О.М. Шепель, Н.И. Чабовская

МАТЕМАТИКА

Томск – 2006

УДК 373 167:1:512+514
ББК 22.141я 721+22.151я72

Рекомендовано к изданию методическим Советом Томского областного музыкального училища им. Э.В. Денисова 27 апреля 2005 г.

В пособии изложены разделы математики, предусмотренные стандартами вузов, общеобразовательной школы, музыкальных училищ и колледжей. Адресовано преподавателям высших учебных заведений, учителям математики, учащимся естественно-математического профиля общеобразовательных школ, студентам музыкальных образовательных учреждений.

Рецензент: доктор педагогических наук, профессор, директор Института инженерной педагогики ТПУ М.Г. Минин

ISBN 5-89702-149-X

ISBN 5-89702-149-X

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремление молодых искателей истины к постижению мира не только во всём многообразии, но и в неразрывном единстве всех его проявлений, заставляет современных авторов научной и учебной литературы объединять разрозненные лоскутки знаний в одно многоаспектное целое, как бы сложно это ни казалось. В настоящем учебном пособии каждый из рассматриваемых разделов математики представляет собой теоретическую подготовку осмысления материалов, излагаемых в курсе естествознания, или непосредственно объясняет математическую суть какого-либо явления. Например, раздел «музыкальные строи» знакомит читателя с математическими основами звуковых рядов, а также с историей их развития. Освоение раздела «Стереометрия», в частности, темы «Векторы в пространстве», поможет в дальнейшем при изучении электромагнитных полей на естественнонаучных уроках. Разделы «Дифференцирование» и «Интегрирование» станут теоретической основой рассмотрения скорости химических реакций и процессов радиоактивного распада. Во многих разделах приведены примеры решения задач. Хотя изложены они очень подробно, однако, учащимся лучше всего разбирать эти примеры вместе с преподавателем, тщательно переписывая в тетрадь, чтобы при самостоятельной работе над аналогичными заданиями у них уже были навыки восприятия задачи и оформления её решения.

В целом, настоящее пособие и «Естественникум» составленный О.М. Шепелем, А.О. Рассказовой (Естественникум: Учебное пособие / О.М. Шепель, А.О. Рассказова / Под ред. С.Е. Осокиной. – Томск: ФГУ «Томский ЦНТИ», 2006. – 220 с.), следует рассматривать как две части единого естественно-математического курса и использовать их рекомендуется совместно.

1. ЧИСЛА И ЦИФРЫ

Математика – это наука, изучающая закономерности превращения одних чисел в другие.

Число – это мера количества какого-либо объекта.

Цифра – это знак для обозначения числа.

Например, число «четыре» можно представить привычным арабским знбком «4» или римским «IV». В обоих случаях обозначено одно и то же число. Но разными цифрами.

Все числа условно подразделяются на действительные и мнимые. Рис. 1.

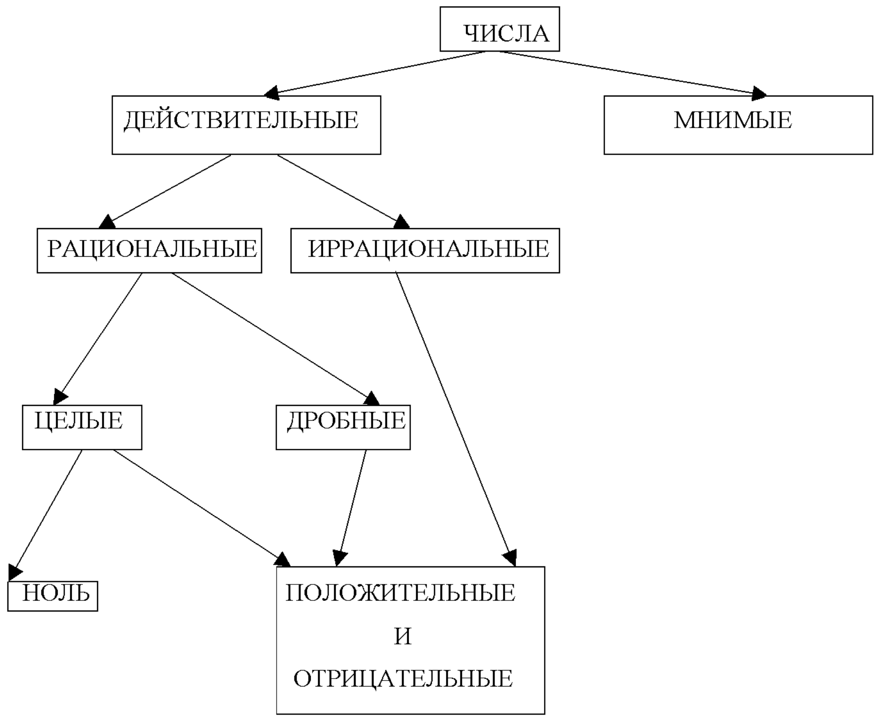


Рис. 1. Условная классификация чисел.

При этом под мнимым числом подразумевается произведение iy, где y – действительное число, i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$). Сумма действительного (x) и мнимого чисел $x + i$y называется ***комплексным числом.***

Действительными числами называется совокупность рациональных и иррациональных чисел. Числа, которые можно представить отношением целых чисел $\frac{m}{n}$, при условии, что $n \neq 0$, называются ***рациональными,*** (ноль относится к множеству целых чисел). Рациональные числа часто удобно представлять в виде десятичных дробей. Например, $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{327}{100} = 3{,}27$. Однако, нередко рациональное число невозможно записать в форме конечной десятичной дроби: $\frac{1}{3} = 0{,}33333333...$; $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142....$

Бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или несколько цифр (период дроби), называется периодической дробью. Периодические дроби принято записывать следующим образом:

$\frac{1}{3} = 0{,}(3)$ (читается: «ноль целых, три в периоде»); $\frac{1}{7} = 0{,}\ 142857$ (ноль целых, 142857 в периоде);

23, 14565656.... = 23, 14(56) (23 целых, 14 сотых, 56 в периоде). Необходимо отметить условность разделения дробей на периодические и конечные, поскольку любую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби с помощью ноля. Например, 0,1= 0,10000000....=0,1(0); 3,27 = 3,27000000... = 3,27(0). Если знаменатель рационального числа $\frac{m}{n}$ равен единице ($n = 1$), то оно оказывается *целым*. Например:

$\frac{3}{1} = 3$; $\frac{7}{1} = 7$; $\frac{29}{1} = 29$ и т.д. То есть, можно утверждать, что ***рациональные числа*** представляют собой совокупность целых и дробных чисел. Однако следует подчеркнуть и условность подразделения чисел на целые и дробные, поскольку, как видно из последних равенств, любое целое число можно считать частным случаем дроби.

Иррациональным числом называется *бесконечная* десятичная *непериодическая* дробь.

Например, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309......$; $\sqrt{3} = 1{,}73205080756.....$;

$\sqrt{7} = 2{,}64575131106459.....$;

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots = 2{,}718281828459......;$$

$$p = \frac{l}{d} = 3{,}14159265358.....,$$

где l – длина окружности, d - диаметр окружности. Интересно отметить, что в записи значения иррационального числа e после первого десятичного знака 7 два раза подряд записан год рождения Л.Н. Толстого. К иррациональным числам относится также золотое сечение (золотая пропорция), представляющее собой отношение $(1+\sqrt{5}):2 = 1{,}6180339\ldots$

Золотое сечение образуется в результате деления отрезка АС точкой В таким образом, что АВ:ВС = АС: АВ

При этом АВ: ВС = АС: АВ = $(1+\sqrt{5}):2 = 1{,}6180339\ldots$

Рациональные, а также иррациональные числа могут быть как положительными, так и отрицательными. Целые положительные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называются ***натуральными числами.***

Как видно из рис. 1 натуральные числа, с которых начинается изучение математики в школе, представляют собой лишь небольшой частный случай богатейшего разнообразия бесконечного мира чисел.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить выражения:

$$2^2 + 3i^2; \qquad (5 + 4i)^2 - 40i$$

Решение

$$2^2 + 3i^2 = 4 + 3(-1) = 4 - 3 = 1$$

$$\boxed{2^2 + 3i^2 = 1}$$

$$(5 + 4i)^2 - 40i = 25 + 40i + 16i^2 - 40i = 25 - 16 = 9$$

$$\boxed{(5 + 4i)^2 - 40i = 9}$$

Задача 2

Представить в виде функции мнимого числа площадь S квадратного листа со стороной a, в середине которого вырезан участок в виде меньшего квадрата со стороной b (b < a) (Рис. 2).

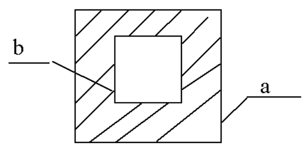


Рис. 2. Квадрат с удалённой частью площади.

Решение:

$$S = a^2 - b^2 = a^2 + (ib)^2$$

$$\boxed{S = a^2 + (ib)^2}$$

Задача 3

Произведения иррациональных чисел представить рациональным числом в виде дроби $\frac{m}{n}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{24{,}5}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

Решение

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{24{,}5} = \sqrt{2\cdot 24{,}5} = \sqrt{49} = 7 = \frac{7}{1}$$

$$\boxed{\sqrt{2}\cdot\sqrt{24{,}5} = \frac{7}{1}}$$

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3\cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3 = \frac{3}{1}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \frac{3}{1}}$$

Задача 4

Прочитать приведённые ниже числа и представить их в виде произведения $x\cdot 10^{n}$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$:

72 000 000 000;

0, 0000000003; .

Решение

72 000 000 000 – семьдесят два миллиарда

$72\,000\,000\,000 = 7{,}2\cdot 10^{10}$

0, 000 000 0003 – ноль целых, три десятимиллиардных.

$0{,}000\,000\,0003 = 3\cdot 10^{-10}$

Задача 5

Вычислить в молях количество стаканчиков мороженного, приобретённого покупателем в магазине, если он приобрёл их 6 штук. Один моль составляет $6{,}02 \cdot 10^{23}$ штук.

Решение

Если в одном моле $6{,}02 \cdot 10^{23}$ штук, то в одной штуке $1/(6{,}02 \cdot 10^{23})$ моль.

А в 6 штуках $\frac{6}{6{,}02} 10^{-23}$ моль $\approx 10^{-23}$ моль

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить выражения:

$$7^2 + 5i^2; \quad (3 + 2i)^2 - 12i; \ (7i - 4)^2 + 56i; \ 9i^2 - 1; \ 3i^2 + 3$$

2. Представить в виде функции мнимого числа площадь S круга с радиусом R, в середине которого вырезан участок в виде меньшего круга с радиусом r ($r < R$).

3. Представить в виде функции мнимого числа площадь S прямоугольного треугольника с катетами A и B, в середине которого вырезан меньший прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a < A$; $b<B$).

4. Приведённые ниже выражения представить рациональным числом в виде дроби $\frac{m}{n}$:

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$; $\quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; $\quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; $\quad \sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9}$;

$\sqrt{50} : \sqrt{8}$; $\quad \sqrt{12} : \sqrt{27}$; $\quad \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{54}$; $\quad \sqrt[3]{500} : \sqrt[3]{108}$

5. Прочитать приведённые ниже числа и представить их в виде произведения $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$:

9 000 000 000; 12 300 000; 0, 0534; 0, 00000123; 100; 10; 1;

100 000; 250 000; 0,1; 0, 01; $\frac{1}{1000}$; 0, 0001; 0, 0000000007

6. Доказать, что если AB: BC = $(1+\sqrt{5})$: 2, то AC: AB = $(1+\sqrt{5})$: 2

?

1. Дайте определения понятий число и цифра. Приведите конкретные примеры.
2. Что такое мнимое число и комплексное число?
3. Дайте определения следующим понятиям: действительное число, рациональное число, иррациональное число. Приведите примеры иррациональных чисел.

2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Числовой последовательностью называется совокупность чисел, являющихся функцией их порядкового номера. Наиболее распространены два способа задания последовательности (x_n): *аналитический* и *рекуррентный*.

При использовании аналитического способа задаётся функциональная зависимость между значением числа x_n и его порядковым номером n, например:

$$x_n = \frac{n^2}{5-2n}$$

где n – натуральные числа.

Иногда для выражения последовательности недостаточно одной формулы. Если

$$x_n = \frac{2}{n-3}$$

то третий член последовательности оказывается неопределённым. Чтобы последняя функция стала последовательностью необходимо доопределить её значение в точке n = 3. Например:

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-3} \text{ при } n \neq 3 \\ 1 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

При использовании рекуррентного способа задаётся функциональная зависимость между значениями соседних чисел x_{n+1} и x_n и указывается значение одного из членов последовательности, например:

$$x_{n+1} = x_n + 5 \text{ при } x_1 = 2$$

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему, сложенному с одним и тем же числом d, называют *арифметической прогрессией.* Это число d называют разностью арифметической прогрессии. Например, последняя из рассмотренных последовательностей является арифметической прогрессий с d = 5.

Последовательность (x_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \qquad (1)$$

Для любой арифметической прогрессии справедливы равенства:

$$x_n = x_1 + (n-1)\,d \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$$

где S_n – сумма первых n членов последовательности.

Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число q, называют *геометрической прогрессией*. Это число q называют знаменателем геометрической прогрессии. Например, последовательность

$$x_{n+1} = 2x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 5$$

является геометрической прогрессией с $q = 2$.

Последовательность (x_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство:

$$x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1} \qquad (3)$$

Для любой геометрической прогрессии справедливы равенства:

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

где S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии.

2.1. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить третий, десятый и сотый члены последовательности

$$x_n = \frac{n^2}{5-2n}$$

2. Рассчитать первые пять членов последовательности

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-3} \text{ при } n \neq 3 \\ 1 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

3. Определить первые три члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

$$x_{n+1} = x_n + 5 \text{ при } x_1 = 2$$

Проверить справедливость равенства (1) для x_2. С помощью равенства (2) представить эту последовательность аналитическим способом. Найти сумму первых ста членов этой последовательности.

4. Вычислить первые пять членов геометрической прогрессии

$$x_{n+1} = 2x_n \quad \text{при} \quad x_1 = 5$$

Проверить справедливость равенства (3) для x_3. Определить тридцать первый член этой прогрессии и рассчитать сумму первых пятидесяти членов этой прогрессии.

3. ПРАВИЛА ПЕРЕСЧЁТА ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

При переводе значения какой-либо величины в другую единицу измерения можно пользоваться следующим равенством:

$$y = k_{y/x} \cdot x \qquad (4)$$

где x – известное значение величины, измеряемое единицей измерения x,

y – искомое значение той же величины, измеряемой другой единицей измерения y,

$k_{y/x}$ – коэффициент пропорциональности, показывающий количество единиц y, содержащихся в одной единице x.

Правило 1

Умножением на коэффициент $k_{y/x}$ величины, измеряемой в единицах x, находится величина, измеряемая в единицах y.

Правило 2

Делением на коэффициент $k_{y/x}$ величины, измеряемой в единицах y, находится величина, измеряемая в единицах x.

Например, поскольку в одном сантиметре (1 см) содержится 10 миллиметров (10 мм), то, в качестве коэффициента пропорциональности между размерностями **см** и **мм** может быть выбрана величина:

$$k_{\text{мм/см}} = 10_{\text{мм/см}} \qquad (5)$$

либо

$$k_{\text{см/мм}} = 0{,}1_{\text{см/мм}} \qquad (6)$$

Если выбрать коэффициент (5), то, зная, что измеряемое расстояние равно, например, 5 см (x =5 см) легко определить это расстояние в миллиметрах, пользуясь правилом 1:

$$y_{\text{мм}} = 10 \text{ мм/см} \cdot 5 \text{ см} = 50 \text{ мм}$$

В данном случае $k_{y/x}$ = 10 мм/см.

Зная, что измеряемое расстояние равно 50 мм, на основании равенства

$$50 \text{ мм} = 10 \text{ мм/см} \cdot x \text{ см}$$

можно определить это расстояние в сантиметрах, пользуясь правилом 2:

$$x_{\text{см}} = \frac{50 \text{ мм}}{10 \text{ мм/см}} = 5 \text{ см}$$

Если выбрать коэффициент (6), то результатом применения правил 1 и 2 в данном случае станут следующие равенства:

$$y_{\text{см}} = 0{,}1 \text{ см/мм} \cdot 50 \text{ мм} = 5\text{см}$$

и

$$x_{\text{мм}} = \frac{50 \text{ см}}{0{,}1 \text{ см/мм}} = 50 \text{ мм}$$

Тождественность величин правильней обозначать знаком « $\equiv$ ». Например:

$$1\text{см} \equiv 10 \text{ мм}; \; 1 \text{ см} \equiv 10^{-2} \text{ м}; \quad 1\text{г} \equiv 10^{-3} \text{ кг и т.д.}$$

Интересно отметить, что если $y \equiv x$, например, $1\text{мл} \equiv 1\text{см}^3$, то $k_{y/x} = 1_{y/x}$; $k_{x/y} = 1_{x/y}$.

В данном случае $k_{\frac{\text{мл}}{\text{см}^3}} = 1_{\frac{\text{мл}}{\text{см}^3}}$; $k_{\frac{\text{см}^3}{\text{мл}}} = 1_{\frac{\text{см}^3}{\text{мл}}}$.

Подобно тому, как миллиметры и сантиметры являются различными единицами измерения длины, любая пара величин, связанная уравнением (4) может восприниматься как два аспекта единого свойства изучаемой действительности. Например, энергия (E) и масса (m):

$$E = c^2 m;$$

пространство (S) и время (t):

$$S = \upsilon t;$$

масса и пространство:

$$m = \rho V, \; (V = S_1 S_2 S_3);$$

и т.д. Коэффициентами пропорциональности в последних трёх уравнениях выступают квадрат скорости света, скорость поступательного движения и плотность соответственно.

3.1. Примеры решения задач

Задача 1

Выразить в квадратных метрах площадь S прямоугольника одна из сторон (a) которого 5 мм, другая (b) равна 15 мм. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$.

Решение

1м ≡ 100 см ≡ 1000 мм

При практическом решении задач размерность коэффициента удобней выбирать такой, чтобы числитель размерности представлял собой искомую размерность величины. В данном случае искомая размерность «метр», поэтому

$$k_{м/мм} = 0{,}001 м/мм$$

$$a_м = 0{,}001 м/мм \cdot 5 мм = 0{,}005 м$$

$$b_м = 0{,}001 м/мм \cdot 15 мм = 0{,}015 м$$

$$S_{м^2} = a_м \cdot b_м = 0{,}015 м \cdot 0{,}005 м = 0{,}000075 м^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-5} м^2$$

$$\boxed{S_{м^2} = 7{,}5 \cdot 10^{-5} м^2}$$

Задача 2

Выразить в граммах массу одного атома золота (M_r(Au)), равную 197 а.е.м, если 1а.е.м. ≡ $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$.

Решение:

$$1 кг \equiv 1000 г$$

$$k_{г/кг} = 1000 г/кг$$

$$1 а.е.м. \equiv 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг \equiv k_{г/кг} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг = 1000 г/кг \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг = 1{,}66 \cdot 10^{-24} г$$

То есть

$$1 а.е.м. \equiv 1{,}66 \cdot 10^{-24} г$$

$$k_{г/а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} г/а.е.м.$$

$$M_г(Au) = k_{г/а.\,е.м.} \cdot 197\ а.\,е.м. = 1{,}66 \cdot 10^{-24}\ г/а.\,е.\,м \cdot 197\ а.е.м. \approx 3{,}27 \cdot 10^{-22}\ г$$

$$\boxed{M_г(Au) \approx 3{,}27 \cdot 10^{-22}\ г.}$$

Задача 3

Вычислить в молях количество (N) стаканчиков мороженного, приобретённого покупателем в магазине, если он приобрёл их 6 штук, а один моль составляет $6{,}02 \cdot 10^{23}$ штук. Количество штук считать безразмерной величиной.

Решение:

$$1\ моль \equiv 6{,}02 \cdot 10^{23}\ моль$$

$$k_{моль} = \frac{1}{6{,}02 \cdot 10^{23}}$$

$$N\ моль = k_{моль} \cdot 6 = \frac{1}{6{,}02 \cdot 10^{23}}\ моль \cdot 6 \approx 10^{-23}\ моль$$

Ответ: N моль ≈ 10^{-23} моль

3.2. Задачи для самостоятельного решения:

1. Вычислить количество квадратных метров, содержащихся в 7, 5 км^2. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$.

