

### Вариант 16

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = 2 + x, x_0 = 11$ ;      1.2.  $f(x) = \begin{cases} 3^{x \sin \frac{1}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = 1 - x + \ln(1 + x)$ ;      2.2.  $y = 3^{x+1} - \cos x + (x + 1)^3$ ;

2.3.  $y = (1 + 2x^3)^2 \cdot e^{\sqrt{1-x}}$ ;      2.4.  $y = \frac{3x^4 + x^3 - 3}{\sqrt{1-2x^2}}$ ;

2.5.  $y = \sqrt[3]{3x-3} - \frac{1}{\sqrt[4]{10-x^4+x}}$ ;      2.6.  $y = \operatorname{tg}^3(1-2x)^2$ ;

2.7.  $y = \ln(2^x - \sqrt{x - \sqrt{2x}})$ ;      2.8.  $y = \operatorname{arctg}(\sin 4x + \sqrt{\cos x})$ .

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x)$ :  $2x - 3y = x \ln y$ .

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

6.1.  $y = \sin^3 x + \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;      6.2.  $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \end{cases} M_0\left(3; \frac{2}{3}\right).$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

7.1.  $y = (1+x)^3 \cdot \ln^2(x+1)$ ;      7.2.  $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[3]{2x + \cos x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.01)$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x^3}{x+1}$  в точке  $x_0 = 1$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{2 \operatorname{tg} 2x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$ .

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

a)  $y = \ln(2-x), x_0 = 1$ ;      б)  $y = \sin(5x/2), x_0 = 0$ .

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 + x^2 - x + 2; \quad б) y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}; \quad в) y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad [-2; 2]; \quad б) y = \frac{x-2}{x^2+5}, \quad [2; 8].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = e^{2x-x^2}; \quad б) y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:  $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты:  $x = -1, x = 1$

3) Горизонтальные асимптоты:  $-$

4) Наклонные асимптоты:  $y = \frac{1}{2}x.$

5) Стационарные точки:  $-2\frac{1}{2}; 0; 2\frac{1}{2}.$

6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :  $-4.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:  $(-\infty; -4), (-2\frac{1}{2}; -1), (-1; 1), (2\frac{1}{2}; \infty);$

б) убывания:  $(-4; -2\frac{1}{2}), (1; 2\frac{1}{2}).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:  $(-1; 0), (4; \infty);$

б) вогнутости:  $(-\infty; -4), (-4; -1), (0; 1), (1; 4).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-4) = 0, y(-2\frac{1}{2}) = -2, y(0) = 0, y(2\frac{1}{2}) = 0, y(4) = 1.$$

## Вариант 17

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

$$1.1. f(x) = 1 + x - x^2, x_0 = 1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= 1 - x^2 + \ln(1 - x); & 2.2. y &= 3^x - \log_3 x + x^3; \\ 2.3. y &= (1 + 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1-x}}; & 2.4. y &= \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{2 - x^2}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{3x^3 - x} - \frac{1}{\sqrt{10 - x^2 + x^4}}; & 2.6. y &= \sin^4(x - 2x^2); \\ 2.7. y &= \ln(3^x - \sqrt{2x - \sqrt{2 + x}}); & 2.8. y &= \cos(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sin x}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x)$ :  $2x - 3y = x \ln(y^2)$ .

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$6.1. y = x - x^3 - 2x^5, x_0 = 1; \quad 6.2. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

$$7.1. y = (x - 1)^3 \cdot \ln^2(1 - x); \quad 7.2. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(0.01)$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x-1}{x+1}$  в точке  $x_0 = 0$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right]; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^3} - 1 - x^3}{\operatorname{tg}^6 \frac{x}{2}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$a) y = \ln(3 - x), x_0 = 2; \quad б) y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2}, x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 14x - x^4; \quad б) y = x - \arctg x; \quad в) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 3x + 1, \quad [-1; \frac{1}{2}]; \quad б) y = \frac{x+6}{x^2+13}, \quad [-5; 5].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}; \quad б) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения:  $X \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ .
- 2) Вертикальные асимптоты:  $x = 2$
- 3) Горизонтальные асимптоты: —
- 4) Наклонные асимптоты:  $y = -\frac{1}{2}x - 1$ .
- 5) Стационарные точки:  $-4; 0; 4$ .
- 6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :  $-2$ .
- 7) Интервалы монотонности:
  - а) возрастания:  $(-4; -2), (2; 4)$ ;
  - б) убывания:  $(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$ .
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
  - а) выпуклости:  $(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$ ;
  - б) вогнутости:  $(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$ .
- 9) Значение функции в некоторых точках:  
 $y(-5) = 0, y(-4) = -2, y(-2) = 4, y(0) = 0, y(4) = -1, y(5) = -2$ .

