

Практика 4. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции к.п.

1. Найти предел последовательности

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3i)^n$.

2. Найти предел функции

а) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$; б) $\lim_{z \rightarrow -\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$; в) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 + (5 - 2i)z^2 - 6iz + 8}{z^2 + 4}$.

3. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие нет.

а) $w = ze^z$; б) $w = z^2 z^*$; в) $w = z^2 \operatorname{Re} z$; г) $w = z^* \operatorname{Im} z$.

4. Показать, что если f -я аналитическая в D , то в этой области выполняется

равенство
$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

5. Показать, что при переходе к полярным координатам (ρ, φ) условия Коши-

Римана принимают вид
$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

6. Показать, что функция $w = \ln z$ аналитическая.

7. (Доп) Доказать непрерывность а) $f(z) = z^*$; б) $f(z) = \operatorname{Re} z$.

Домашняя работа 4. (М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. УРСС. Москва, 2003, 205 с.)

1. Вычислить

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{i}{n}\right)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + in \cdot \sin \frac{n\pi}{2}\right)$.

2. Вычислить

а) $\lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}$; отв: $\sqrt{2}$

б) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$. отв: i .

3. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие нет.

а) $w = |z| \operatorname{Re} z^*$; б) $w = \sin 3z - i$

4. Вычислить
$$\frac{-\sqrt{3} + i}{e^{\frac{\pi}{3}i}}$$
 отв: $2i$.