2. Выразить в квадратных миллиметрах площадь прямоугольника, одна из сторон которого 200 м, а другая 50 м. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$.

3. Выразить в квадратных метрах площадь прямоугольника, длина (a) которого 3км, а ширина (b) равна 0,3мм. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \le x < 10$.

4. Выразить в метрах расстояние между солнцем и ближайшей звездой созвездия Кассиопея равное 6 800 световых лет, если скорость света составляет 300 000 км/с, а световой год – это расстояние, преодолеваемое светом за

один год. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \leq x < 10$.

5. Выразить в системе СИ следующие значения объёмов: 22,4 л, 11,2 дм^3, 3 мл, 5 см^3, девять кубометров, если 1 л $\equiv$ 1дм^3; 1мл $\equiv$ 1см^3

6. Выразить в системе СИ следующие концентрации растворов вещества: 0,1 моль/л; 0,5 моль/л; 0,3 моль/л.

7. Выразить в килограммах массу одной молекулы воды, равную 18 а. е.м. Представить ответ произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \leq x < 10$.

8. Выразить в метрах расстояние между атомом водорода и атомом кислорода в молекуле воды, равное 0,097 нм, если 1 нм $\equiv 10^{-9}$ м.

9. Выразите в молях количество вещества, содержащего: 6 молекул, 602 молекулы, 1204 молекулы, $6.02 \cdot 10^{23}$ молекул, $12{,}04 \cdot 10^{23}$ молекул.

10. Используя равенство $E=mc^2$ выразите в Джоулях массу собственного тела и представьте полученный результат произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \leq x < 10$.

11. С помощью формулы $S = \upsilon t$ выразите 1 час времени в метрах, преодолеваемых светом, если $\upsilon = c \approx 300\,000$ км/с. Представьте полученный результат произведением $x \cdot 10^n$, где n – целое число, x – рациональное число, удовлетворяющее требованию $1 \leq x < 10$.

12. Выразите в граммах пять литров воды, если её плотность равна 1г/мл.

13. Определить размерность и значение постоянной Фарадея (F), если при пропускании электричества (Q) в количестве 96 485 Кл через раствор $CuCl_2$, на катоде выделяется количество меди (n), равное 0, 5 моль, а зависимость количества осаждаемого металла от количества электричества определяется равенством:

$$Q = n \cdot F \cdot z,$$

где z – валентность металла, величина безразмерная.

?

1. Сформулируйте два правила пересчёта единиц измерения.
2. Объясните, в каких случаях следует использовать знак равенства, а в каких знак тождества?

4. ЛОГАРИФМЫ

Равенство

$$2^3 = 8$$

иначе может быть представлено следующим образом

$$\log_2 8 = 3$$

(Логарифм восьми по основанию два равен трём.) Или в общем случае, равенство

$$\mathbf{a}^c = \mathbf{b}$$

можно представить так

$$\log_a \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

(Логарифм b по основанию a равен c)

То есть, *логарифмом числа* **b** *по основанию* **a** *называется степень, в которую надо возвести число* **a**, *чтобы получить число* **b**.

Для $a = 1$ и $a > 0$ всегда можно найти единственный логарифм любого положительного числа. Если $a = 1$, то выражение $\log_1 1$ имеет бесконечное множество значений, поскольку единица в любой степени равна единице. А логарифмов других чисел по этому основанию просто не существует, потому что нет такой степени, при возведении в которую единицы получалось бы число, отличное от 1. Если же $a < 0$, то не для всякого числа можно найти логарифм. Например, невозможно найти значение выражения $\log_{-2} 8$. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только логарифмы с положительным основанием не равным единице. Поскольку $a > 0$, то число, логарифм которого определяется, также может быть только положительным ($c > 0$). Для $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ справедливо равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

которое называется *основным логарифмическим тождеством*. Например,

$$4^{\log_4 5} = 5; \quad 13^{\log_{13} 3/4} = 3/4; \quad 7^{\log_7 9} = 9$$

4.1. Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить приведённые ниже выражения:

$$\log_3 9; \qquad \log_3 \frac{1}{27}; \qquad 3^{-2\log_3 5}$$

Решение

Выражение $\log_3 9$ означает, что необходимо найти степень, при возведении в которую числа 3 получится 9. Поскольку $3^2 = 9$, то

$$\boxed{\log_3 9 = 2}$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$$

$$\boxed{\log_3 \frac{1}{27} = -3}$$

$$3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

$$\boxed{3^{-2\log_3 5} = 0{,}04}$$

Задача 2

Решить уравнение

$$\log_3 (1 - x) = 2$$

Решение

Согласно определению логарифма выражение $\log_3 (1-x) = 2$ означает, что

$$3^2 = 1 - x$$

$$9 = 1 - x$$

$$\boxed{x = -8}$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить приведённые ниже выражения:

$\log_3 27$; $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_{1/3} \frac{1}{27}$; $\log_{1/3} 27$; $\log_7 7$;

$\log_8 64$; $\log_{11} 1$; $\log_7 1$; $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; $\log_5 625$;

$3^{\log_3 18}$; $5^{\log_5 16}$; $(\frac{1}{4})^{\log_{1/4} 18}$; $3^{5\log_3 2}$; $0,3^{2\log_{0,3} 6}$;

$9^{\log_3 12}$; $16^{\log_4 7}$; $0,125^{\log_{0,5} 1}$

2. Решить приведённые ниже уравнения

$$\log_6 x = 3$$

$$\log_5 x = 4$$

$$\log_2 (5 - x) = 5$$

$$\log_3 (x + 2) = 2$$

$$\log_{1/4} (x - \frac{1}{2}) = -2$$

$$\log_{1/6} (0,5 + x) = -1$$

$$\log_x 27 = 3$$

$$\log_x \frac{1}{7} = -1$$

$$\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{4}$$

? 1. Что такое логарифм?
2. Запишите основное логарифмическое тождество и укажите условия, при которых оно выполняется.

4.3. Основные свойства логарифмов

Если $c > 0$; $b > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$, то справедливы следующие равенства

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ логарифм произведения равен сумме логарифмов;

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ логарифм частного равен разности логарифмов;

$\log_a b^r = r \log_a b$ логарифм числа, возведённого в степень равен произведению показателя степени на логарифм этого числа.

Причём r – любое действительное число.

В этом можно убедиться, воспользовавшись основным логарифмическим тождеством.

$$b \cdot c = a^{\log_a b \cdot c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$$

то есть

$$a^{\log_a b \cdot c} = a^{\log_a b + \log_a b}$$

или

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Первое свойство доказано.

$$\frac{b}{c} = a^{\log_a b/c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}$$

то есть

$$a^{\log_a b/c} = a^{\log_a b - \log_a c}$$

или

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Второе свойство доказано.

$$b^r = a^{\log_a b^r} = (a^{\log_a b})^r = a^{r \cdot \log_a b}$$

то есть

$$a^{\log_a b^r} = a^{r \cdot \log_a b}$$

или

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Третье свойство доказано.

Из основного логарифмического тождества вытекает также *формула перехода* от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию, согласно которой

$$\log_a b = \frac{\log_C b}{\log_C a}$$

Действительно, согласно основному логарифмическому тождеству для выражения $\log_a b$ должно выполняться равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

Если прологарифмировать левую и правую части этого равенства по произвольному основанию c, получим

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

или, согласно третьему свойству

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

Откуда

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Кроме того, используя основное логарифмическое тождество, можно доказать теорему согласно которой

Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$,
где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то
$x_1 = x_2$

Доказательство

Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2}$

Поскольку $a^{\log_a x_1} = x_1$; $a^{\log_a x_2} = x_2$, то

$$\boxed{x_1 = x_2}$$

Что и требовалось доказать.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e (см. раздел 1.1). При этом вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$. То есть $\log_e b = \ln b$.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10.

При этом вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$. То есть $\log_{10} b = \lg b$.

4.3.1. Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить приведённые ниже выражения.

$\log_6 18 + \log_6 2$; $\log_{12} 48 - \log_{12} 4$; $\log_3 27^5$

Решение

$$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$$

$$\boxed{\log_6 18 + \log_6 2 = 2}$$

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$$

$$\boxed{\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = 1}$$

$$\log_3 27^5 = 5 \cdot \log_3 27 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\boxed{\log_3 27^5 = 15}$$

Задача 2

Выразить приведённые ниже логарифмы через логарифм с основанием 7:

$\log_6 18$; $\log_3 27$

Решение

$$\log_6 18 = \frac{\log_7 18}{\log_7 6}$$

$$\log_3 27 = \frac{\log_7 27}{\log_7 3}$$

Задача 3

Выразить $\log_{a^p} b$ через $\log_a b$

Решение

Пусть $\log_{a^p} b = x$, тогда $b = a^{px}$, и $\log_a b = px \log_a a = px = p \log_{a^p} b$

то есть

$$\log_a b = p \log_{a^p} b$$

или

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$$

Задача 4

Решить уравнения

$$\log_3 x = 4 \log_3 2 + 2 \log_3 7$$

$$\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$$

Решение

$$\log_3 x = 4 \log_3 2 + 2 \log_3 7 = \log_3 2^4 + \log_3 7^2 = \log_3 (2^4 \cdot 7^2) =$$

$$= \log_3 (16 \cdot 49) = \log_3 784$$

$$\log_3 x = \log_3 784$$

На основании последней теоремы можно записать, что

$$\boxed{x = 784}$$

$$\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = \frac{1}{2} \log_x 9 + 2 \log_x 4 = \log_x 9^{1/2} + \log_x 4^2 = \log_x (\sqrt{9} \cdot 16) =$$

$$= \log_x 3 \cdot 16 = \log_x 48 = 2$$

$$\log_x 48 = 2$$

$$x^2 = 48$$

$$x = \pm\sqrt{48} = \pm\sqrt{3\cdot 16} = \pm 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{x = \pm 4\sqrt{3}}$$

Задача 5

Определить во сколько раз значение натурального логарифма числа больше десятичного логарифма этого же числа.

Решение

Поскольку, согласно формуле перехода

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}, \text{ то}$$

$$\frac{\ln b}{\lg b} = \ln 10 \approx 2{,}3$$

$$\boxed{\frac{\ln b}{\lg b} \approx 2{,}3}$$

Натуральный логарифм больше десятичного в 2,3 раза. То есть

$$\boxed{\ln b \approx 2{,}3 \lg b}$$

4.3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить приведённые ниже выражения.

$\log_8 16 + \log_8 4$; $\log_3 16 + \log_3 \frac{27}{16}$; $\log_5 75 - \log_5 3$;

$\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$; $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

$\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$; $\log_2 8^{32}$; $\log_5 25^{100}$

2. Выразить приведённые ниже логарифмы через логарифм с основанием 3 и 5:

$$\log_2 3; \qquad \log_7 15; \qquad \log_6 25$$

3. Решить уравнения

$$\log_5 x = 3\log_5 4 + 2\log_5 3$$

$$\log_{1/2} x = \frac{1}{3}\log_{1/2} 27 \cdot \frac{1}{2}\log_{1/2} 4$$

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 5 + \log_{x^2} 64 = 3$$

$$\log_{x^2} 16 \cdot \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$$

$$\log_5(3x-2) = \log_5 7$$

$$\log_3(5x+1) = \log_3 11$$

$$\log_2(5x+3) = \log_2(7x+5)$$

4. Определить во сколько раз значение натурального логарифма числа больше логарифма этого же числа по основанию e^3.

5. Определить во сколько раз значение десятичного логарифма числа больше логарифма этого же числа по основанию 100.

6. Определить, что больше $\log_2 b$ или $\log_4 b$ и во сколько раз?

7. Если двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублей, через n лет становится равным $a \cdot 1{,}02^n$, трёхпроцентный вклад становится равным $a \cdot 1{,}03^n$, то через сколько лет каждый из вкладов удвоится? Ответ выразить с точностью до 0,01.

?

1. Запишите формулы для расчёта логарифма произведения, логарифма частного, логарифма числа, возведённого в степень и докажите их справедливость

2. Что такое формула перехода? Выведите ее, пользуясь основным логарифмическим тождеством.

3. Докажите, что если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$

4. Что такое десятичный логарифм? Натуральный логарифм?

4.4. Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция, т.е. функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, как и любая другая, может быть представлена:

- с помощью формулы. Например,

$$y = \log_3 x; \qquad y = \log_{1/3} x;$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 1 и 2:

Таблица 1

Зависимость $\log_3 x$ *от x*

$y=\log_3 x$	-2	-1	0	1	2	3
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Таблица 2

Зависимость $\log_{1/3} x$ *от x*

$y=\log_{1/3} x$	2	1	0	-1	-2	-3
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

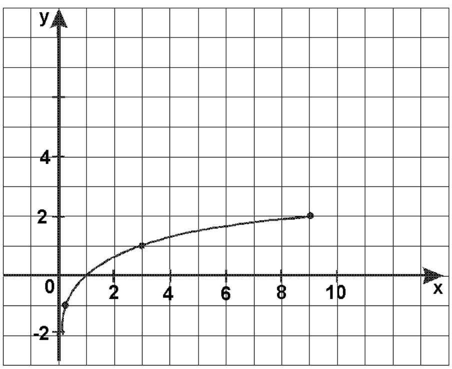


Рис. 3 График функции

$y = \log_3 x$

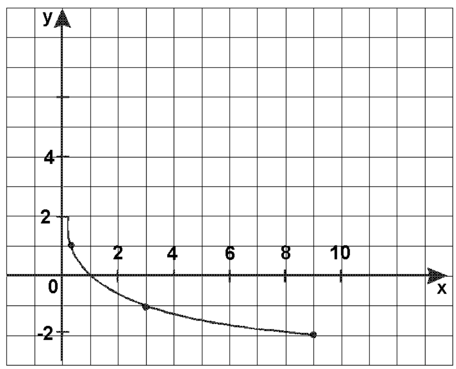


Рис.4. Графикфункции

$y = \log_{1/3} x$

- с помощью графика (графический способ). Например, рис. 3 и рис. 4.

Из таблиц 1, 2 и рисунков 3, 4 видно, что:

- *логарифмическая функция* $y = \log_a x$ *является возрастающей, если* $a > 1$, *и убывающей, если* $0 < a < 1$;

- *Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел*, так как логарифм определяется только для $x > 0$;

Множеством значений логарифмической функции является множество всех действительных чисел.

4.4.1 Задача для самостоятельного решения.

Представить табличным и графическим способом функции

$$y = \log_2 x\ ;$$

$$y = \log_{1/2} x$$

?

1. В каких случаях логарифмическая функция является возрастающей и в каких убывающей?

2. Что представляет собой область определения и множество значений логарифмической функции?

5. МУЗЫКАЛЬНЫЕ СТРОИ

(Повторите тему «Числовые последовательности», приведённую в разделе 2)

5.1. Пифагоров строй

Древнегреческий математик и философ Пифагор (6 век до н. э), проводя опыты на монохорде[1], экспериментально, на слух, установил обратно пропорциональную зависимость между длиной струны и высотой издаваемого ею звука:

$$\frac{l_1}{l_n} = \frac{\nu_n}{\nu_1}$$

где l_1 и l_n – различные длины звучащей части монохорда, ν_1 и ν_n – частоты соответствующих звуковых колебаний, то есть колебаний плотности воздуха. Например, если в какой-то точке пространства плотность воздуха совершает 1000 колебаний в секунду, то $\upsilon = 1000$ сек$^{-1}$. Именно различия в частотах воспринимаются на слух как различия в высоте звука. Отношение частот звуковых колебаний называют *интервалом.* В частности величина $\frac{\nu_n}{\nu_1}$ представляет собой интервал между высотой звука с частотой ν_n и высотой звука с частотой ν_1.[2] Все музыкальные звуки Пифагор предложил упорядочить музыкальным строем, в котором высоты используемых звуков, определялись бы соотношением длин звучащей части струны, равной 2/3, то есть являлись бы функцией числа 2/3. Современным математическим языком интервалы Пифагорова строя в пределах тринадцати последовательных звуков описываются для натуральных n < 7 равенствами (7):

---

[1] Сконструированный Пифагором музыкальный инструмент, состоящий из одной струны, натянутой на специальный ящик со шкалой деления. При укорачивании звучащей части струны можно было определять какая доля струны звучит.

[2] В математике интервалом называется множество чисел или точек на прямой, заключающихся между двумя данными числами или точками a и b – концами интервала. Обозначается (a, b). Концы интервала в него не включаются. То есть в данном случае термин «интервал» является омонимом, имеющим разные значения в музыке и в математике.

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \frac{2^8}{3^5} \text{ при чётном n} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} \text{ при нечётном n} \end{cases} \tag{7}$$

где ν_{n+1} – частота звуковых колебаний, более высокая по отношению к частоте предыдущего звука (ν_n);

$I_{n+1,\,n}$ – интервал между звуками с частотой ν_{n+1} и ν_n.

Для $n \geq 7$ равенствами (7'):

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} \text{ при чётном n} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \frac{2^8}{3^5} \text{ при нечётном} \end{cases} \tag{7'}$$

При этом

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = I_{1,1} \cdot I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} \tag{8}$$

В общем случае

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = I_{m+1,\,m} \cdot I_{m+2,\,m+1} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} \tag{9}$$

Например,

$$I_{7,3} = \frac{\nu_7}{\nu_3} = I_{4,3} \cdot I_{5,4} \cdot I_{6,5} \cdot I_{7,6} = \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$$

Интервал $I_{13,1}$ между соответствующими элементами последовательности (7), (7') принято называть *октавой*[3].

---

[3] Если звуки берутся поочередно, интервал называется *мелодическим*, если одновременно – *гармоническим*.

Интервал I_k определяемый отношением:

$$I_k = \frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{3^5}{2^8} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

называется *пифагоровой коммой.*

Если пифагорову комму не учитывать при фомировании строя, то октава делится на двенадцать интервалов, определяемых равенствами (7), (7'). Если же комму учитывать, то количество интервалов октавы увеличивается до 18, и рассчитываются они с помощью формул:

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \frac{2^8}{3^5} & \text{при } n \neq 2, 5, 9, 12, 15, 18 \\ I_k & \text{при } n = 2, 5, 9, 12, 15, 18 \end{cases}$$

Из равенств (7) и (7') видно, что значения звуковых частот Пифагорова строя для $n < 7$ без учёта коммы представляют собой последовательность:

$$\nu_{n+1} = \begin{cases} \frac{2^8}{3^5} \nu_n & \text{при чётном } n \\ \frac{3^7}{2^{11}} \nu_n & \text{при нечётном } n \end{cases}$$

для $n \geq 7$

$$\nu_{n+1} = \begin{cases} \frac{3^7}{2^{11}} \nu_n & \text{при чётном } n \\ \frac{2^8}{3^5} \nu_n & \text{при нечётном } n \end{cases}$$

С учётом коммы:

$$\nu_{n+1} = \begin{cases} \frac{2^8}{3^5} \nu_n & \text{при } n \neq 2, 5, 9, 12, 15, 18 \\ I_k \cdot \nu_n & \text{при } n = 2, 5, 9, 12, 15, 18 \end{cases}$$

5.2. Чистый строй

К 16 веку[4] получил распространение чистый строй, в котором выделяют три трезвучия: субдоминанту, тонику и доминанту. Внутри каждого трезвучия:

$$I_{2,1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{5}{4}$$

$$I_{3,2} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{6}{5}$$

При этом самый высокий звук субдоминанты является самым низким звуком тоники, а самый высокий звук тоники – самым низким звуком доминанты. То есть, все три трезвучия представляют собой семь звуков, интервалы между которыми можно представить следующим образом

$$I_{2,1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{5}{4}; \quad I_{3,2} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{6}{5}; \quad I_{4,3} = \frac{\nu_4}{\nu_3} = \frac{5}{4}; \quad I_{5,4} = \frac{\nu_5}{\nu_4} = \frac{6}{5};$$

$$I_{6,5} = \frac{\nu_6}{\nu_5} = \frac{5}{4}; \quad I_{7,6} = \frac{\nu_7}{\nu_6} = \frac{6}{5}$$

Таким образом, звуковые частоты чистого строя можно представить последовательностью, члены которой рассчитываются по формулам:

$$\nu_{n+1} = \begin{cases} \frac{5}{4}\,\nu_n \text{ – для нечётных натуральных } n \\ \frac{6}{5}\,\nu_n \text{ – для чётных натуральных } n \end{cases}$$

Причём уравнения (8) и (9) применяемые для Пифагорова строя остаются справедливыми и для чистого строя:

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = I_{1,1} \cdot I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1}$$

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = I_{m+1,\,m} \cdot I_{m+2,\,m+1} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1}$$

[4] Началось внедрение чистого строя в музыкальную практику значительно ранее.