### Вариант 18

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = 2 + x + x^2, x_0 = 1;$       1.2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = 1 - 2x + \ln(1 - 2x);$       2.2.  $y = 4^x - \log_4 x + x^4;$   
2.3.  $y = (1 - 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1+x}};$       2.4.  $y = \frac{3x^2 + 3}{\sqrt{2 + x^2}};$   
2.5.  $y = \sqrt[3]{3x^3 + x} - \frac{1}{\sqrt{10 + x^2 - x^4}};$       2.6.  $y = \sin^3(x + 2x^2);$   
2.7.  $y = \ln(3^x + \sqrt{2x + \sqrt{2 - x}});$       2.8.  $y = \cos(\operatorname{arctg} 4x - \sqrt{\operatorname{ctg} x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = x^{\frac{1}{\cos x}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x): x^2 - 3y = e^x \cdot y$ .

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

6.1.  $y = \operatorname{arctg} x - 2, x_0 = 0;$       6.2.  $\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} M_0(0; 0).$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

7.1.  $y = x \cdot \ln^3 x;$       7.2.  $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x / 2)}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.02)$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  в точке  $x_0 = 0$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{m}{x^2 - 1}};$       б)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right].$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

a)  $y = \ln(3 + x)$ ,  $x_0 = -2$ ;

б)  $y = \frac{x + \ln(1 - x)}{x}$ ,  $x_0 = 0$ .

12. Найти экстремумы функций:

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ;      б)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ ;      в)  $y = x \cdot \sqrt{1 - x}$ .

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a)  $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ ,  $[0; 2]$ ;      б)  $y = \frac{x - 3}{x^2 + 16}$ ,  $[-5; 5]$ .

14. Исследовать и построить графики функций:

a)  $y = x + \frac{1}{x}$ ;      б)  $y = x^3 \cdot e^{-x}$ .

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:  $X \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ .

2) Вертикальные асимптоты:  $x = 2$

3) Горизонтальные асимптоты:  $y = 1$  ( $x \rightarrow +\infty$ ),  $y = 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ )

4) Наклонные асимптоты: —

5) Стационарные точки:  $-1$ ;  $1$ ;  $4$ .

6) Точки, где ( $y' = \infty$ ):  $0$ .

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:  $(-1; 0)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 4)$ ;

б) убывания:  $(-\infty; -1)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(4; \infty)$ .

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:  $(-\infty; -2)$ ,  $(2; 5)$ ;

б) вогнутости:  $(-2; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(5; \infty)$ .

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-2) = -\frac{1}{2}$ ,  $y(-1) = -1$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y(3) = 1.5$ ,  $y(4) = 2$ ,  $y(5) = 1.5$ .

### Вариант 19

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

$$1.1. f(x) = x^2 - x, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x^2}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = x - x^3 + \ln(1 + 2x); \quad 2.2. y = 2^x + \log_2 x - x^2;$$

$$2.3. y = (1 + 2x^2) \cdot e^{\sqrt[4]{1-x}}; \quad 2.4. y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{2 - x^3}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} - \frac{1}{\sqrt{10 + 3x^4}}; \quad 2.6. y = \cos^4(x - 2x^2);$$

$$2.7. y = \ln(5^x - \sqrt{2x + \sqrt{2 - 5x}}); \quad 2.8. y = \sin(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x^2}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x)$ :  $x(x+y) = e^{x-y}$ .

