $\forall M>0 \ \exists N$ такое, что $|x_n|>M$
$\Rightarrow \{10^n\}$ - неограниченная

2) Пусть $u=f(x,y)$. Градиентом функции $u=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор $\{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\}$
Обозначают: $\operatorname{grad} u(M_0)$
Свойства: 1) $\operatorname{grad} u(M_0) \perp$ ~~поверхности~~ линия уровня проходящей через M_0
2) $\operatorname{grad} u(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью

Доказательство (свойства 2)

Имеем:
$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$

$\Rightarrow n_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ - орт $\bar{l}$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0), \bar{n}_0) =$$
$$= |\operatorname{grad} u(M_0)| \cdot \underbrace{|\bar{n}_0|}_{1} \cdot \cos\varphi$$

4.5

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ наибольшая $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi = 1$ $\Rightarrow \varphi = 0$.

Таким образом $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ наибольшая и равна $|\operatorname{grad} u(M_0)|$ если $\bar{l} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} u(M_0)$

А для случая $u(x\,y\,z)$?

5) Записать формулу Тейлора для функции $z = x^{y+1}$ в окрестности точки $M(1,1)$ (до членов 2-го порядка включительно)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!} + o(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

Имеем

а) $f(x_0,y_0) = 1^{1+1} = 1$

б) $\frac{\partial f}{\partial x} = (y+1)\cdot x^y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y+1}\cdot \ln x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0.$
$\Bigg\} \Rightarrow df(M_0) = 2\Delta x$

5

в) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+1)y\,x^{y-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = x^y + (y+1)\cdot x^y\cdot \ln x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^{y+1}\ln^2 x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 0$

$\Rightarrow d^2f(M_0) = 2\Delta x^2 + 2\cdot 1\,\Delta x\Delta y + 0$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1 + \frac{2(x-1)}{1!} + \frac{2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1)}{2!} + o(\Delta x^2, \Delta y^2)$$