5.3. Равномерно-темперированные строи

В двенадцатизвуковом равномерно-темперированном строе[5] называются:

- чистой октавой, интервал равный 2,00;
- тоном, интервал равный 1/6 октавы;
- полутоном, интервал равный 1/12 октавы;
- центом (ц), интервал равный 1/1200 октавы.

Для пересчёта безразмерного[6] интервала (*I*) в интервал, измеряемый центами ($I^{ц}$), можно воспользоваться следующими формулами:

$$I^{ц} = C \cdot \log_2 I = C \cdot \frac{\lg I}{\lg 2} = k \cdot \lg I$$

где $k = \frac{C}{\lg 2}$; $C = 1200$ ц.

Например, если $I = \frac{3}{2}$,

то

$$I^{ц} = 1200 \cdot \frac{(\lg 3 - \lg 2)}{\lg 2} \approx 702 \text{ (ц.)}$$

То есть

$$\frac{3}{2} \equiv 702 \text{ (ц.)}$$

Пифагорову комму ($I_k = \frac{3^{12}}{2^{19}}$) можно выразить в центах следующим образом:

---

[5] С физической точки зрения чистая октава этого строя включает 13 звуков. Однако, в музыке тринадцатый звук несёт те же функции, что и первый, поэтому считается лишь повторением первого и обозначается той же нотой «до».

[6] Под безразмерностью подразумевается отсутствие размерности – конкретной единицы измерения.

$$I_{\text{k}}^{\text{ц}} = 1200 \cdot \frac{(12\lg 3 - 19\lg 2)}{\lg 2} \approx 24\ (\text{ц.})$$

То есть

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 24\ (\text{ц.})$$

Обратная процедура – пересчёт $I^{ц}$ в I осуществляется с помощью равенства:

$$I = 2^{I^{ц}/C}$$

При необходимости (или желании) представить полученное значение безразмерного интервала в виде *простой* дроби:

$$I = \frac{n+1}{n}$$

где n – натуральное число, величину n можно определить по формуле:

$$n = \frac{1}{2^{I^{ц}/C} - 1}$$

Например, если

$$I^{ц} = 500\ ц$$

то

$$n = \frac{1}{2^{500/1200} - 1} = \frac{1}{2^{5/12} - 1} \approx \frac{1}{1{,}335 - 1} = \frac{1}{0{,}335} \approx 3$$

$$\frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

То есть

$$500\ ц \equiv \frac{4}{3}$$

Сумма интервалов, выраженных в центах, пропорциональна логарифму *произведения* безразмерных интервалов. *Разница* между интервалами, выраженными в центах, пропорциональна логарифму *отношения* безразмерных интервалов. Действительно, поскольку

$$\mathrm{I}^{ц} = \mathrm{k} \cdot \lg I$$

то

$$\mathrm{I}_2^{ц} + \mathrm{I}_1^{ц} = \mathrm{k} \cdot \lg I_2 + \mathrm{k} \cdot \lg I_1 = \mathrm{k}\,(\lg I_2 + \lg I_1) = \mathrm{k}\,\lg I_2 I_1$$

$$\mathrm{I}_2^{ц} - \mathrm{I}_1^{ц} = \mathrm{k} \cdot \lg I_2 - \mathrm{k} \cdot \lg I_1 = \mathrm{k}\,(\lg I_2 - \lg I_1) = \mathrm{k}\,\lg \frac{I_2}{I_1}$$

Чистая октава двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя делится на двенадцать ***<u>равных</u>*** полутонов. При этом:

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \sqrt[12]{2} \qquad (10)$$

где $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}0595$.

То есть звуковые частоты двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя можно представить последовательностью, члены которой рассчитываются по формуле:

$$\nu_{n+1} = \sqrt[12]{2} \cdot \nu_n$$

Поскольку в данном случае отношение между всеми, без исключения, соседними членами последовательности постоянно, то, эта последовательность является геометрической прогрессией, каждый представитель которой, начиная со второго, может быть вычислен по формуле

$$\nu_n = \nu_1 \cdot q^{n-1} \qquad (11)$$

где $q = \sqrt[12]{2}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Использование (8) и (9) для исследования двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя приводит к равенствам (12) и (13):

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = (\sqrt[12]{2}\,)^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{12}} \qquad (12)$$

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = (\sqrt[12]{2}\,)^{n-m} = 2^{\frac{n-m}{12}} \qquad (13)$$

Действительно, согласно (8) и (9)

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = I_{1,1} \cdot I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} = 1 \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot = (\sqrt[12]{2}\,)^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{12}}$$

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = I_{m+1,\,m} \cdot I_{m+2,\,m+1} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} = \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[12]{2} = (\sqrt[12]{2}\,)^{n-m} = 2^{\frac{n-m}{12}}$$

Интересно отметить, что в индийской музыке строй не является равномерно-темперированным, однако, чистая октава этого строя делится на 22 *шрути* и, поэтому требует более тонкого восприятия звука, по сравнению с европейским, основанным на двенадцатизвуковой темперации. Значения шрути можно определять с помощью следующих равенств:

$$I^{ц}_{n+1,\,n} = \begin{cases} 51 \text{ ц.} & \text{для } n = 1 \div 4, \quad 10 \div 13, \quad 17 \div 20 \\ 60\frac{2}{3} \text{ ц.} & \text{для } n = 5 \div 7, \quad 14 \div 16 \\ 56 \text{ ц.} & \text{для } n = 8, 9, 21, 22 \end{cases}$$

Важно подчеркнуть, что в реальной индийской музыке шрути могут делиться на ещё более мелкие интервалы, требуя от слушателя и исполнителя чрезвычайно высокой подготовленности.

Некоторыми европейскими искателями новизны также предлагались более многозвучные октавы - 24, 48 и даже 53 звуковые *равномерные* темперации. На каждую из них специально писалась музыка, и конструировались музыкальные инструменты. Однако, практического распространения эти темперации не получили.

Для определения интервалов между звуками различных строев можно пользоваться равенством:

$$I_{n,m'} = \frac{I_{n,1}}{I_{m',1}}$$

где $I_{n,m'}$ – интервал между частотой ν_n одного строя и $\nu_{m'}$ другого строя. Следует подчеркнуть, что последнее равенство справедливо только при условии, что ν_1 ***для обоих строев является общим.***

5.4. Пример решения задачи

Рассчитать интервал $I_{11,1}$ Пифагорова строя без учёта пифагоровой коммы и с учётом пифагоровой коммы.

Решение:

Согласно (8):

$$I_{11,1} = I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot I_{4,3} \cdot I_{5,4} \cdot I_{6,5} \cdot I_{7,6} \cdot I_{8,7} \cdot I_{9,8} \cdot I_{10,9} \cdot I_{11,10}$$

Без учёта пифагоровой коммы можно записать равенство на основании (7) и (7'):

$$I_{11,1} = \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{(3^7)^5 \cdot (2^8)^5}{(2^{11})^5 \cdot (3^5)^5} = \frac{3^{35} \cdot 2^{40}}{2^{55} \cdot 3^{25}} = \frac{3^{10}}{2^{15}}$$

С учётом пифагоровой коммы:

$$I_{11,1} = \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{(2^8)^7 \cdot (3^{12})^3}{(3^5)^7 \cdot (2^{19})^3} = \frac{2^{56} \cdot 3^{36}}{3^{35} \cdot 2^{57}} = \frac{3}{2}$$

Ответ: без учёта пифагоровой коммы $I_{11,1} = \frac{3^{10}}{2^{15}}$,

с учётом пифагоровой коммы: $I_{11,1} = \frac{3}{2}$

5.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Перепишите в тетрадь и *заполните* таблицу значений интервалов Пифагорова строя без учёта пифагоровой коммы:

Порядковый номер интервала (n)	$I_{n+1,1}$	$I^{ц}_{n+1,1}$	Название интервала
1.			Малая секунда
2.			Большая секунда
3.			Малая терция
4.			Большая терция
5.			Кварта
6.			Тритон
7.			Чистая квинта
8.			Малая секста
9.			Большая секста
10.			Малая септима
11.			Большая септима
12.			Октава

Значения $I_{n+1,1}$ представьте простыми дробями (например $\frac{3^{10}}{2^{15}}$), октаву – десятичной дробью, округлённой до тысячного знака. Значения $I^{ц}_{n+1,1}$ округлите до целых чисел. Какой из интервалов таблицы наиболее близок к золотой пропорции? (см. раздел 1.1.).

2. В Пифагоровом строе без учёта коммы найти интервалы

$I_{3,1}$; $I_{5,3}$; $I_{7,5}$; $I_{9,7}$; $I_{11,9}$; $I_{13,11}$

3. Рассчитать значения *частоты* первых пяти последовательных звуков Пифагорова строя без учёта коммы и с учётом коммы, если частота самого низкого из них составляет 260 Гц. Вычислить длину волны (λ) самого высо-

кого из этих звуков, если скорость его распространения (υ) составляет 340 м/с, при этом $\lambda \cdot \nu = \upsilon$.

4. Рассчитать для Пифагорова строя интервалы $I_{12,1}$, $I_{13,1}$ без учёта коммы и определить, является ли Пифагоров строй замкнутым, если строй называется замкнутым, когда в нём есть пара звуков, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\nu_n}{\nu_m} = 2{,}00,$$

где ν_n и ν_m – соответствующие звуковые частоты.

5. Определить для Пифагорова строя интервал $I_{5,2}$ без учёта коммы и с учётом коммы.

6. Какой интервал шире – $I_{7,1}$ в Пифагоровом строе (без учёта коммы) или $I_{7,1}$ в чистом строе? Во сколько раз? Ответ выразить десятичной дробью, округлённой до сотого знака.

7. Найти интервал, $I_{7,7'} = \dfrac{\nu_7}{\nu_{7'}}$, где ν_7 седьмой звук Пифагорова строя без учёта коммы, $\nu_{7'}$ – седьмой звук чистого строя, если $\nu_1 = \nu_{1'}$. Ответ выразить в центах.

8. Рассчитать значения частоты последовательных семи звуков чистого строя, если частота шестого звука (предыдущего по отношению к самому высокому) 444 Гц.

9. Рассчитать для чистого строя интервалы $I_{4,1}$, $I_{5,1}$ и определить является ли чистый строй замкнутым?

10. Рассчитать для двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя интервал $I_{13,1}$ и определить является ли этот строй замкнутым?

11. Какой интервал шире – октава Пифагорова строя или чистая октава двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя? Во сколько раз? Ответ выразить десятичной дробью, округлённой до сотого знака.

12. Определить интервал между ν_{13} Пифагорова строя без учёта коммы и ν_{13} равномерно-темперированного строя, если ν_1 у них общее. Ответ выразить в центах.

13. Пользуясь равенством (11) рассчитайте ν_7 и ν_9 для двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя, если $\nu_1 = 264$ Гц

14. Зная, что $\nu_{10} = 444$ Гц, определить частоты остальных двенадцати звуков равномерно-темперированного строя.

15. Вычислить - на сколько центов отличаются чистая квинта ($I_{8,1}$ Пифагорова строя без учёта коммы) и темперированная квинта ($I_{8,1}$ равномерно-темперированного строя)?

16. Найти значение I если $I^{ц} = 200$ ц. Ответ представить простой дробью.

17. Представить все три значения шрути (51 ц., 56 ц., $60\frac{2}{3}$ ц.) простыми дробями.

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

6.1. Дифференциал

Из курса физики известно, что абсолютное значение постоянной скорости движения (υ) можно представить отношением пройденного пути S ко времени t, затраченному на дорогу:

$$\upsilon = \frac{S}{t}$$

Либо как отношение приращения (увеличения) пути ($\Delta S = S_2 - S_1$) к приращению времени ($\Delta t = t_2 - t_1$):

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (14)$$

С точки зрения математики, численно выраженная величина υ равенства (14) символизирует значение **функции**, Δt - значение **аргумента**, ΔS – значение **параметра**.

Если процесс движения рассматривать при бесконечно малых приращениях параметра (dS) и аргумента (dt), то выражение (14) приобретает вид:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \qquad (15)$$

где dS – дифференциал параметра, dt – дифференциал аргумента. То есть **дифференциалом какой-либо величины называется её бесконечно малое приращение**.

6.2. Производная функции и её значение

Величину $\frac{dS}{dt}$ иногда называют мгновенной скоростью, поскольку она описывает свойство (скорость) процесса (движения), присущее только данному мгновению (данному моменту времени). Интересно отметить, что хотя движение обладает конкретным значением величины в каждый момент времени, проявляться это свойство может только в процессе приращения времени. То есть запись

$$\frac{dS}{dt} = 300 \text{ м/мин}$$

означает, что в данный момент времени тело обладает такой скоростью, что, <u>если бы она не менялась</u>, то за минуту перемещение составило 300 метров.

Например, про снимок автомобиля, сфотографированного во время движения, можно сказать, что перед нами тело, двигающееся со скоростью, скажем, 60 км/час. Хотя никакого движения на фотографии не наблюдается. Просто известно, что помимо свойств легковой машины, наблюдаемых на изображении непосредственно глазами, она обладает ещё одним свойством – перемещением в пространстве, которое проявилось *бы*, если *бы* время, остановленное снимком, пришло в движение. С математической точки зрения свойство автомобиля, которым он обладает в сфотографированный момент времени, описывается равенством

$$\frac{dS}{dt} = 60 \text{км/ч}$$

и означает, что если бы это свойство автомобиль сохранил в течение часа, то переместился бы на расстояние в 60 км. В этом случае можно было бы записать $\Delta S/\Delta t=60$ км/ч.

Однако значение υ не всегда бывает постоянным. Например, свободно падающее тело двигается с постоянно возрастающей скоростью, подчиняющейся уравнению:

$$\upsilon = gt \qquad (16)$$

где $g=9{,}8$ м/с^2. А, значит, каждому моменту времени в процессе падения, присуще своё и только своё значение величины $\frac{dS}{dt}$. (То есть, на различных фотоснимках падающего тела, сделанных в разные моменты падения, скорость тела будет различна). Если под словом скорость обычно подразумевается изменение *расстояния* в единицу времени, то, преобразовав уравнение (16) можно найти изменение *скорости* в единицу времени, то есть ускорение

$$\frac{d\upsilon}{dt} = g \qquad (17)$$

или

$$g = \frac{d\upsilon}{dt}$$

где $d\upsilon$ – дифференциал функции.

С точки зрения математики выражение $\frac{dS}{dt}$ уравнения (15) называется производной параметра. А выражение $\frac{d\upsilon}{dt}$ уравнения (17) производной функции.

Значение производной функции $\boldsymbol{y}$ **= f (x)**,– это число, обозначаемое $\boldsymbol{y}'$ или **f '(x)**, или $\frac{dy}{dx}$, описывающее *процесс* изменения функции, и равное отношению приращения значения функции к приращению значения аргумента, которое имело бы место при условии, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{const}$$

То есть, если всякий раз при рассмотрении какой-либо функции воспринимать её как путь, а аргумент как время, то значение производной функции будет представлять собой значение скорости. Процесс нахождения производной функции называется *дифференцированием функции.*

Производная функции $\boldsymbol{y}$ **= f (x)**, – это формула, позволяющая рассчитывать значение производной этой функции.

В качестве такой формулы можно воспринимать равенство

$$\boldsymbol{y}' = \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$dy = y'dx$$

Дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента.

Для функции (16) производной является равенство (18). То есть, **производной скорости является ускорение.**

6.3. Производная параметра и её значение

Значение производной параметра S функции $y = f(x)$ (например $y=S/x$)– это число, обозначаемое S' или $\frac{dS}{dx}$, описывающее процесс изменения параметра и равное отношению приращения значения параметра к значению приращения аргумента, которое имело бы место при условии постоянства этого отношения.

Производная параметра S функции $y = f(x)$ – это формула, позволяющая определить значение производной этого параметра.

Поскольку любую функцию можно представить как производную какого – либо параметра, то ***производная – это формула, позволяющая определить число, равное отношению приращения значения параметра или функции, к приращению значения аргумента при условии постоянства этого отношения.*** (В сущности, это свойство функции или параметра, проявляющееся при изменении аргумента).

Классическое определение производной гласит, что

Производной данной функции называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении этого приращения к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

или, полагая, что y=f(x)

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Символ lim составлен из первых трёх букв латинского слова limes, означающего «предел», то есть величина, которая приобретёт своё значение при достижении переменой своего предела, на который указывает стрелка.

6.4. Примеры решения задач

Задача 1

Вычислить пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x + 5}{\Delta x^2 + 1}; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ если } y = x^2$$

Решение:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x + 5}{\Delta x^2 + 1} = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 + 5}{0^2 + 1} = 5$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x + 5}{\Delta x^2 + 1} = 5}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 + 5}{1^2 + 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1} = 4}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x}$$

Последний предел, согласно классическому определению, представляет собой производную функции $y = x^2$, то есть, можно записать, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x$$

Проведя, аналогичные преобразования с рядом других функций, можно составить таблицу, которую удобно использовать при нахождении более сложных производных (Таблица 3):

Таблица 3

Некоторые формулы дифференцирования

№	Формула	Примечание
1.	$C' = 0$	производная постоянной равна нулю;
2.	$(Cy)' = Cy'$	постоянная выносится за знак производной;
3.	$x' = 1$	производная аргумента равна единице
4.	$(x^2)' = 2x$	производная квадрата аргумента равна удвоенному аргументу
5.	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$	производная степенной функции;
6.	$(a^x)' = a^x \ln a;$	производная показательной функции
7.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	производная логарифма

Продолжение таблицы 3

8.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	производная натурального логарифма
9.	$(\sin x)' = \cos x$;	производная синуса
10.	$(\cos x)' = -\sin x$;	производная косинуса
11.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	производная тангенса
12.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	производная котангенса
13.	$(f + g)' = f' + g'$	производная суммы функций равна сумме производных этих функций;
14.	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	производная произведения функций;
15.	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	производная частного функций;
16.	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	производная сложной функции

Задача 2

Продифференцировать функцию $y = 10^x + x^{10}$. Найти значение производной и дифференциал для $x = 10$

Решение

$$y' = (x^{10} + 10^x)' = (x^{10})' + (10^x)' = 10x^9 + 10^x \ln 10 = 10x^9 + 10^x \cdot 2{,}3 \lg 10 = 10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x$$

$$\boxed{y' = 10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x}$$

$$y'_{x=10} = 10 \cdot 10^9 + 2{,}3 \cdot 10^{10} = 10^{10} + 2{,}3 \cdot 10^{10} = 3{,}3 \cdot 10^{10}$$

$$\boxed{y'_{x=10} = 3{,}3 \cdot 10^{10}}$$

$$dy = (10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x)dx$$

$$\boxed{dy_{x=10} = 3{,}3 \cdot 10^{10}dx}$$

Задача 3

Определить вторую производную функции, приведённой в предыдущей задаче. Найти её значение и дифференциал для x = 1.

Решение

$$y''=(x^{10}+10^x)''=(10x^9+2{,}3\cdot 10^x)'=(10x^9)'+(2{,}3\cdot 10^x)'=10\cdot 9x^8+$$

$$+2{,}3\cdot 10^x\cdot 2{,}3\lg 10=90x^8+5{,}29\cdot 10^x$$

$$\boxed{y''=90x^8+5{,}29\cdot 10^x}$$

$$y''_{x=1}=90\cdot 1^8+5{,}29\cdot 10^1=90+52{,}9=142{,}9$$

$$\boxed{y''_{x=1}=142{,}9}$$

$$d^2y=(90x^8+5{,}29\cdot 10^x)dx^2$$

$$\boxed{d^2y_{x=1}=142{,}9\,dx^2}$$

(дэ два игрек при х равном единице равно сто сорок две целых, девять десятых дэ икс дважды)

Задача 4

Продифференцировать функцию $f(x) = x^3$. Найти значение производной и дифференциал для x=7.