5. Найти производную параметрической функции: 
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$6.1. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 1; \quad 6.2. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} M_0(2; 3).$$

7. Найти производную второго порядка  $y''_{xx}$  для функций:

$$7.1. y = x^3 \cdot \ln x; \quad 7.2. \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции  $y = \sqrt{x^2 + 5}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.97)$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$  в точке  $x_0 = -1$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]; \quad б) \lim_{x \rightarrow 2a} \left( 3 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4a}};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot \ln x].$$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$a) y = e^{3-x}, \quad x_0 = 2; \quad б) y = \frac{\ln(1-3x^3)}{x}, \quad x_0=0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x; \quad б) y = (x-5) \cdot e^x;$$

$$в) y = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad [-2;0]; \quad б) y = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad [-0.1;4].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = e^{-x^2}; \quad б) y = \frac{4x}{1+x^2}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения:  $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ .
- 2) Вертикальные асимптоты:  $x = -1$
- 3) Горизонтальные асимптоты: —
- 4) Наклонные асимптоты:  $y = x$ .
- 5) Стационарные точки:  $-2; 0$ .
- 6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :  $-3$ .
- 7) Интервалы монотонности:
  - а) возрастания:  $(-\infty; -3), (-2; -1), (1; \infty)$ ;
  - б) убывания:  $(-3; -2)$ .
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
  - а) выпуклости:  $(-1; 0)$ ;
  - б) вогнутости:  $(-\infty; -3), (-3; -1), (0; \infty)$ .
- 9) Значение функции в некоторых точках:  $y(-3) = -1, y(-2) = -3.5, y(0) = 1$ .



## Вариант 20

1. Исходя из определения производной, найти  $f'(x_0)$  для функций:

1.1.  $f(x) = x + x^2, x_0 = 2;$

1.2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1.  $y = (1 + x)^2 + \ln(1 + x);$

2.2.  $y = 6^x - \log_3 x + x^6;$

2.3.  $y = (1 - x)^3 \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x}};$

2.4.  $y = \frac{3x - 1}{\sqrt{2 - x}};$

2.5.  $y = \sqrt[3]{x^3 - x} - \frac{1}{\sqrt{1 - 3x^2 + x^4}};$

2.6.  $y = \sin^2(2x - x^2);$

2.7.  $y = \ln(5^x + 3 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}});$

2.8.  $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\cos x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции  $y = (\sqrt{1 - x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ .

4. Найти производную неявной функции  $y=y(x): x \cdot y = e^{x+y}$ .

5. Найти производную параметрической функции:  $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой  $y=y(x)$  в точке  $x_0$  и составить уравнение касательной и нормали в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

6.1.  $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}, x_0 = -2;$

6.2.  $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} M_0(-7; 4).$

7. Найти производную второго порядка  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функций:

7.1.  $y = x \cdot e^{x^3};$

7.2.  $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции  $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  $y(1.58)$ .

9. Найти дифференциал второго порядка функции  $y = \frac{x+1}{x-1}$  в точке  $x_0 = -1$ .

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 - xe^x};$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctgx})^{\frac{1}{\ln x}};$  в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} x - \sec x].$

11. Записать формулу Тейлора для функции  $y=f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$a) y = e^{x-4}, x_0 = 1;$$

$$б) y = \frac{x - \ln(1+x)}{x}, x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 2x^3 - 3x^2 + 1;$$

$$б) y = \frac{4x}{x^2 + 4};$$

$$в) y = x \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [0;4];$$

$$б) y = \frac{x-3}{x^2+16}, [3;10].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{4x}{(1+x^2)^2};$$

$$б) y = \frac{2^x}{x}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = 0$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

5) Стационарные точки:

$$-2; -1; 1.$$

6) Точки, где  $(y' = \infty)$ :

$$-3; 2.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-3; -2), (-1; 0), (1; 2);$$

б) убывания:

$$(-\infty; -3), (-2; -1), (0; 1), (2; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -3), (-3; -\frac{3}{2});$$

б) вогнутости:

$$(-\frac{3}{2}; 0), (0; 2), (2; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = 0, y(-2) = 3, y(-1.5) = 2, y(-1) = 1.5, y(1) = -2, y(2) = 0.$$