

Вопросы к коллоквиуму (на конференц-неделю):

1. Сформулировать и доказать теорему существования точной нижней (и верхней) грани у множества, ограниченного снизу (и сверху);
2. Сформулировать и доказать свойства бесконечно малых последовательностей:
 - а) об ограниченности бесконечно малой и неограниченности бесконечно большой последовательности,
 - б) об алгебраической сумме конечного числа бесконечно малых последовательностей,
 - в) о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную,
 - г) о последовательности, обратной бесконечно малой последовательности и наоборот;
 - д) о постоянной бесконечно малой последовательности.
3. Доказать утверждения типа: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ есть ограниченная последовательность,
 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ есть монотонно возрастающая последовательность.
4. Сформулировать и доказать свойства сходящейся последовательности:
 - 1) о единственности предела последовательности;
 - 2) об эквивалентности утверждений: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ и $x_n = A + \alpha_n$
 - 3) об ограниченности сходящейся последовательности
 - 4) об ограниченности последовательности, обратной к сходящейся
 - 5) о сумме двух сходящихся последовательностей
о произведении двух сходящихся последовательностей
о частном двух сходящихся последовательностей;
 - 6) о предельном переходе в неравенствах.
5. Сформулировать и доказать критерий сходимости любой последовательности (критерий Коши);
6. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса .
7. Сформулировать и доказать свойства о пределе суммы, произведения, частного функций;
8. Сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия существования предела функции в точке (теорема о существовании предела);
9. Доказать непрерывность всех элементарных функций в области их определения.
10. Сформулировать и доказать теорему о первом замечательном пределе
11. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$;
12. Сформулировать и доказать теорему о порядке произведения двух бесконечно малых функций по сравнению с сомножителями.
13. Сформулировать и доказать свойства эквивалентных бесконечно малых величин.
14. Сформулировать и доказать свойства эквивалентных бесконечно больших величин.
15. Сформулировать и доказать теорему Коши о промежуточном значении.

Для каждой теоремы и свойства привести пример, где она используется (можно график)