Решение

$$f'(x)=3x^2$$

$$f'(7)=3\cdot 7^2=3\cdot 49=147$$

$$\boxed{f'(7)=147}$$

$$\boxed{df(7)=147\,dx}$$

6.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы:

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12}{3+1/x}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3}{x-2}$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если $y = 5x^2 + 7x$

2. Продифференцировать функцию y. Найти значение производной и дифференциал для x=3,14, если

$y=28$; $y=7x$; $y=7x^7/\pi^6$; $y=-7x^{-7}/\pi^{-8}$;

$y = 2\sin x$; $y=3\cos x$; $y=5x^2/\pi+3\sin x$; $y=3x^3\cos x$;

$y=\dfrac{x}{\cos x}$; $y=\cos^2 x$; $y=\operatorname{tg} x+\sin x$; $y=\dfrac{x^4+3x^2-6}{5}$;

3. Определить вторую производную функций, приведённых в предыдущей задаче. Найти её значение и дифференциал для x = 0.

4. Найти первую, вторую, третью и четвёртую производные для каждой из следующих функций:

$y = \sin x$; $y=x^5$; $y=\dfrac{1}{x}$

5. Продифференцировать функцию f(x). Найти значение её производной для x=2, если

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$; $f(x) = x^4/4$; $f(x) = x^5/5$

6. Продифференцировать функцию y. Найти значение производной для x = 2,718, если

$$y = 2e\lg x + 3e\ln x;$$

7. Рассчитать абсолютное значение скорости, которую приобретёт парашютист в момент раскрытия парашюта, если зависимость расстояния (S) между ним и самолётом от времени (t) описывается равенством:

$$S=\frac{gt^2}{2},$$

а парашют раскрылся через 15 секунд после прыжка с летящего самолёта ($g \approx 10$ м/с^2).

8. Рассчитать абсолютное значение скорости и ускорения ракеты через 5 секунд после старта, если в течение этого времени расстояние S, преодолеваемое ею, изменялось согласно равенству:

$$S=2_{\text{м/с}^3}\cdot t^3$$

где t – время, измеряемое в секундах.

9. Определить скорость нагрева воды в микроволновой печи, если зависимость температуры (T) воды, измеряемой в °C, от времени (t) описывается равенством:

$$T = 20^\circ C + 0{,}2^\circ C \cdot t.$$

где t – время, измеряемое в секундах.

?

1. Что такое приращение? Дифференциал?
2. Дайте определения понятиям «значение производной функции», «производная функции».
3. Что такое производная? Дайте классическое определение производной.

6.6. Способы представления производной

Производная функции, также как и сама функция, может быть представлена:
- с помощью формулы. Например,

$$y=x^2; \qquad y' = \frac{dy}{dx} = 2x;$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 4 и 5:

Таблица 4

Зависимость y от x

y	9	4	1	0	1	4	9
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

Таблица 5

Зависимость y' от x

y'	-6	-4	-2	0	2	4	6
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

- с помощью графика (графический способ). Например, рис. 5 и рис. 6

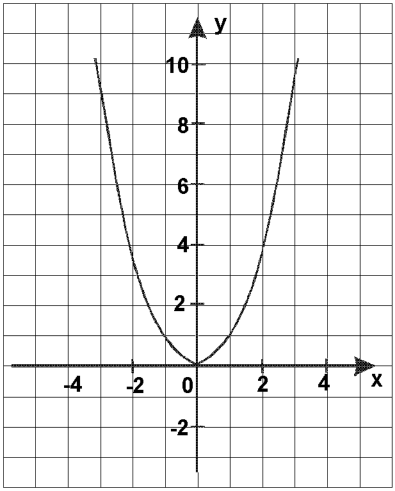


Рис. 5.
График функции $y = x^2$

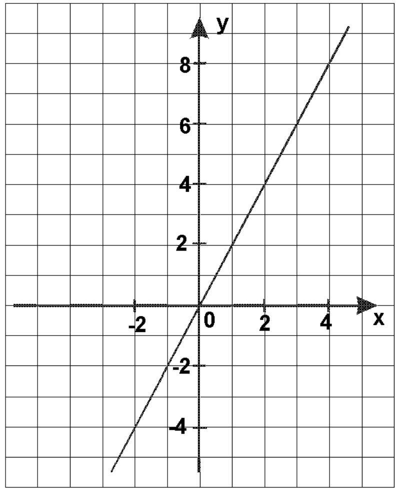


Рис.6.
График функции $y' = 2x$

Из таблиц 4, 5 и рисунков 5, 6 видно, что, например, при $x=1$ $y=1$, $y'=2$. То есть, при $x=1$ значение производной равно двум. Выражение $y' = \frac{dy}{dx} = 2$ означает, что функция y изменяется быстрее аргумента в 2 раза. То есть, если аргумент изменяется на единицу, то функция изменится на две единицы, если аргумент изменится на две единицы, то функция изменится на 4 единицы, если аргумент изменится на три единицы, то функция изменится на 6 единиц и т.д. Таким образом, *точка* с координатами (1; 2) в системе координат $x - y'$, в другой системе координат $x - y$ представляет собой прямую, которая называется касательной к графику функции в точке (1;1). (рис.7) Тангенс угла φ наклона этой прямой и представляет собой значение производной функции в точке касания.

Таким образом, геометрический смысл значения производной состоит в том, что графически, в координатах $x - y$ значение производной функции в данной точке представляет собой тангенс угла наклона касательной функции в этой точке.

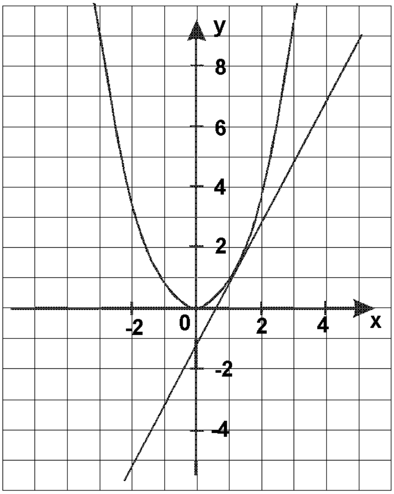


Рис.7. Касательная в точке (1; 1) к графику функции $y = x^2$

6.6.1. Примеры решения задач

Задача 1.

Представить графически в координатах t - S зависимость пройденного пути от времени (S от t) свободно падающего тела, а также зависимость его скорости (S') от времени в координатах t - S'. Представить также в координатах t –S касательные для t_1=1с; t_2=2с; t_3=3с если S= $\frac{gt^2}{2}$, где g = 10 м/с^2.

Решение

Графики функций S= $\frac{gt^2}{2}$ и S'= $\frac{dS}{dt}$ = gt можно построить с помощью таблиц 6 и 7

Таблица 6.

Зависимость S от t

S, м	0	5	20	45
t, с	0	1	2	3

Таблица 7

Зависимость S ' от t

S ', м/с	0	10	20	30
t, с	0	1	2	3

По данным этих таблиц строятся рисунки 8 и 9.

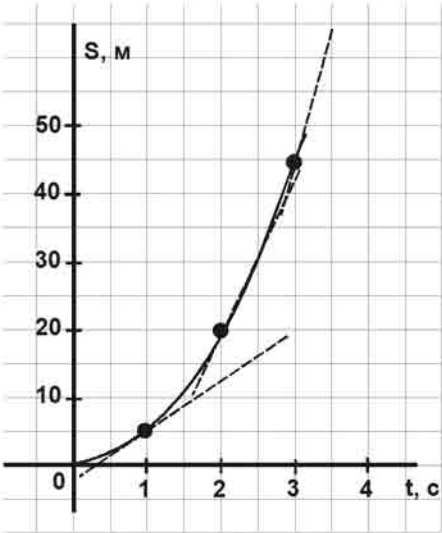


Рис.8. График функции $S = \frac{gt^2}{2}$ и касательные в точках (1; 5), (2;10), (3; 45)

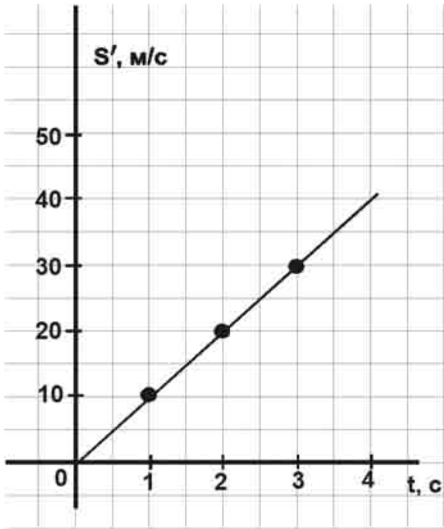


Рис. 9. График функции S' = gt

Задача 2

Не строя графика функции $y = \sqrt{x}$, определить зависимость от x тангенса угла наклона tg φ(x) касательной этой функции, и рассчитать значения tg φ(x) для x = 4; x = 9; x = 16

Решение

$$\operatorname{tg} \varphi(x) = y' = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$\operatorname{tg} \varphi(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ $\operatorname{tg} \varphi(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi(4) = \frac{1}{4}} \qquad \boxed{\operatorname{tg} \varphi(9) = \frac{1}{6}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi(16) = \frac{1}{8}}$$

6.6.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Представить графически в координатах t– S, зависимость пройденного пути от времени (S от t) ракеты, а также зависимость её скорости (S'), от времени в координатах t – S'. Представьте также в координатах t – S касательные для $t_1 = 1$с; $t_2 = 2$с; $t_3 = 3$с если

$$S = 2м/с^3 \cdot t^3$$

где t – время, измеряемое в секундах.

2. Представить графически в координатах t – T зависимость температуры воды (T) от времени (t), а также зависимость скорости нагрева (T') от времени в координатах t – T', если вода помещена в микроволновую печь и

$$T = 293 + 0{,}02\,t.$$

3. Не строя графика функции $y = x^4$, определить зависимость от x тангенса угла наклона $\operatorname{tg} \varphi(x)$ касательной этой функции от x, и рассчитать значения $\operatorname{tg} \varphi$ для x = 0; x = 1; x = 2

?

1. Какими способами может быть представлена производная?
2. В чём состоит геометрический смысл производной?

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

7.1 Первообразная и неопределённый интеграл

Интегрированием называется математическое действие обратное дифференцированию. Результатом интегрирования является нахождение первообразной и интеграла.

Первообразная

Первообразная заданной функции y = f (x), – это функция F(x), производная которой является заданной функцией:

$$F'(x) = \mathbf{f(x)},$$

То есть, последнее равенство можно прочесть двумя способами:

1. f(x) является производной функции F(x).
2. F(x) является первообразной функции f(x)

Математическое действие, обратное дифференцированию, представляют следующим образом:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Где знак $\int$ обозначает интегрирование.

Некоторые свойства первообразной

1. Если F(x) – первообразная для функции f(x), то сумма F + C (где C – любая константа) также является первообразной для той же функции f(x) и называется неопределённым интегралом. Величина C называется постоянной интегрирования.

Например

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

где C может принимать любые значения, включая ноль.

2. Первообразная суммы равна сумме первообразных

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3. Постоянная выносится за знак первообразной

$$\int C\, f(x)dx = C\int (x)dx$$

Неопределённые интегралы и производные некоторых функций приведены в таблице 8. Под величинами c и C подразумеваются постоянные.

Таблица 8

Неопределённые интегралы и производные некоторых функций

F (первообразная функции)	y (функция)	y' (производная функции)
$F = C$	$y = 0$	$y' = 0$
$F = x + C$	$y = 1$	$y' = 0$
$F = cx + C$	$y = c$	$y' = 0$
$F = x^2/2 + C$	$y = x$	$y' = 1$
$F = cx^2/2 + C$	$y = cx$	$y' = c$
$F = x^3/6 + C$	$y = x^2/2$	$y' = x$
$F = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + C;$	$y = x^{n+1}/(n+1);$	$y' = x^n$
$n \neq -1;\ n \neq -2$	$n \neq -1$	
$F = \ln x + C$	$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$F = \sin x + C$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$F = -\cos x + C$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$

Полезно иметь в виду, что если выражения последнего столбца таблицы воспринимать как функции, то выражения среднего столбца будут представлять собой первообразные этих функций.

7.1.1. Примеры решения задач

Найти неопределённый интеграл функции у, если:

$$y = 3x^3; \; y = \sin x + \cos x; \; y = \frac{1}{x}$$

Решение:

$$\int 3x^3dx = 3\int x^3dx = 3\frac{x^4}{4} + C$$

$$\int 3x^3dx = 3\frac{x^4}{4} + C$$

$$\int(\sin x + \cos x)dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + C_1 + \sin x + C_2 = \sin x - \cos x + C$$

$$\boxed{\int(\sin x + \cos x)dx = \sin x - \cos x + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

7.1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти неопределённый интеграл функции у, если:

$$y=20x; \; y=3x^2; \; y=7; \; y=0; \; y=-\frac{1}{x^2}; \quad y=\frac{1}{2\sqrt{x}}; \; y=49x^6; \quad y=49x^{-8}; \; y=\frac{\pi}{x}$$

2. Найти неопределённый интеграл тригонометрической функции у, если:

$$y=2\cos x; \; y=-3\sin x; \quad y=10x+3\cos x; \quad y=9x^2\cos x - 3x^3\sin x;$$

$$y=\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}; \; y=-2\sin x\cos x.$$

?

1. Что такое первообразная?
2. Какие свойства первообразной вы усвоили?

7.2. Интеграл

7.2.1. Интеграл функции и его значение

Известно, что если тело движется с постоянной скоростью

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где x – функция, t – аргумент, S – параметр, то через время

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

пройдёт расстояние

$$\Delta S = \upsilon \Delta t = \upsilon t_2 - \upsilon t_1$$

где $\upsilon t_2 - \upsilon t_1 = S_2 - S_1$ – приращение параметра S.

С математической точки зрения расстояние, преодолённое этим телом, является значением интеграла функции υ от t_1 до t_2 и может быть обозначено следующим образом:

$$\Delta S = \upsilon t_2 - \upsilon t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt$$

Значением интеграла функции x = f (x), называется число, равное приращению значения параметра yx, являющемуся результатом заданного приращения значения аргумента (от x_1 до x_2) и обозначаемое следующим образом:

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

Числа x_1 и x_2 называются пределами интегрирования, x_1 – нижним, x_2 – верхним. Функция y называется подынтегральной функцией, а переменная x – переменной интегрирования.

То есть, если значение производной описывает процесс (скорость изменения функции или параметра), то значение интеграла описывает результат процесса (величину совершённого приращения параметра функции).

Обозначение интегрирования $\int_{x_1}^{x_2}$ включает в себя стилизованную букву S, из-за того, что искомое приращение параметра можно воспринимать как сумму (Sum) его бесконечно малых приращений.

Интегралом функции $y = f(x)$ называется формула, позволяющая определить значение этого интеграла. Такая формула составляется на основании **теоремы Ньютона – Лейбница**, гласящей что

$$F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Таким образом, более подробная запись теоремы Ньютона-Лейбница может выглядеть так:

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Например, для функции скорости, при условии, что υ =const

$$\int_{t_1}^{t_2} \upsilon\,dt = \upsilon\int_{t_1}^{t_2} dt = \upsilon t\Big|_{t_1}^{t_2} = \upsilon(t_2 - t_1) = \upsilon t_2 - \upsilon t_1 = S_2 - S_1 = \Delta S$$

То есть значением интеграла скорости является расстояние, пройденное на заданном отрезке времени.

Не следует путать понятия “приращение” и “изменение”. Например, *приращением* параметра функции

$$\upsilon = gt$$

в интервале времени от 0 до t' является интеграл

$$\int_0^{t'} gt\,dt = g\int_0^{t'} t\,dt = g\frac{t^2}{2}\Big|_0^{t'} = \frac{g(t')^2}{2},$$

представленный на рис. 10 заштрихованным участком площади прямоугольника

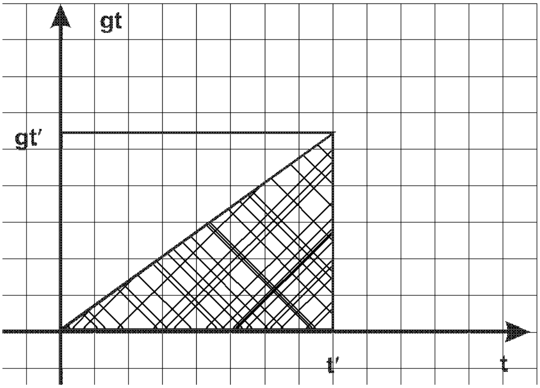


Рис. 10 Графическое представление интеграла $\int\limits_0^{t'} gtdt$

А *изменением* параметра в этом случае является величина $g(t')^2$, обозначенная на рисунке площадью всего прямоугольника.

При нахождении интегралов удобно пользоваться следующими правилами:

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}(f(x)+g(x))dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2}g(x)dx$$

2. Постоянная (C) выносится за знак интеграла

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}C\,f(x)dx = C\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

7.2.2. Примеры решения задач

Задача 1

Найти интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2}3x^3dx$ и определить значения приведенных ниже интегралов при указанных пределах интегрирования[7].

[7] Значение интеграла можно определить только при известных пределах интегрирования.

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx\ ; \qquad \int_{e}^{10e}\frac{dx}{x}$$

Решение:

$$\int_{x_1}^{x_2}3x^3dx = 3\int_{x_1}^{x_2}x^3dx = 3\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x_1}^{x_2} = 3\frac{x_2^4}{4} - 3\frac{x_1^4}{4} = \frac{3}{4}(x_2^4 - x_1^4)$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2}3x^3dx = \frac{3}{4}(x_2^4 - x_1^4)}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin x+\cos x)\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= -\cos\pi - (-\cos\frac{\pi}{2}) + \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\boxed{\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx = 0}$$

$$\int_{e}^{10e}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{e}^{10e} = \ln 10e - \ln e = \ln\frac{10e}{e} = \ln 10 \approx 2{,}3\lg 10 = 2{,}3$$

$$\boxed{\int_{e}^{10e}\frac{dx}{x} \approx l2{,}3}$$

Задача 2

Определить, через сколько лет (t) в слитке металла останется 50 г радия (Ra) если первоначально в слитке находилось 100 г Ra, а скорость его распада ($-\frac{dm}{dt}$) пропорциональна массе (m) и определяется равенством:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

где $k = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$

Дано:	Решение:
$m_o = 100$ г.	$\frac{dm}{dt} = -km$
$m = 50$ г.	$\frac{dm}{m} = -kdt$
t -?	$\int\limits_{m_o}^{m} \frac{dm}{m} = \int\limits_{0}^{t} -k\,dt$

$$\ln m - \ln m_o = -kt$$

$$\ln \frac{m_o}{m} = kt$$

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{m_o}{m}$$

$$t = \frac{1}{4{,}3 \cdot 10^{-4}} \cdot \ln \frac{50}{100} \approx 1600 \text{ (лет)}$$

Ответ: $t \approx 1600$ (лет)

Задача 3

Определить физический смысл интеграла импульса тела с нижним пределом интегрирования 0 м/с и верхним пределом интегрирования υ м/с при условии, что m = const.

Дано:

$\upsilon_1 = 0$ м/с

$\upsilon_2 = \upsilon$ м/с

$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\, d\upsilon$-?

Решение

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\, d\upsilon = \int_0^{\upsilon} m\upsilon\, d\upsilon = m\int_0^{\upsilon} \upsilon\, d\upsilon = m\upsilon^2/2 = E_к = A$$

где $E_к$ – кинетическая энергия тела, A – работа, совершённая силой, придавшей покоящемуся телу скорость υ.

Ответ: Интеграл импульса тела представляет собой кинетическую энергию этого тела, а также работу, совершённую силой, придавшей покоящемуся телу скорость υ.

7.2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти интегралы:

$\int_{x_1}^{x_2} 20x dx$; $\int_{x_1}^{x_2} 3x^2 dx$; $\int_{x_1}^{x_2} 7x dx$; $\int_{x_1}^{x_2} -\frac{1}{x^2} dx$;

и определить значения интегралов:

$\int_{25}^{49} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; $\int_{1}^{2} 49x^6 dx$; $\int_{2}^{3} 49x^{-8} dx$; $\int_{0}^{1,57} 2\cos x dx$;

$\int_{1,57}^{3,14} -3\sin x\, dx$; $\int_{\pi}^{2\pi} (10x + 3\cos x)dx$;

$$\int_{0}^{\pi/2} (9x^2\cos x - 3x^3 \sin x)dx;$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x}\right)dx;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (-2\sin x\cos x)dx;$$

$$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x}$$

2. Определить расстояние (S), которое пролетит парашютист к моменту раскрытия парашюта, если зависимость скорости его падения (υ) от времени (t) описывается равенством:

$$\upsilon = gt$$

где g – ускорение свободного падения (10 м/с^2), а парашют раскрылся через 7 секунд после прыжка с летящего самолёта.

3. Определить скорость (υ), которую приобретёт ракета через три секунды после старта, а также расстояние (S), преодолённое ею в течение этого времени, если ускорение ракеты (а) изменяется со временем согласно равенству:

$$a = 2\frac{\text{м}}{\text{с}^3} \cdot t$$

где t - время, измеряемое в секундах.

4. Определить температуру воды, нагреваемой в микроволновой печи в течение одной минуты, если задан режим, при котором скорость нагрева возрастает со временем, согласно равенству:

$$\upsilon = 0{,}03\frac{\text{град}}{\text{с}^2} \cdot t,$$

где t – время, измеряемое в секундах, а первоначальная температура воды составляла 20°С.

5. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени от t = 0 до t = 5, если скорость точки меняется по закону $\upsilon = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Найти ускорение этой точки в конце пути (т.е. при t = 5).

7. Определить сколько останется одного из изотопов нобелия ($^{256}_{102}\mathrm{No}$) через 1 час после искусственного получения 1 грамма этого радиоактивного элемента и сколько останется плутония ($^{239}_{94}\mathrm{Pu}$) через 100 000 лет после его получения той же массы, если скорость распада ($-\frac{dm}{dt}$) обоих металлов описывается равенством:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

причём, для нобелия $k = 1,66$ час$^{-1}$, для плутония $k = 6,93 \cdot 10^{-11}$ год$^{-1}$.

?

1. Дайте определения понятиям “значение интеграла”, “интеграл”.
2. Сформулируйте теорему “Ньютона – Лейбница”.
3. Какие правила нахождения интеграла вы знаете?

7.3. Способы представления интеграла

Интеграл функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$, также как и сама функция, может быть представлен:

- с помощью формулы. Например, если дана функция $y=x^2$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3};$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 9 и 10:
- с помощью графика (графический способ). Например, рис.11.

Таблица 9

Зависимость y от x

y	4	2	0	2	4
x	–2	–1	0	1	2

Таблица 10

Зависимость $\int_{x_1}^{x_2} ydx$ *от значений* x_1 *и* x_2

$\int_{x_1}^{x_2} ydx$	7/3	1/3	1/3	7/3	19/3
x_2 x_1	–1 –2	0 –1	1 0	2 1	3 2

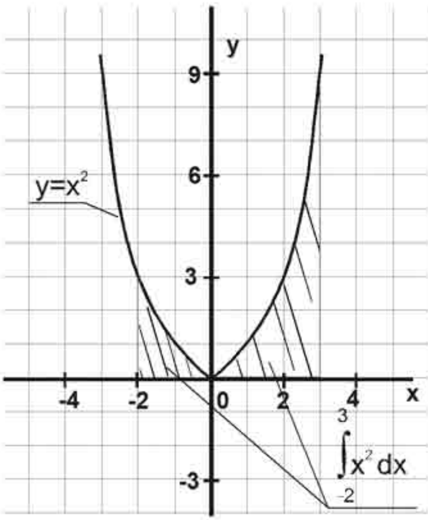


Рис. 11. Графическое представление функции $y=x^2$ и интеграла $\int_{x_1}^{x_2} x^2\,dx$ на отрезке оси абсцисс от – 2 до 3.

Геометрический смысл значения интеграла состоит в том, что графически, в координатах x – y интеграл функции y = f (x) на отрезке $[x_1; x_2]$ представляет собой приращение площади подграфика или надграфика на этом отрезке.

Подграфиком называется фигура, ограниченная:

- графиком функции y=f(x);
- прямыми $x= x_1$ и $x= x_2$;
- осью абсцисс

и расположенная ниже графика, выше оси абсцисс.

Надграфиком называется фигура, ограниченная:

- графиком функции $y=f(x)$;
- прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$;
- осью абсцисс

и расположенная выше графика, ниже оси абсцисс.

Например, если интеграл функции $y=x^2$ представляет собой приращение площади подграфика, то интеграл функции $y=-x^2$ представляет собой приращение площади надграфика. (Табл. 11, рис.12)

Таблица 11. Зависимость $\int_{x_1}^{x_2} -x^2\,dx$ *от* x_1 *и* x_2

$\int_{x_1}^{x_2} -x^2\,dx$	$-7/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-7/3$	$-19/3$
x_2	-1	0	1	2	3
x_1	-2	-1	0	1	2

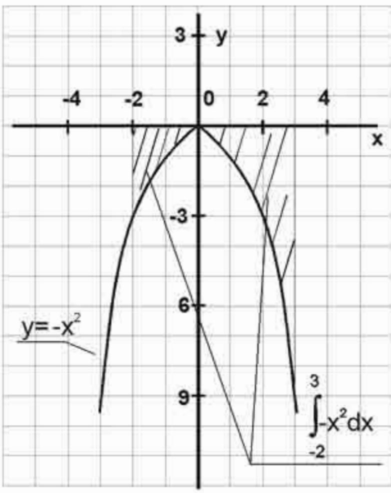


Рис. 12. График функции $y=-x^2$ и его надграфик на отрезке оси абсцисс от -2 до 3. Отрицательное значение приращения означает, что при увеличении значения x, площадь надграфика убывает (имеет отрицательное приращение).[8]

[8] В этом состоит принципиальное отличие свойств подграфика и надграфика. С возрастанием аргумента площадь подграфика возрастает, а надграфика убывает, т.е. приращение площади подграфика положительно, а надграфика отрицательно.

7.3.1. Пример решения задачи

Рассчитать интеграл $\int_{-3}^{3} ydx$, где y=2x и представить его графически в координатах x – y

Решение:

$$\int_{-3}^{3} ydx = \int_{-3}^{3} 2xdx = x \Big|_{-3}^{3} = 9 - 9 = 0$$

Заданный интеграл функции равен нулю, потому что приращения надграфика этой функции ($\int_{-3}^{0} 2xdx < 0$) и её подграфика ($\int_{0}^{3} 2xdx > 0$) противоположны по знаку и равны по абсолютной величине (рис.13).

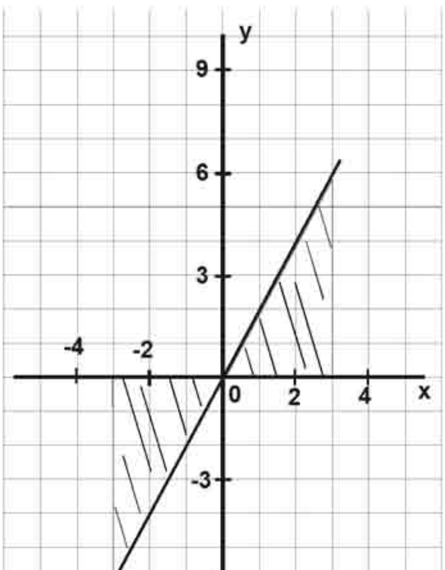


Рис. 13. График функции y=2x с указанием надграфика и подграфика на отрезке оси абсцисс от – 3 до 3.

7.3.2.Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить размеры площадей, заштрихованных на рисунках 11, 12, 13.

2. Рассчитать приведённые ниже интегралы и представить их графически в координатах x – y;

$\int_{1/3}^{3} y dx$, если y = 3x ; $\int_{-3}^{3} y dx$, если y = x^2; $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} y dx$, если y = cosx

?

1. Какими способами может быть представлен интеграл?
2. В чём состоит геометрический смысл значения интеграла?
3. Что такое подграфик функции? Надграфик функции?

7.4. Интегральные и дифференциальные формы естественнонаучных уравнений

Внешне очень схожие интегральные и дифференциальные формы некоторых естественнонаучных уравнений, описывающих одну и ту же величину (таблица 12), на самом деле содержат в себе информацию, существенно отличающую смысл этих уравнений друг от друга.

Например, интегральная форма записи выражения для скорости (υ) подразумевает, что на практически измеряемом отрезке пути значение скорости не меняется. Дифференциальная форма записи свидетельствует, что значение скорости рассматривается лишь в данный момент времени (t), то есть, описывается ситуация когда приращение пути и приращение времени бесконечно малы. Поэтому, когда скорость движения меняется в каждый момент времени (как, например, при свободном падении) интегральная форма записи выражения для скорости неприменима.

Аналогичные рассуждения можно применить и ко всем остальным физическим величинам, таким как: путь (S), ускорение (a), сила (F), работа (A).

Таблица 12

Интегральная и дифференциальная формы некоторых естественнонаучных выражений

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ
$\Delta S = \upsilon\Delta t$; $\upsilon = \Delta S/\Delta t$	$dS = \upsilon dt$; $\upsilon = dS/dt$
$\Delta\upsilon = a\,\Delta t$; $a = \Delta\upsilon/\Delta t$	$d\upsilon = adt$; $a = d\upsilon/dt$
$F = \Delta A/\Delta S$; $\Delta A = F\Delta S$	$F = dA/dS$; $dA = FdS$
$F = ma = m\Delta\upsilon/\Delta t$	$F = ma = m\,d\upsilon/dt$
$m_2/m_1 = e^{-kt}$	$dm/dt = -km$

Равенства левого столбца таблицы 12 получаются в результате интегрирования уравнений правого столбца при условии, что величины x, a, F, m – постоянны.

$$\int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt = \upsilon\int_{t_1}^{t_2} dt = \upsilon(t_2 - t_1) = \upsilon\cdot\Delta t = \Delta S, \quad \text{то есть} \quad \Delta S = \upsilon\cdot\Delta t \quad \text{или} \quad \upsilon = \Delta S/\Delta t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} adt = a{=}a(t_2 - t_1) = a\Delta t = \Delta\upsilon, \quad \text{то есть} \quad \Delta\upsilon = a\cdot\Delta t \quad \text{или} \quad a = \Delta\upsilon/\Delta t$$

$$\int_{S_1}^{S_2} FdS = F\int_{S_1}^{S_2} dS = F(S_2 - S_1) = F\Delta S = \Delta A, \quad \text{то есть} \quad \Delta A = F\Delta S \quad \text{или} \quad F = \Delta A/\Delta S$$

Из равенства $F = m\,d\upsilon/dt$, вытекает, что $Fdt = md\upsilon$

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} md\upsilon$$

$$F\int_{t_1}^{t_2} dt = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} d\upsilon$$

$$F(t_2 - t_1) = m(\upsilon_2 - \upsilon_1)$$

$$F\Delta t = m\Delta\upsilon \quad \text{или} \quad F = m\Delta\upsilon/\Delta t$$

$$\frac{dm}{dt} = -km; \quad \frac{dm}{m} = -kdt; \quad \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{m} = \int_0^t -k\,dt; \quad \ln m_2 - \ln m_1 = -kt;$$

$$\ln\frac{m_2}{m_1} = -kt; \quad m_2/m_1 = e^{-kt}$$

Соответственно равенства правого столбца можно получить дифференцированием равенств левого столбца.

7.4.1. Задачи для самостоятельного решения

Представить в интегральной форме следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dQ}{dt} = I^2R; \qquad dQ = I^2Rdt; \qquad \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}; \qquad d\Phi = -\varepsilon\,dt; \qquad \frac{dy}{dx} = Cx,$$

если величины I, R, ε, C – постоянны.

?

1. Каким образом дифференциальную форму уравнения можно перевести в интегральную? Приведите конкретные примеры.

2. Возможно ли перевести интегральную форму уравнения в дифференциальную?

8. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрия – это раздел геометрии, изучающий свойства фигур в пространстве.

При изучении стереометрии необходимо опираться на группу аксиом – положений, принимаемых без доказательства в силу своей очевидности.

Аксиома 1.

Какова бы ни была плоскость, в пространстве существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и не принадлежащие ей. (Рис.14)

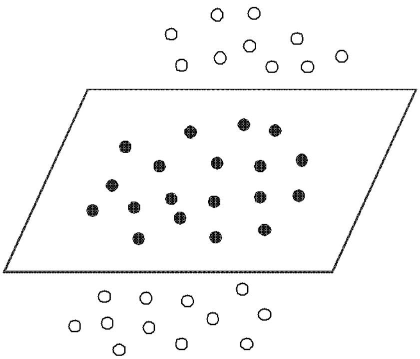


Рис. 14. Плоскость, перпендикулярная плоскости рисунка, с обозначением точек, принадлежащих плоскости (закрашенные) и не принадлежащих ей (незакрашенные).

Если в курсе геометрии за 7 – 9 классы изучались преимущественно точки и другие фигуры, лежащие только на плоскости[9], то в настоящем разделе будут рассматриваться тела, выходящие за рамки одной плоскости.

Аксиома 2.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. (Рис.15).

[9] Раздел геометрии, изучающий свойства фигур, лежащих на плоскости, называется планиметрией.

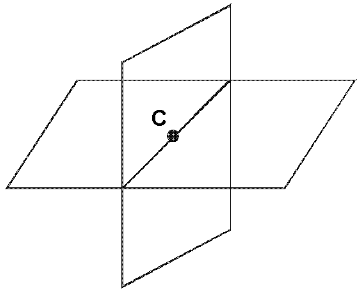


Рис. 15. Две различные плоскости, имеющие общую точку C

Аксиома 3.

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну (Рис.16).

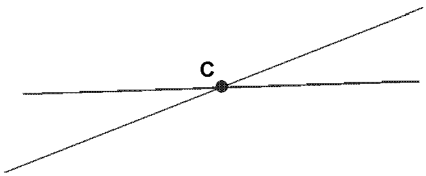


Рис.16. Две прямые, имеющие общую точку C и лежащие на плоскости рисунка.

8.1 Векторы в пространстве

В пространстве, как и на плоскости, величины, характеризующиеся направлением, называются векторными величинами или векторами.

Направленный отрезок *расстояния* называют *радиус – вектором*. Например, скорость движения пешехода по прямой является вектором (или векторной величиной), а путь, который преодолеет этот пешеход за конкретный промежуток времени – радиус – вектором.

Вектор, начало которого совпадает с некоторой фиксированной точкой O, а конец - с точкой M называется радиус – вектором точки M.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы) или противоположные.

При изучении планиметрии рассматривались только векторы, лежащие на плоскости, которые описывались двумя координатами x и y, называемыми, абсцисса и ордината соответственно, либо суммой координатных векторов $\bar{i}$ и $\bar{j}$, где $\bar{i}$ - единичный вектор оси x, $\bar{i}$ (1; 0), $\bar{j}$ - единичный вектор оси y, $\bar{j}$ (0; 1) (рис. 17).

В стереометрии вектор описывают тремя координатами x, y, z, последняя из которых называется аппликатой. Либо суммой координатных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, где $\bar{i}$ (1; 0; 0), $\bar{j}$ (0; 1; 0), $\bar{k}$ (0; 0; 1). То есть $\bar{k}$ представляет собой единичный вектор оси z. Ось аппликат располагается перпендикулярно плоскости, образуемой осями x и y, при этом ось x направляют к читателю, а оси y и z оказываются лежащими на плоскости рисунка (рис.18, 19).

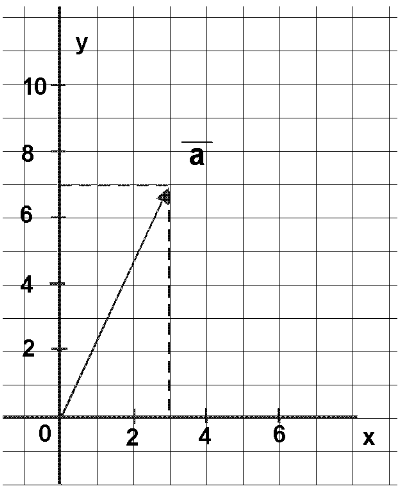


Рис. 17. Вектор $\bar{a}$ (3; 7), представленный в координатах плоскости, $\bar{a} = 3\bar{i} + 7\bar{j}$

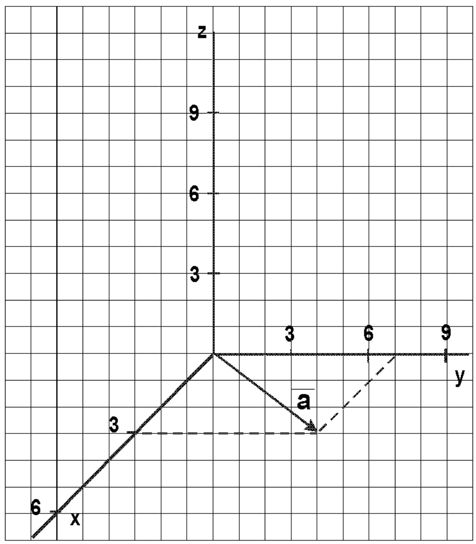


Рис. 18. Вектор $\bar{a}$ (3; 7; 0), представленный пространственными координатами $\bar{a} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 0$

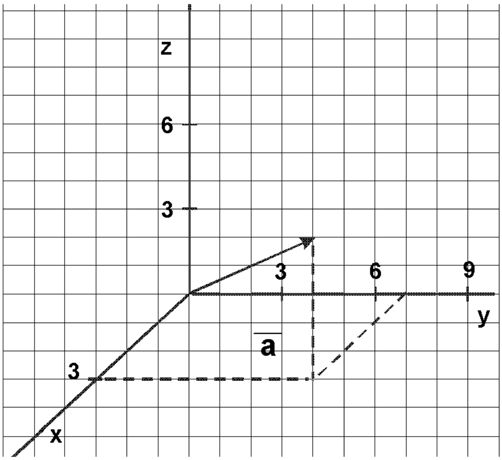


Рис. 19 . Вектор $\bar{b}$ (3; 7; 5),

$$\bar{b} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 5$$

Для удобства изображения некоторых рисунков, за единицу оси абсцисс условно будем принимать *диагональ* клетки тетради, хотя она больше стороны клетки в $\sqrt{2}$ раз. Масштабы различных осей координат могут иногда не совпадать. Векторы, лежащие в плоскости рисунка или направленные к читателю будем обозначать сплошными линиями[10]. Векторы, лежащие за плоскостью рисунка – пунктиром[11]. (Рис. 20)

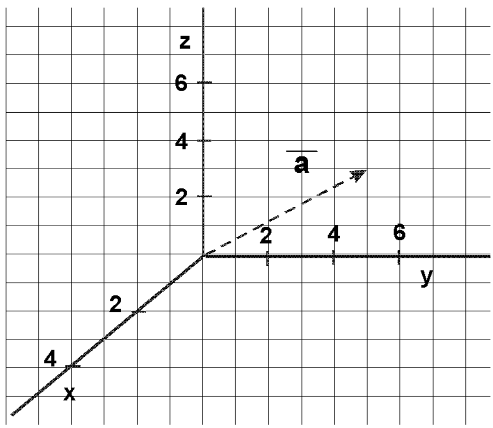


Рис. 20 . Вектор $\bar{a}$ (−2; 3; 1)

[10] Для таких векторов $x \geq 0$

[11] В этом случае $x < 0$

Следует иметь в виду, что существенным недостатком представления пространственного вектора на плоскости является практическое совпадение изображения некоторых векторов, имеющих различные координаты. Например, вектор $(\overline{0;4;2})$ займет на рис. 19 то же положение, что и вектор $\overline{b}$ (3; 7; 5), хотя порядок построения первого будет существенно иным.

Длина вектора[12] в пространстве равна корню квадратному из суммы квадратов трёх его координат

$$|\overline{b}| = \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}$$

Например, для вектора, представленного на рис. 19

$$|\overline{b}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{83}$$

Многие действия над векторами в пространстве выполняются точно также как и над векторами на плоскости.

Графическое сложение векторов производится по правилу треугольника и по правилу параллелограмма.

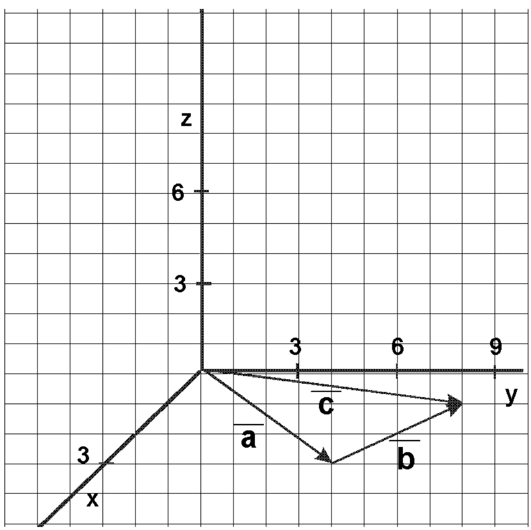


Рис. 21. Графическое сложение векторов $\overline{a}$ (3; 7; 0) и $\overline{b}$ ((3; 7; 5) по правилу треугольника:
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

[12] Длина вектора $\overline{b}$ обозначается $|\overline{b}|$ или b.

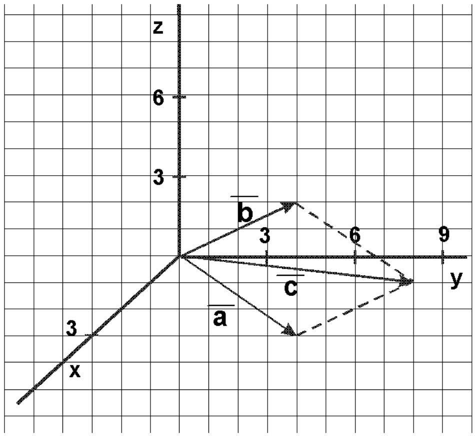


Рис. 22. Графическое сложение векторов $\overline{a}$ (3; 7; 0) и $\overline{b}$ ((3; 7; 5) по правилу параллелограмма:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$$

Координаты суммы векторов определяются сложением соответствующих координат слагаемых векторов:

$$\overline{a}\ (a_1; a_2; a_3) + \overline{b}\ (b_1; b_2; b_3) = \overline{c}\ (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

Например, если вектор является суммой векторов и , приведённых на рисунках 18 и 19, то

$$(3; 7; 0) + (3; 7; 5) = (3+3; 7+7; 0+5) = (6; 14; 5)$$

Графическое сложение этих векторов представлено на рис. 21, 22.

Произведением вектора $(\overline{a_1; a_2; a_3})$ на число k называется вектор с координатами $(\overline{ka_1; ka_2; ka_3})$

Скалярным произведением P векторов $(\overline{a_1; a_2; a_3})$ и $(\overline{b_1; b_2; b_3})$ называется сумма:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

при этом

$$P = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos \alpha$$

где α – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Значения косинусов и синусов некоторых углов приведены в таблице 13.

Таблица 13

Значения синусов и косинусов некоторых углов

α / Функция α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Иногда при решении задач удобно пользоваться тригонометрическими тождествами (18)–(25):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{18}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{19}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{20}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{21}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{22}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \tag{23}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{24}$$

$$1-\cos\alpha=2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{25}$$

Скалярные произведения широко используются в физике, например для расчётов работы A, совершённой силой при перемещении тела вдоль радиус-вектора [13]:

$$A=\left|\bar{F}\right|\cdot\left|\bar{s}\right|\cdot\cos\alpha,$$

[13] Под радиус-вектором подразумевают расстояние, преодолённое в конкретном направлении.

где $|\bar{F}|$ и $|\bar{s}|$ соответственно абсолютные значения силы, и радиус – вектора, α – угол между этими двумя векторами (рис.23).

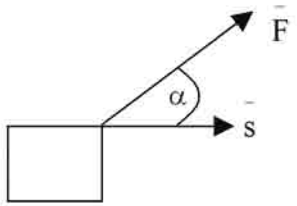


Рис. 23. Сила $\bar{F}$, перемещающая тело в направлении $\bar{s}$.

Над векторами в пространстве возможно ещё одно действие, которое неосуществимо в рамках одной плоскости и которое называется *векторным произведением.*

Вектор $\bar{c}$ *называется векторным произведением векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, *если он перпендикулярен плоскости, образуемой этими векторами, и направлен от наблюдателя, воспринимающего поворот от* $\bar{a}$ *к* $\bar{b}$ *через меньший угол как вращение по часовой стрелке, при этом*

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha$$

где α *– угол между векторами* $|\bar{a}|$ *и* $|\bar{b}|$.

Обозначается $\bar{c} = [\bar{a}\ \bar{b}]$ или $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ (рис.24).

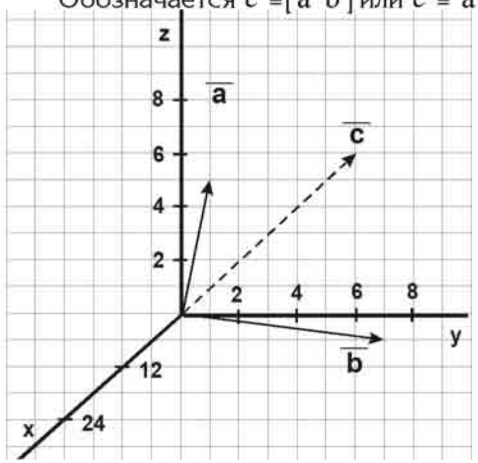


Рис. 24. Иллюстрация векторного произведения $\bar{c} = [\bar{a}\ \bar{b}]$: векторы $\bar{a}$ (0; 1; 5) и $\bar{b}$ (0; 7; −1) лежат на плоскости рисунка, вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен *от* читателя.

Существенной особенностью векторного произведения является отсутствие свойства переместительности, то есть $[\bar{a}\ \bar{b}] \neq [\bar{b}\ \bar{a}]$. В данном случае $[\bar{a}\ \bar{b}] = -[\bar{b}\ \bar{a}]$ (рис.25).

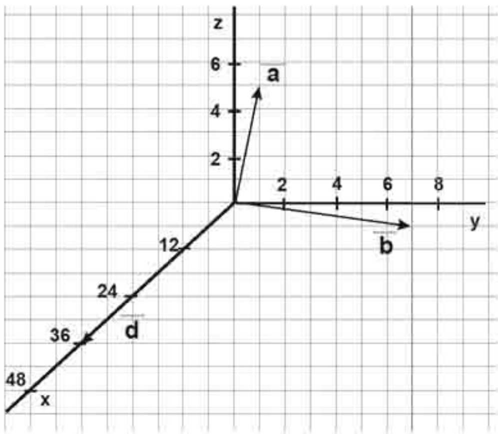


Рис. 25. Иллюстрация векторного произведения $\bar{d} = [\bar{b} \cdot \bar{a}]$: векторы $\bar{b}\,(0;\ 7;\ -1)$ и $\bar{a}\,(0;\ 1;\ 5)$ лежат на плоскости рисунка, вектор $\bar{d}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен *к* читателю.

Координаты векторного произведения вектора $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на вектор $(b_1;\ b_2;\ b_3)$ определяются равенством:

$$[\bar{a}\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

в котором запись $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ означает разницу $x_1y_2 - x_2y_1$ и называется определителем второго порядка (находится разницей произведений из двух чисел).

Практически векторное произведение $[\bar{a}\ \bar{b}]$ можно определять с помощью таблицы (матрицы), составленной из координат этих векторов:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

Закрыв в этой таблице первый столбец, получают матрицу первого определителя. Закрыв второй столбец, и, поменяв местами оставшиеся координаты внутри каждого вектора, получают матрицу второго определителя. Закрыв третий столбец, получают матрицу третьего определителя. Формулу для расчёта координат векторного произведения можно представить следующим образом:

$$[\overline{a}\overline{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Поскольку в пространственных координатах $\bar{i}$ (1; 0; 0); $\bar{j}$ (0; 1; 0); $\bar{k}$ (0; 0; 1), то из определения векторного произведения вытекает, что

$$\bar{k} = [\bar{i}\ \bar{j}].$$

Действительно

$$[\bar{i}\ \bar{j}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k} = \bar{k}$$

8.1.1 Примеры решения задач

Задача 1

Рассчитать координаты вектора $\bar{c}$, если = [$\bar{a}$ $\bar{b}$], где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы, представленные на рис. 24

Решение

$$\bar{c} = [\bar{a}\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\bar{k} = (1\cdot(-1) - 5\cdot7)\bar{i} + (5\cdot0 - 0\cdot(-1))\bar{j} +$$

$$+ (0\cdot7 - 1\cdot0)\bar{k} = -36\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{c}\ (-36; 0; 0)}$$

Задача 2

Рассчитать координаты вектора $\bar{d}$, если $\bar{d} = [\,\bar{b}\;\bar{a}\,]$, где $\bar{b}$ и $\bar{a}$ векторы, представленные на рис. 25.

Решение:

$$\bar{d} = [\,\bar{b}\;\bar{a}\,] = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = (7{\cdot}5 - (-1){\cdot}1)\,\bar{i} +$$

$$+ (-1{\cdot}0 - 0{\cdot}5)\,\bar{j} + (0{\cdot}1 - 7{\cdot}0)\,\bar{k} = 36\,\bar{i} + 0\,\bar{j} + 0\,\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{d}\ (36;\,0;\,0)}$$

Задача 3

Представить графически вектор $\bar{m}$ (2; 5; 0)

а) на плоскости;

б) в пространстве, обозначив пространство тремя координатными осями.

Решение

Решение подобных задач оформляется рисунками (рис 26).

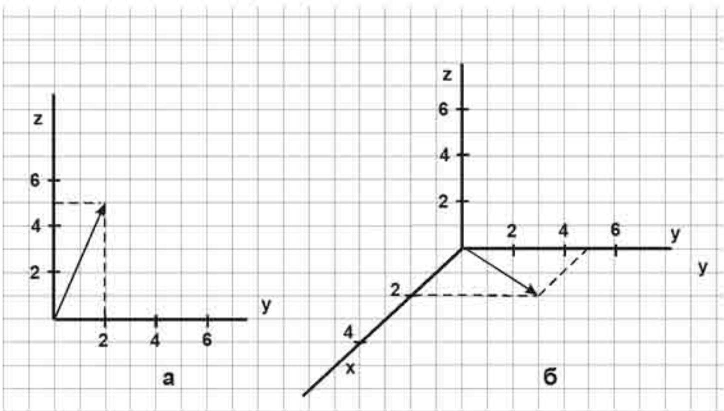


Рис. 26. Вектор $\bar{m}$ (2; 5; 0), представленный на плоскости (а) и в пространстве (б).

Задача 4

Вектор $\bar{n}$ (2; 5; 9) представить суммой координатных векторов, а также графически.

Решение

$$\bar{n} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}$$

Графическое представление вектора приведено на рис. 27.

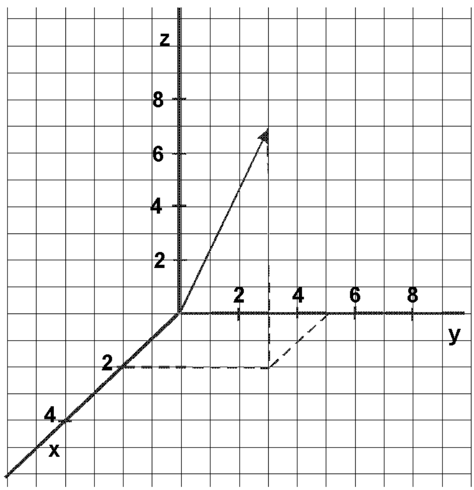


Рис.27. Вектор $\bar{n}$ (2; 5; 9). (Вспомогательные линии, обозначенные пунктиром, лучше проводить в уме, чтобы не загромождать рисунок)

Задача 5

Определить координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{c} = k\bar{a}$, $k = 5$; $(-3; 2; 0,1)$

Решение

$$\bar{c} = k\bar{a} = 5\cdot(-3)\bar{i} + 5\cdot 2\bar{j} + 5\cdot 0,1\bar{k} = -15\bar{i} + 10\bar{j} + 0,5\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{c} = -15\bar{i} + 10\bar{j} + 0,5\bar{k}}$$

или

$$\boxed{\bar{c}\ (-15;\ 10;\ 0{,}5)}$$

Задача 6

Рассчитать координаты и абсолютное значение скорости $\bar{\upsilon}$ движения лодки, направляемой к берегу со скоростью $\bar{\upsilon}_1\ (2{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$, если скорость течения реки $\bar{\upsilon}_2\ (0{,}5;\ 1{,}5;\ 0)$. Координаты векторов скорости приведены в м/с. Представить сложение векторов $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$ графически на плоскости и в пространстве.

Решение

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 + \bar{\upsilon}_2 = 2{,}5\,\bar{i} + 0{,}5\,\bar{j} + 0\,\bar{k} + 0{,}5\,\bar{i} + 1{,}5\,\bar{j} + 0\,\bar{k} = 3\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + 0\,\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{\upsilon} = 3\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + 0\,\bar{k}}$$

или

$$\boxed{\bar{\upsilon} = (3;\ 2;\ 0)}$$

$$\left|\bar{\upsilon}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61\ (\text{м/с})$$

$$\boxed{\left|\bar{\upsilon}\right| \approx 3{,}61\ \text{м/с}}$$

Графическое сложение векторов приведено на рис. 28

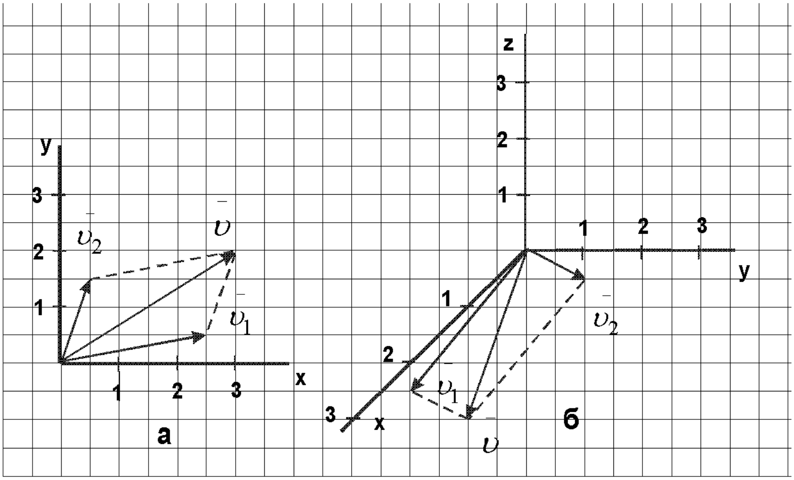


Рис. 28. Графическое сложение векторов $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$ по правилу параллелограмма на плоскости (а) и в пространстве (б).

Задача 7

Рассчитать координаты и длину вектора $\bar{p}$, являющегося суммой векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если

$$\bar{m} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}; \qquad \bar{n} = \bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}$$

Представить все три вектора графически.

Решение

$$\bar{p} = \bar{m} + \bar{n} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k} + \bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k} = 3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$$

$$\bar{p} = 3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$$

или

$$\boxed{\bar{p}\,(3;\,1;\,7)}$$

$$|\bar{p}| = \sqrt{3^2+1^2+7^2} = \sqrt{59} \approx 7{,}68$$

$$\boxed{|\bar{p}| \approx 7{,}68}$$

Графическое представление векторов $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ приведено на рис.29.

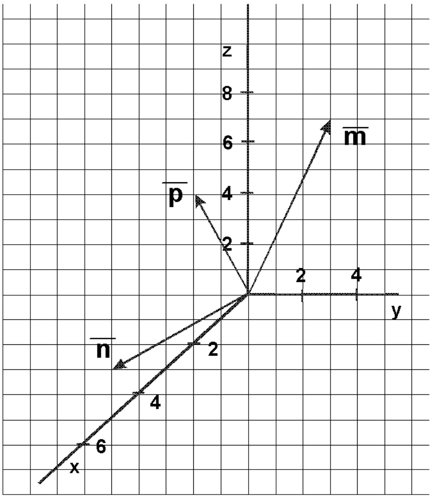


Рис.29. Векторы $\bar{m}$ (2; 5; 9), $\bar{n}$ (1; – 4; –2); $\bar{p}$ (3; 1; 7)

Задача 8

Рассчитать координаты и длину вектора $\bar{p}$, являющегося разностью векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если $\bar{m} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$; $\bar{n} = \bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$

Представить все три вектора графически.

Решение

$$\bar{p} = \bar{m} - \bar{n} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k} - \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} = \bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{p} = \bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}}$$

или

$$\boxed{\bar{p}\ (1; 3; 7)}$$

$$\left|\bar{p}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{59}$$

$$\boxed{\left|\bar{p}\right| = \sqrt{59}}$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 30

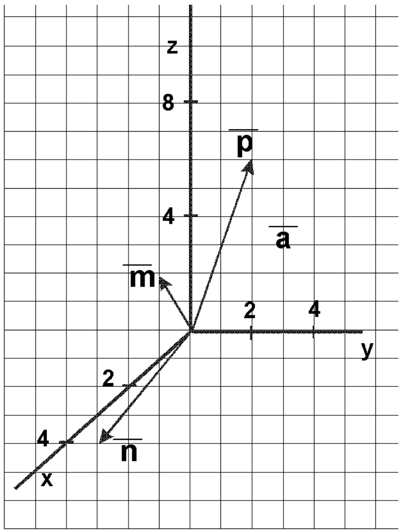


Рис.30. Векторы

$\bar{m}$ (2; 1; 4), $\bar{n}$ (1; -2; -3); $\bar{p}$ (1; 3; 7)

Задача 9

Вычислить скалярное произведение P двух векторов $\left|\bar{a}\right|$ и $\left|\bar{b}\right|$, угол между которыми составляет 30°.

При этом $\left|\bar{a}\right| = 2\sqrt{3}$; $\left|\bar{b}\right| = 7$.

Решение

$$P = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha = 2\sqrt{3} \cdot 7\frac{\sqrt{3}}{2} = 21.$$

$$\boxed{P = 21}$$

Задача 10

Вычислить скалярное произведение P векторов $\bar{c}\,(3;\ 4;\ 0)$ и $\bar{d}\ (-2;\ 1;\ 0)$. Представить оба вектора графически на плоскости и в пространстве.

Решение

$$P = \bar{c} \cdot \bar{d} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2$$

$$\boxed{P = -2}$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 31

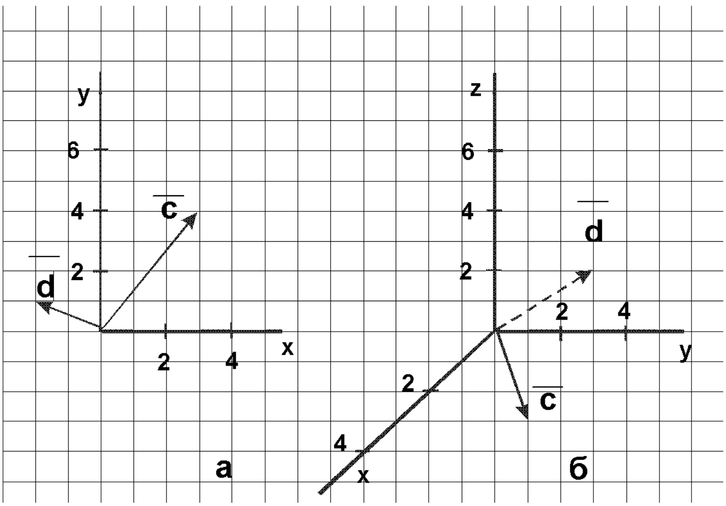


Рис.31. Векторы $\bar{c}\ (3; 4; 0)$ и $\bar{d}\ (-2; 1; 0)$ на плоскости (а) и в пространстве (б)

Задача 11

Вычислить скалярное произведение P векторов $\bar{a}\,(1;\ -2;\ 3)$ и $\bar{b}\,(2; 3; 7)$. Представить оба вектора графически.

Решение

$$P = \bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 17$$

$$\boxed{P = 17}$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 32.

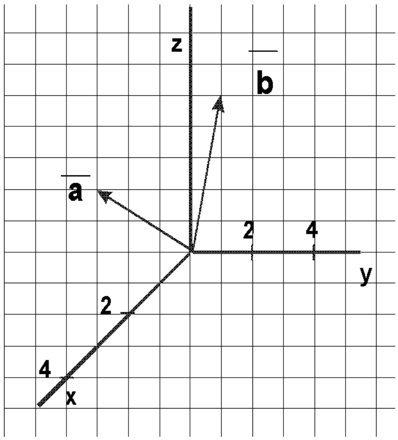


Рис. 32. Векторы $\bar{a}\,(1; -2; 3)$ и $\bar{b}\,(2; 3; 7)$.

Задача 12

Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{a} \cdot \bar{b}]$, а угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляет 45°. При этом $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\bar{b}| = 9$.

Решение

$$|\bar{p}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot 9 \sin 45^\circ = 2 \cdot 9 = 18$$

$$\boxed{|\bar{p}| = 18}$$

Задача 13

Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{a} \cdot \bar{b}]$, $\bar{a}\,(3;\ 4;\ 0)$ и $\bar{b}\,(-2;\ 1;\ 0)$. Определить длины всех трёх векторов и представить их графически в пространстве.

Решение

$$\bar{p} = [\bar{a}][\bar{b}] = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} = (4\cdot 0 - 0\cdot 1)\,\bar{i} + (0\cdot(-2) - 3\cdot 0)\,\bar{j} +$$

$$+ 3\cdot 1 - 4\cdot(-2)\,\bar{k} = 0\,\bar{i} + 0\,\bar{j} + 11\,\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{p} = 0\,\bar{i} + 0\,\bar{j} + 11\,\bar{k}}$$

или

$$\boxed{\bar{p}\,(0;\ 0;\ 11)}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\bar{a}| = 5$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{5}$$

$$|\bar{p}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 11^2} = 11$$

$$\boxed{|\bar{p}| = 11}$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 33.

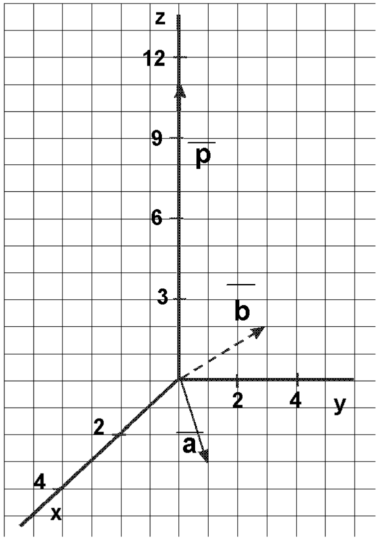


Рис. 33 Векторы

$\bar{a}$ (3; 4; 0); $\bar{b}$ (−2; 1; 0); $\bar{p}$ (0; 0; 11)

Задача 14

Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{c} \cdot \bar{d}]$, $\bar{c}$ (1; −2; 3), $\bar{d}$ (2; 3; 7). Определить длину всех трёх векторов.

Решение

$$\bar{p} = [\bar{c}\ \bar{d}] = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = (-2 \cdot 7 - 3 \cdot 3)\,\bar{i} +$$

$$+ (3 \cdot 2 - 1 \cdot 7)\,\bar{j} + 1 \cdot 3 - (-2 \cdot 2)\,\bar{k} = -23\,\bar{i} + \bar{j} + 7\,\bar{k}$$

или

$$\boxed{\bar{p} = -23\,\bar{i} + \bar{j} + 7\,\bar{k}}$$

$$\boxed{\bar{p}\,(-23; -1; 7)}$$

$$\left|\bar{c}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\boxed{\left|\bar{c}\right| = \sqrt{14}}$$

$$\left|\bar{d}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{62}$$

$$\boxed{\left|\bar{d}\right| = \sqrt{62}}$$

$$\left|\bar{p}\right| = \sqrt{(-23)^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{579}$$

$$\boxed{\left|\bar{p}\right| = \sqrt{579}}$$

8.1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Векторы, указанные ниже, представить графически

а) на плоскости;

б) в пространстве.

$$\bar{n}\ (1; 4; 0);\ \ \bar{l}\ (-2; 5; 0);\ \ \bar{p}\ (-1; -3; 0);\ \bar{q}\ (2; -3;\ 0).$$

2. Векторы, указанные ниже, представить суммой координатных векторов, а также графически .

$$\bar{n}\ (1; 4; 5);\ \ \bar{l}\ (-2; 5; -7);\ \ \bar{p}\ (-1; -3;\ 2);\ \bar{q}\ (2; -3;\ 2);\ \ \bar{s}\ (-1; -4\ \ -7)$$

3. Вычислить скалярное произведение P векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ угол между которыми составляет 60°, если

а) $\left|\bar{c}\right| = 4;\ \left|\bar{d}\right| = 15$ б) $\left|\bar{c}\right| = 9;\ \left|\bar{d}\right| = 2$ в) $\left|\bar{c}\right| = 6;\ \left|\bar{d}\right| = 5$

4. Вычислить скалярное произведение P векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$, угол между которыми составляет 30°, если

а) $\left|\bar{c}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\left|\bar{d}\right| = 7$ б) $\left|\bar{c}\right| = 11$; $\left|\bar{d}\right| = 5\sqrt{3}$ в) $\left|\bar{c}\right| = \sqrt{3}$; $\left|\bar{d}\right| = 8$

5. Вычислить скалярное произведение Р векторов $\bar{a}$ (1; –2; 2) и $\bar{b}$ (– 0,5; –3; 2). Оба вектора представить графически.

6. Вычислить работу (А), совершённую силой $\bar{F}$ перемещением тела вдоль радиус – вектора $\bar{s}$, если угол между радиус – вектором и направлением приложенной силы составлял 45°. При этом $\left|\bar{F}\right|$ = 70 Ньютон (70 Н), $\left|\bar{s}\right| = \sqrt{2}$ м, 1Н·1м ≡ 1Джоуль (1Дж)

7. Вычислить работу (А), совершённую силой $\bar{F}$ (10; 15; 3) перемещением тела вдоль радиус – вектора $\bar{s}$ (3; 2; 5), подразумевая, что сила измеряется в Ньютонах, координаты радиус – вектора в метрах.

8. Вычислить скалярное произведение Р векторов $\bar{f}$, $\bar{q}$. Не строя график, определить угол между этими векторами, если

а) $\bar{f}$ (2; 0; –3); $\bar{q}$ (0; 5; 0) б) $\bar{f}$ (3; –7; 10); $\bar{q}$ (5; 2; – 0,1)

в) $\bar{f}$ (– 4; 6; 20); $\bar{q}$ (3; 2; – 0)

9. Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{c} \cdot \bar{d}]$, а угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ составляет 30°. При этом

а) $\left|\bar{c}\right| = 4$; $\left|\bar{d}\right| = 3$ б) $\left|\bar{c}\right| = 2$; $\left|\bar{d}\right| = 5$ в) $\left|\bar{c}\right| = 3$; $\left|\bar{d}\right| = 2$

10. Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{c} \cdot \bar{d}]$, а угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ составляет 60^0. При этом

а) $|\bar{c}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $|\bar{d}| = 9$ б) $|\bar{c}| = 5$; $|\bar{d}| = 2\sqrt{3}$ в) $|\bar{c}| = 4$; $|\bar{d}| = \sqrt{3}$

11. Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\bar{a} \cdot \bar{b}]$, при этом:

а) $\bar{a}$ (0,5; 1,5; 0,7); $\bar{b}$ (1; 3; 1,4)

б) $\bar{a}$ (0,7; 0,5; 1,5); $\bar{b}$ (3; 1,4; 1)

в) $\bar{a}$ (3; – 6; 9); $\bar{b}$ (–2; 4; – 6)

г) $\bar{a}$ (– 6; 9; 3); $\bar{b}$ (–2; – 6; 4)

Какие из рассмотренных пар векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными? Какие из коллинеарных векторов являются равнонаправленными?

12. Определить координаты векторов $\bar{p}$ и $\bar{s}$, если

$\bar{p} = [\bar{a} \cdot \bar{b}]$, $\bar{s} = [\bar{b} \cdot \bar{a}]$, $\bar{a}$ (1; –2; 2); $\bar{b}$ (–0,5; –3; 2)

Вычислить длины всех четырёх векторов. Векторы $\bar{p}$ и $\bar{s}$ представить графически.

13. Определить координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{c} = k\bar{a}$, при этом

а) $k = 3$; $\bar{a}$ (2; 9; 7) б) $k = -2$; $\bar{a}$ (1; – 0,5; 4)

в) $k = 1,5$; $\bar{a}$ (–3; 2; –1)

14. Определить координаты вектора силы $\bar{F}$, а также абсолютное значение силы, воздействующей на электрический заряд q, движущийся со скоростью $\bar{\upsilon}$ в магнитном поле, характеризуемом вектором магнитной индукции $\bar{B}$, если сила, заряд, скорость и вектор магнитной индукции измеряются в Ньютонах (Н), кулонах (Кл), метрах в секунду (м/с) и Теслах (Тл) соответственно. При этом

$\bar{F} = q[\bar{\upsilon} \cdot \bar{B}]$; $q = 2$; $\bar{\upsilon}$ (75; 25; 125); $\bar{B}$ (0,05; 0,03; 0,01)

15. Доказать, что

$$\bar{i} = [\ \bar{j} \cdot \bar{k}\ ]$$

$$\bar{j} = [\bar{k} \cdot \bar{i}\ ]$$

16. Пользуясь тождествами (18) – (21) определите: sin 105°, cos 105°, sin 15°, cos15°.

17. Проверьте справедливость тождеств (22) – (25) для $\alpha = 60°$.

?

1. Чем отличается стереометрия от планиметрии?
2. Перечислите названия осей пространственных координат
3. Перечислите известные Вам аксиомы стереометрии.
4. Что такое векторное произведение и как рассчитываются координаты векторного произведения?

8.2. Тела и поверхности

Телом называется конечная замкнутая часть пространства. Объём тела обозначают V.

Граница тела называется поверхностью тела. Площадь поверхности тела принято обозначать S.

При изображении тела будем представлять пунктиром линии, расположенные за плоскостью рисунка.

Наиболее типичными примерами тела могут служить: тела вращения и многогранники.

8.2.1. Тела Вращения

Тела вращения образуются в результате вращения плоских фигур.

Шар. Шаром называется тело, которое состоит из точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки (рис. 34). Эта точка (O) называется центром шара, а данное расстояние (R) радиусом шара.

Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси. Поверхность шара называется сферой.

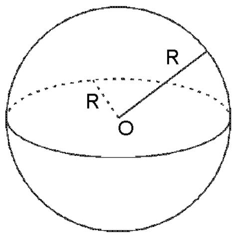


Рис. 34 Шар

Площадь сферы определяется равенством:

$$S = 4\pi R^2$$

Объём шара рассчитывается по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Цилиндр. Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис.35). Круги называются основаниями цилиндра, их радиус (R) – радиусом цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружности кругов – образующими цилиндра. Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Расстояние между плоскостями оснований (H) называется высотой цилиндра. Прямой цилиндр можно представить как тело, описываемое прямоугольником со сторонами R и H при вращении вокруг одной из сторон как оси.

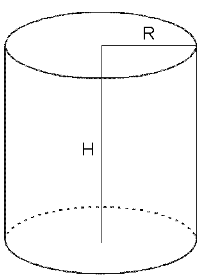


Рис. 35. Цилиндр

Площадь боковой поверхности прямого цилиндра вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi RH$$

Площадь полной поверхности представляет собой сумму площадей оснований и боковой поверхности. Объём прямого цилиндра определяется равенством:

$$V = \pi R^2 H$$

Конус. Конусом называется тело, которое состоит из круга – *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 36). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса (l). Высотой конуса (H) называется перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.

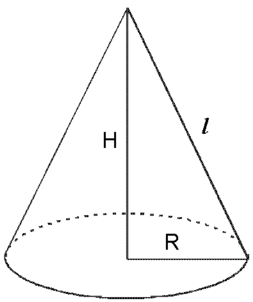


Рис. 36. Конус

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S = 4\pi Rl,$$

где R – радиус основания конуса. Площадь полной поверхности равна сумме площадей основания конуса и боковой поверхности.

Объём конуса определяется равенством:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Конус является результатом вращения прямоугольного треугольника с катетами R и H вокруг одного из катетов.

8.2.2. Многогранники

Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 37).

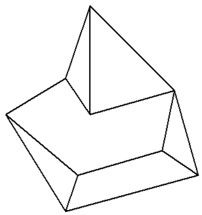


Рис. 37. Многогранник

Площадь полной поверхности многогранника равна сумме площадей всех многоугольников этого многогранника. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется *гранью*. Стороны граней называются рёбрами многогранника, а вершины – вершинами многогранника. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер. Внутренняя точка выпуклого правильного многогранника, являющаяся центром вписанного шара и центром описанного шара, называется центром этого многогранника.

Шар называется вписанным в многогранник, если поверхность шара касается всех граней этого многогранника Рис. 38.

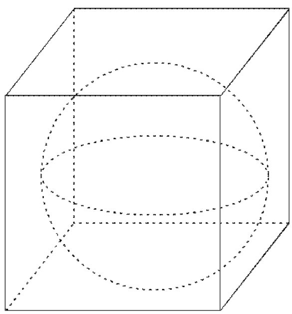


Рис. 38. Шар, вписанный в многогранник

Шар называется описанным около многогранника, если поверхность шара касается всех вершин многогранника. Интересно отметить, что если шар вписан в многогранник, то этот многогранник является описанным около шара. Если шар описан около многогранника, то многогранник является вписанным в шар.

Призма. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (Рис.39).

Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины – боковыми рёбрами призмы. Высотой призмы (H) называется расстояние между плоскостями её оснований.

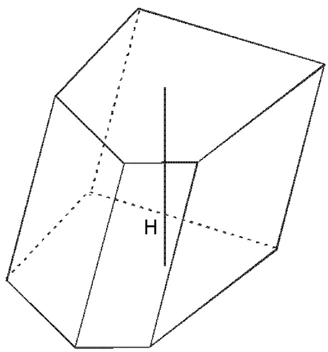


Рис. 39. Призма с высотой H

Призма называется прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям (рис. 40). В противном случае призма называется наклонной (рис.е).

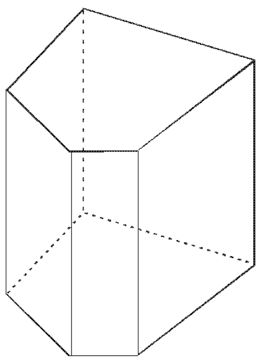


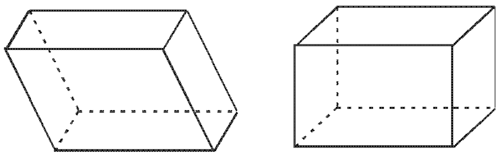
Рис. 40. Прямая призма

Объём любой призмы определяется по формуле

$$V = SH,$$

где S – площадь основания.

Параллелепипед Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется параллелепипедом (Рис. 41 (а, б))



а б

Рис. 41. Параллелепипед: наклонный (а) и прямой (б)

У параллелепипеда все грани – параллелограммы. Прямой правильный параллелепипед называется кубом (рис. 42).

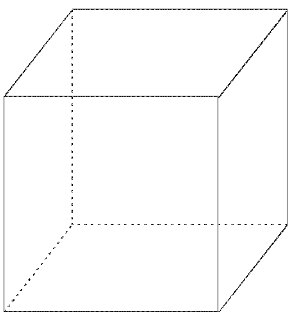


Рис. 42. Куб

Пирамида . Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника - *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания – *вершины пирамиды*, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 43). Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми рёбрами*. *Высотой пирамиды* (H) называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

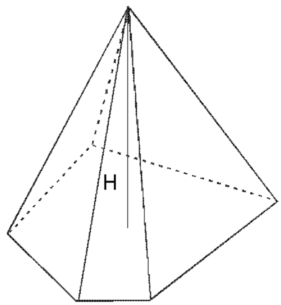


Рис. 43. Пирамида с высотой H

Пирамида называется n – угольной, если её основанием является n – угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром.*

Объём пирамиды определяется равенством

$$V = \frac{1}{3}SH$$

где S – площадь основания пирамиды.

Теорема.

В правильном тетраэдре *ABCD* (рис.44), состоящем из четырёх равных тетраэдров OBCD, OACD, OABD, OABC углы при центре O тетраэдра: $\angle DOA$; $\angle DOC$; $\angle DOB$; $\angle BOC$; $\angle BOA$; $\angle COA$ равны между собой и составляют 109°28'

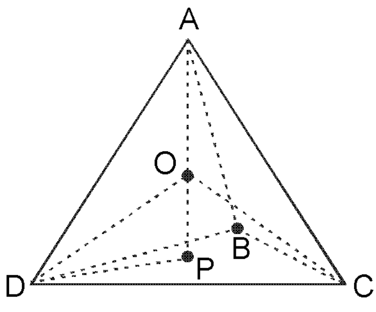


Рис.44. Правильный тетраэдр ABCD состоящий из четырёх равных тетраэдров: OBCD, OACD, OABD, OABC.

Доказательство

Поскольку точка O является центром тетраэдра, то $OA = OD = OB = OC$ и представляют собой радиус шара описанного около тетраэдра.

Рассматривая треугольник ΔDOA, и, вводя обозначения $\angle DOA = \alpha$; $DA = a$, $OA = OD = OB = OC = в$, можем, на основании теоремы косинусов, записать:

$$a^2 = в^2 + в^2 - 2в^2 \cos\alpha$$

откуда

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2}{2в^2} \qquad (26)$$

Так как:

$$AP = \sqrt{DA^2 - DP^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \text{[14]} \qquad (26')$$

то, если обозначить $\angle DOP = \beta$,

$$a\sqrt{\frac{2}{3}} = AO + OP = в + в\cdot\cos\beta = в\,(1 + \cos\beta) = в\,(1 + \cos(\pi - \alpha)) = в\,(1 - \cos\alpha)$$

или

$$1 - \cos\alpha = \frac{a}{в}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (27)$$

На основании уравнений (26) и (27) можем записать:

$$a^2/2в^2 = \frac{a}{в}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

или

$$\frac{a}{в} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (28)$$

откуда

[14] DP является радиусом окружности, описанной около равностороннего треугольника DBC со стороной a и поэтому $DP = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$a = 2в\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (29)$$

Поскольку, $a = DA$ и тетраэдр ABCD - правильный, то все его рёбра определяются равенством (29). Подставляя (29) в (27) получим[15]

$$\cos\alpha = -1/3$$

или

$$\alpha = 109°28'$$

Так как, треугольники: $\Delta DOA; \Delta DOC; \Delta DOB; \Delta BOC; \Delta BOA; \Delta COA$ равны по трём сторонам, то все углы при точке O: $\angle DOA$; $\angle DOC$; $\angle DOB$; $\angle BOC$; $\angle BOA$; $\angle COA$ равны между собой и составляют 109°28'

Что и требовалось доказать.

8.2.3. Примеры решения задач

1. Найти координаты всех вершин тетраэдра, приведённого на рис. 44, если O (0; 0; 0), A (0; 0; 1); C (0; $\sin\alpha$; $\cos\alpha$). При этом известно, что $\cos\alpha = -1/3$.

Решение

Из условия задачи вытекает, что вершина A лежит на оси z, а вершина C – на плоскости, образуемой осями z и y. Причём, OA = OD = OB = OC =1.

Так как рассматриваемый тетраэдр правильный, то отрезок AP перпендикулярен к плоскости, образуемой вершинами BCD, следовательно, третьи координаты (z) точек B, C и D одинаковы и равны $\cos\alpha$:

$$z(B) = z(C) = z(D) = \cos\alpha$$

Длину ребра AC можно представить как длину вектора AC:

$$AC = OC - OA$$

[15] Тот же результат получается при подстановке 28 в 27

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-\sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + 1 - 2\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\cdot\cos\alpha} = \sqrt{2\cdot(1-\cos\alpha)} = \sqrt{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (30)$$

Первые (x) и вторые (y) координаты точек B, C и D будут совпадать с соответствующими координатами вершин треугольника B'C'D', являющегося проекцией треугольника BCD на плоскость, образуемую осями x и y (Рис. 45).

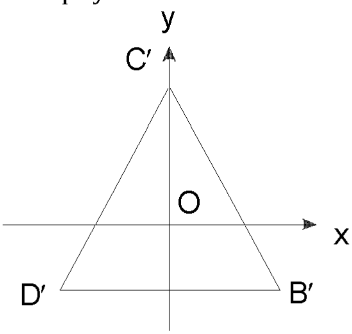


Рис. 45. Проекция треугольника BCD на плоскость, образуемую осями x и y. B', C' и D' - проекции точек B, C и D соответственно.

Так как AC = CD = CB =BD = C'D' = C'B' =B'D' и C'O лежит на медиане, то первые координаты (x) точек B и D (x(B) и x(D)) равны по абсолютному значению половине длины отрезка AC, но противоположны по знаку:

$$x(B) = \sin\frac{\alpha}{2}; \qquad x(D) = -\sin\frac{\alpha}{2}$$

Вторые координаты (y) точек B и D (y(B) и y(D)) равны между собой. Поскольку **O** является точкой пересечения медиан, делящей их в отношении 2: 1 от вершины, а по условию задачи

C'O = $\sin\alpha$, то

$$y(B) = y(D) = -\frac{\sin\alpha}{2}$$

Таким образом

$$\boxed{B\left(\sin\frac{\alpha}{2};\ -\frac{\sin\alpha}{2};\ \cos\alpha\right) \qquad D\left(-\sin\frac{\alpha}{2};\ -\frac{\sin\alpha}{2};\ \cos\alpha\right)}$$

Кроме того, условия задачи позволяют рассчитать конкретные значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha$. Действительно, на основании теоремы косинусов для ребра AC можно записать:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2\,AO \cdot OC \cdot \cos\alpha$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Согласно равенствам (30)

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

или

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (31)$$

Рассматривая систему уравнений

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

можно выразить $\cos\frac{\alpha}{2}$ из второго уравнения

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (32)$$

и подставить в первое

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Откуда, на основании равенства (23), можем записать:

$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

или

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: A (0; 0; 1), $B\left(\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$,

$C\left(0;\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{1}{3}\right)$

2. Определить площадь полной поверхности и объём тетраэдра, рассмотренного в предыдущей задаче.

Решение

Площадь полной поверхности правильного тетраэдра (S) представляет собой сумму площадей четырёх правильных треугольников (s):

$$S = 4s = 4\frac{a\cdot h}{2} \qquad (33),$$

где a – основание треугольника, h – его высота. Помня, что высота правильного треугольника является его медианой, можно записать теорему Пифагора для данного случая следующим образом:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Откуда

$$h = \sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим

$$S = 4\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{4}$$

или

$$S = a^2\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{4} \qquad (35)$$

$$V = \frac{s\cdot H}{3}$$

Из равенства 26', приведенного в доказательстве рассмотренной теоремы, следует, что $H = AP = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Поэтому

$$V = \frac{s}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 3}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

или

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \qquad (36)$$

Из предыдущей задачи вытекает, что

$$a = AC = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (37)$$

Подставляя 37 в 35 и 36, получим:

$$S = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}62 \qquad V = \frac{8}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}51$$

Ответ: $S \approx 4{,}62$; $V \approx 0{,}51$

3. Длина углерод-углеродной связи в молекуле пропана (C_3H_8) составляет 1,54 Å, а углерод-водородной связи 1,10 Å (рис.46).

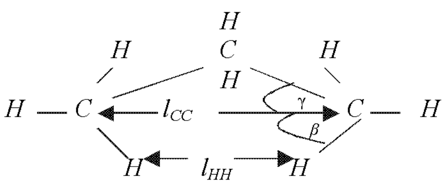


Рис. 46. Схема строения молекулы пропана.

Определить для этой молекулы кратчайшее расстояние:

- между крайними атомами углерода (l_{CC});
- между крайними атомами водорода (l_{HH})

если все углы при атомах углерода, образованные химическими связями составляют $109^0 28'$ ($\cos 109^0 28' = -\frac{1}{3}$). Полученный результат выразить в метрах.

Дано:

$l_1 = 1{,}54\ \text{Å}$

$l_2 = 1{,}10\ \text{Å}$

$\alpha = 109^\circ 28'$

l_{CC} – ?

l_{HH} – ?

Решение:

По теореме косинусов:

$$l_{CC} = \sqrt{l_1^2 + l_1^2 + 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos\alpha} = 1{,}54\sqrt{\frac{8}{3}} =$$

$$= 3{,}08\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2{,}52(\text{Å}) \equiv 2{,}52 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

Расстояние между l_{HH} можно воспринимать как часть расстояния l_{CC}:

$$l_{HH} = l_{CC} - 2 \cdot l_2 \cdot \cos\beta$$

$$\beta = \alpha - \gamma$$

Поскольку γ является углом равнобедренного треугольника, сумма углов которого равна π, то

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

I способ окончания решения задачи

$$\beta = \alpha - \gamma = \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{3\alpha - \pi}{2} = \frac{3 \cdot 109^0 28' - 180^0}{2} = 74^0 12'$$

$$\cos\beta = \cos 74^0 12' \approx 0{,}272$$

$$l_{HH} = 2{,}52 - 2 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}272 \approx 1{,}92\ (\text{Å}) \equiv 1{,}92 \cdot 10^{-10}\ (\text{м})$$

II способ окончания решения задачи

(позволяющий избежать необходимости вычисления $\cos 74^0 12'$)

$$\cos\beta = \cos(\alpha - \gamma) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\alpha - \pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right) = \sin\frac{3}{2}\alpha =$$

$$= \sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Согласно равенству (25):

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Поэтому

$$\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \sqrt{\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$l_{HH} = 3{,}08\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\cdot 1{,}1\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}92\ (\text{Å}) \equiv 1{,}92\cdot 10^{-10}\ (\text{м})$$

Ответ: $l_{CC} \approx 2{,}52\cdot 10^{-10}$ м; $l_{HH} \approx 1{,}92\cdot 10^{-10}$ (м)

8.2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить радиус и объём шара, площадь сферы которого 12, 56 см^2.

2. Вычислить площадь полной поверхности и объём прямого цилиндра с радиусом 2 см и высотой 3 см.

3. Вычислить площадь полной поверхности конуса и его объём, если радиус его основания 3 см, а высота 4 см.

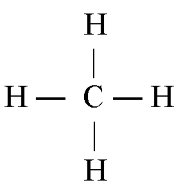
4. Докажите теорему: «Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, то есть, на длину бокового ребра».

5. Определить площадь основания прямой призмы если её объём составляет 14 см^3, а длина бокового ребра 0,7 м.

6. Вычислить площадь полной поверхности и объём куба, ребро которого 5 см.

7. Найти площадь полной поверхности и объём прямого параллелепипеда, рёбра которого 1м, 2 м, 50 см.

8. Определить расстояние между двумя соседними атомами водорода в молекуле метана, если известно, что:



- все атомы водорода являются вершинами правильного тетраэдра;
- длина химической связи составляет 1,1 ангстрем (Å) (1Å ≡ 10^{-10} м).

Полученный результат выразить в системе СИ.

9. Пользуясь решением задач п. 1.6.2.3. и зная, что длина химической связи в молекуле метана составляет $1{,}1\,\text{Å}$.

а) определить координаты всех атомов водорода этой молекулы, если:

- углерод является началом координат;
- один из атомов водорода лежит на оси z;
- другой – на плоскости, образуемой осями z и y;

б) Найти площадь полной поверхности и объём этого тетраэдра.

в) Результаты, полученные при решении а) и б), выразить в системе СИ.

10. Определить кратчайшее расстояние l_{HH} между атомами водорода, расположенными при различных атомах углерода молекулы этана C_2H_6 (рис.47):

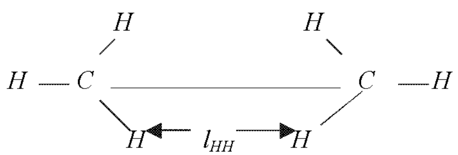


Рис. 47. Схема строения молекулы этана.

если все углы при атомах углерода, образованные химическими связями составляют $109^0 28'$ ($\cos 109^0 28' = -\frac{1}{3}$), длина углерод-углеродной связи $1{,}54\,\text{Å}$, а углерод-водородной связи $1{,}10\,\text{Å}$.

Полученный результат выразить в метрах.

?

1. Что такое тело?

2. Приведите известные Вам примеры тел вращения и формулы, по которым определяются площади их полной поверхности и объёмы.

3. Что такое многогранник?

4. Приведите известные Вам примеры многогранников и формулы, по которым определяются их объёмы.

5. Докажите, что в треугольнике, образованном двумя вершинами правильного тетраэдра и центром тетраэдра, угол при центре тетраэдра равен $109^\circ 28'$.

9. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий перестановки, сочетания и размещения элементов множества.

Перестановкой элементов множества называется заданный порядок данных элементов, установленный в данном множестве. Например, три человека, условно обозначаемые цифрами 1, 2, 3, могут разместиться на одной скамейке шестью способами:

I – 1, 2, 3;
II – 2, 3, 1;
III – 3, 1, 2;
IV – 3, 2, 1;
V – 1, 3, 2;
VI – 2, 1, 3.

То есть, число перестановок множества, состоящего из трёх элементов равно шести. В общем случае, для множества, состоящего из n элементов, число перестановок (P_n) рассчитывается по формуле:

$$P_n = n!$$

где n! (эн факториал) представляет собой произведение натуральных чисел от единицы до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

В рассмотренном примере:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Принято считать, что $P_0 = 0! = P_1 = 1! = 1$

Сочетанием называется конечное подмножество m конечного множества n (m < n).

Например, из трёх человек, сидящих на скамейке (1, 2, 3), только двое окончат музыкальное училище. На вопрос – кто конкретно? – существует три варианта ответа:

I – 1, 2;
II – 2, 3;
III – 1, 3.

То есть, число сочетаний из трёх по два равно трём. В общем случае число сочетаний из n по m (C_n^m) рассчитывается по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Поскольку

$$n! = (n-m)! \cdot (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

то

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

В рассмотренном примере:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

или

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$$

В данном случае величины $(n-1)$ и $(n-m+1)$ совпадают:

$$n-1 = n-m+1$$

Размещением называется конечное подмножество m конечного множества n, с заданным порядком элементов, установленном в подмножестве m. Например, из трёх человек (1, 2, 3) только двое окончат музыкальное училище – один с отличием, а другой с тройками. На вопрос – кто станет отличником, а кто троечником? – существует шесть вариантов ответа. Подразумевая, что первая арабская цифра обозначает отличника, эти варианты можно представить следующим образом:

I – 1, 2;
II – 2, 1;
III – 2, 3;
IV – 3, 2;
V – 1, 3;
VI – 3, 1.

То есть, число размещений из трёх по два равно шести. В общем случае, число размещений из n по m (A_n^m) рассчитывается по формуле:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Поскольку

$$n! = (n-m)! \cdot (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

то

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

В рассмотренном примере

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

или

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Здесь, также как и в предыдущем случае

$$(n-1) = (n-m+1)$$

Размещением с повторениями называется конечное подмножество m конечного множества n, с заданным порядком элементов, установленном в подмножестве m, среди которых могут быть одинаковые. Например, после вступительных экзаменов на троих друзей (1, 2, 3) выдали только два студенческих билета в разные учебные заведения - музыкальное училище и государственный университет. На вопрос – кто куда поступил, существует девять вариантов ответа. Подразумевая, что первая арабская цифра обозначает студента музыкального училища, эти варианты можно представить следующим образом:

I – 1, 2;
II – 2, 1;
III – 2, 3;
IV – 3, 2;
V – 1, 3;
VI – 3, 1.

Кроме того, не следует исключать и возможности поступления кого-то из них сразу в два учебных заведения:

VII – 1, 1;

VIII – 2, 2;

IX – 3, 3

То есть, число размещений с повторениями из трёх по два равно девяти. В общем случае, число размещений с повторениями из n по m (A'^{m}_{n}) рассчитывается по формуле:

$$A'^{m}_{n} = n^{m}$$

В рассмотренном примере:

$$A'^{2}_{3} = 3^{2} = 9$$

9. 1. Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько существует вариантов составления 7 разных книг на одной полке?

2. Из восьми шахматистов равного мастерства необходимо составить команду, в которую входило бы только три человека. Сколько существует вариантов состава такой команды?

3. Рассчитать количество вариантов назначения трёх человек на три различные должности из семи одинаково достойных кандидатов.

4. Рассчитать количество вариантов назначения двух человек на две различные должности из пяти одинаково достойных кандидатов с учётом возможности совмещения этих должностей.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событие, которое обязательно *произойдёт*, при выполнении некоторого комплекса условий S, называется *достоверным*.

Например, если внутри помещения, расположенного на земле, подбросить монетку и не ловить, то она обязательно упадёт на пол. В этой ситуации падение монетки будет событием достоверным. Если монетку подбросить внутри помещения космической станции, находящейся на околоземной орбите, то монетка может и не упасть на пол, поскольку не выполнено условие расположения помещения на земле.

Событие, которое наверняка *не произойдёт* при выполнении некоторого комплекса условий S, называется *невозможным*.

Например, при сбрасывании камня со скалы, его самопроизвольное движение вверх является невозможным.

Событие, которое может произойти, но может и не произойти, называется *случайным*.

Например, подброшенная монетка может упасть на пол «решкой», а может и не решкой – «орлом». Если, всё-таки, упала «решкой», то это событие случайное. Причём, падение «решкой» исключает падение «орлом». В этих условиях падение «решкой» и падение «орлом» считаются событиями *несовместными*. В других условиях, например, при одновременном подбрасывании двух монет, эти события могут стать совместными. События, при которых появление одного из них исключает одновременное появление других, называются *несовместными*.

Падение «орлом» или «решкой» являются событиями *единственно возможными*. Никаким другим образом монетка упасть не может.

Кроме того, эти события являются *равновозможными*, поскольку нет оснований предполагать выпадение «решки» более возможным, нежели «орла» или наоборот.

Все события в теории вероятностей считаются исходом некоторого *испытания*. Во всех рассмотренных примерах таким испытанием являлось подбрасывание монетки. Если в результате испытания наступает событие А, то такой исход называется *благоприятным* для события А.

Классической вероятностью события А (Р(А)) называется отношение числа благоприятных исходов (m) к общему числу (n) несовместных единственно возможных и равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Величину n иногда называют полем элементарных исходов

Из этого определения вытекают следующие основные свойства классической вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна 1;
2. Вероятность невозможного события равно 0;
3. Вероятность случайного события заключена между 0 и 1.

Статистической вероятностью (P'A)) называется предел отношения числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов (n') при неограниченном количестве испытаний:

$$P'(A) = \lim_{n' \to \infty} \frac{m}{n'}$$

Например, с классической точки зрения вероятность рождения мальчика не должна отличаться от вероятности рождения девочки. Действительно, поле элементарных исходов (мальчик и девочка) равно двум (n = 2). Благоприятный исход только один (m = 1). Следовательно, для обоих случаев

$$P = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Однако, во все времена, во всех странах, в среднем, на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков. То есть, статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,514. Практически установленная статистическая вероятность свидетельствует о том, что рождение мальчика и рождение девочки не являются событиями равновозможными, а значит, применение формулы классической вероятности в данном случае некорректно.

Но классическая и статистическая вероятности выпадения «орлом» подброшенной монетки совпадают.

В дальнейшем, под термином «вероятность» будет подразумеваться только вероятность классическая.

10.1. Примеры решения задач

1. Игральную кость (рис. 48) собираются подбросить 6 раз. Какова вероятность того, что она будет падать по очереди числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

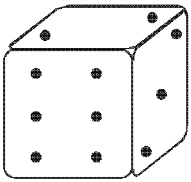


Рис. 48. Игральная кость, представляющая собой куб, каждая грань которого символизирует число, равное количеству точек, представленных на этой грани.

Решение:

В данном случае, возможны *повторные* выпадения одних и тех же цифр. То есть, нельзя исключать даже таких вариантов исхода:

1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6

Поэтому поле элементарных исходов представляет собой размещение с повторениями из 6 по 6:

$$n = A'^{\,6}_{6} = 6^6$$

Поскольку только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

то

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{6^6} \approx 2,14 \cdot 10^{-5}$$

Ответ: $P \approx 2,14 \cdot 10^{-5}$

2. На клавиатуре компьютера 100 клавиш. При этом буквенные клавиши настроены на русский алфавит. Обезьянка стала случайно нажимать клавиши.

Оцените вероятность того, что, нажав 1000 раз, она напишет начало произведения Л.Н. Толстого «Война и мир».

Решение:

Вполне возможно, что обезьянка будет нажимать на одни и те же клавиши. Поэтому

$$n = A'^{1000}_{100} = 100^{1000} = 10^{2000}$$

При этом только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

Поэтому

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{10^{2000}} = 10^{-2000}$$

Ответ: $P = 10^{-2000}$

3. Биохимическим носителем информации обо всех белках, вырабатываемых организмом, являются его дезоксирибонуклеиновые кислоты (ДНК), молекулы которых представляют собой две сплетённые цепи структурных звеньев, называемых нуклеотидами. Чтобы стал вырабатываться новый белок, необходимый данному организму для выживания в изменившихся условиях, последовательность нуклеотидов цепи в одной из ДНК, состоящей из 200 001 нуклеотида, должна измениться таким образом, чтобы поменялись местами соседние нуклеотиды[16]:

- пятисотый и пятьсот первый;
- девятьсот второй и девятьсот третий;
- тысяча четвёртый и тысяча пятый.

Оценить вероятность такого события при облучении организма, вызывающем только три одновременных произвольных перестановки различных пар соседних нуклеотидов.

[16] Изменения структуры ДНК называются мутациями.

Решение:

В цепи состоящей из 200 001 нуклеотида возможно 200 000 перестановок между соседними звеньями. Поэтому, в данном случае поле элементарных исходов равно количеству сочетаний из 200 000 по 3:

$$n = C^3_{2\cdot10^5} = \frac{2\cdot10^5!}{3!(200000-3)!} = \frac{199997\cdot199998\cdot199999\cdot200000}{6} \approx 2{,}7\cdot10^{20}$$

При этом только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

Поэтому

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{C^3_{2\cdot10^5}} \approx \frac{1}{2{,}7\cdot10^{20}} \approx 3{,}75\cdot10^{-21}$$

Ответ: $P \approx 3{,}75\cdot10^{-21}$

10.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Рассчитать вероятность:

- падения «орлом» однократно подброшенной монетки;
- выпадения числа 5 при однократном подбрасывании игральной кости.

2. Пенсионеру для расчёта за проезд необходимо достать из кармана одну пятирублёвую монету. Но в кармане у него, помимо двух пятирублёвых монет, находятся также три двухрублёвые монеты, и пять рублёвых монет. Какова вероятность того, что пенсионер достанет нужную монету, если на ощупь он не чувствует разницы в их размерах?

3. На клавиатуре компьютера 100 клавиш. При этом буквенные клавиши настроены на русский алфавит. Обезьянка стала случайно нажимать клавиши. Оцените вероятность того, что она:

- нажав только один раз, попала на букву «ж»;
- нажав 2 раза, написала слово «уж»;
- нажав 3 раза, написала слово «муж»;
- нажав 33 раза, написала русский алфавит.

4. Для ДНК, рассмотренной в третьем примере решения задач, оценить вероятность перемены местами двух соседних *заданных* нуклеотидов при облучении организма, вызывающем одну произвольную перестановку только в этой ДНК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа. 10 кл.: Учебник / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачёва и др. / Под ред. К.И. Куровского, Е.В. Смольниковой. – М.: Мнемозина, 2001. – 364 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ, 2004. – 992 с.

3. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10 -11 классов – М.: Просвещение, 2004. – 128 с.

Шепель О.М., Чабовская Н.И.

«МАТЕМАТИКА»

Редактор Осокина С.Е.

Корректор Стурова Н.Н.

Компьютерная верстка Валевич А.А,

Дизайн обложки Осиев К.О.

Гарнитура KorinnaC. Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Уч. изд., печ.л. _____

Издательство ФГУ «Томский ЦНТИ». Лицензия ИД №05060 от 14.06.2001 г.
Отпечатано в ФГУ «Томский ЦНТИ» Лицензия ПД №12-0084 от 16.04.2001 г.
Подписано в печать 18.05.2006 г. Заказ № _____. Тираж 40 экз.
634021, г.Томск, пр.Фрунзе, 115/3. Тел. (3822) 26-31-69.