О.М. Шепель, Н.И. Чабовская

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Томск – 2010

УДК 373 167:1:512+514
ББК 22.141я 721+22.151я72

Рекомендовано к изданию методическим Советом Томского музыкального колледжа им. Э.В. Денисова 20 сентября 2010 года.

В пособии изложены разделы математики, предусмотренные стандартами вузов, общеобразовательной школы, музыкальных колледжей. Адресовано преподавателям высших учебных заведений, учителям математики, учащимся естественно-математического профиля общеобразовательных школ, студентам музыкальных образовательных учреждений.

Главный редактор Д.В. Монастырский

Рецензент: доктор педагогических наук,
профессор Томского политехнического университета М.Г. Минин

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремление молодых искателей истины к постижению мира не только во всём многообразии, но и в неразрывном единстве всех его проявлений, заставляет современных авторов научной и учебной литературы объединять разрозненные лоскутки знаний в одно многоаспектное целое, как бы сложно это ни казалось. В настоящем учебном пособии каждый из рассматриваемых разделов математики представляет собой теоретическую подготовку к осмыслению материалов, излагаемых в курсе естествознания, или непосредственно объясняет математическую суть какого либо явления. В частности, изучая главу «Числа и цифры», читатель не только приобретёт надёжные навыки использования различных единиц измерения, но и научится оперировать мнимыми числами, столь необходимыми при математическом описании поведения элементарных частиц. Разбирая главу «Математические действия», обучающийся познакомится с логарифмированием и применит весь освоенный ранее математический аппарат для изучения закономерностей построения музыкальных строев. Азы дифференцирования и интегрирования, изложенные в главе «Математические операции», станут в дальнейшем теоретической основой рассмотрения скоростей: химических реакций, радиоактивного распада, движения физических объектов. Содержание главы «Комбинаторика и элементы теории вероятностей» заставит задуматься о вероятностном характере многих естественнонаучных и бытовых явлений. Наконец, освоение главы «Стереометрия» поможет при изучении электромагнитных полей, а также пространственного строения органических соединений на естественнонаучных уроках.

Во многих разделах приведены примеры решения задач. Хотя изложены они очень подробно, однако, учащимся лучше всего разбирать эти примеры вместе с преподавателем, тщательно переписывая в тетрадь, чтобы при самостоятельной работе над аналогичными заданиями у них уже были навыки восприятия задачи и оформления её решения.

ГЛАВА I

ЧИСЛА И ЦИФРЫ

Приступая к изучению новых разделов математики, будем исходить из того, что:

- математика – это наука, изучающая закономерности превращения одних чисел в другие;
- число – это мера количества какого-либо объекта;
- цифра – это знак для обозначения числа.

Например, число «четыре» можно представить привычным арабским зна́ком «4» или римским «IV». В обоих случаях обозначено одно и то же число. Но разными цифрами. Причём, одной арабской цифрой и двумя римскими. Число «двенадцать» можно представить двумя арабскими цифрами 12, и тремя римскими XII. В дальнейшем, для обозначения чисел будем пользоваться набором из десяти арабских цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) или из семи римских: I (один), V (пять), X (десять), L (пятьдесят), C (сто), D (пятьсот), M (тысяча).

§1. Классификация чисел

Все числа условно подразделяются на действительные и мнимые (рис. 1.)

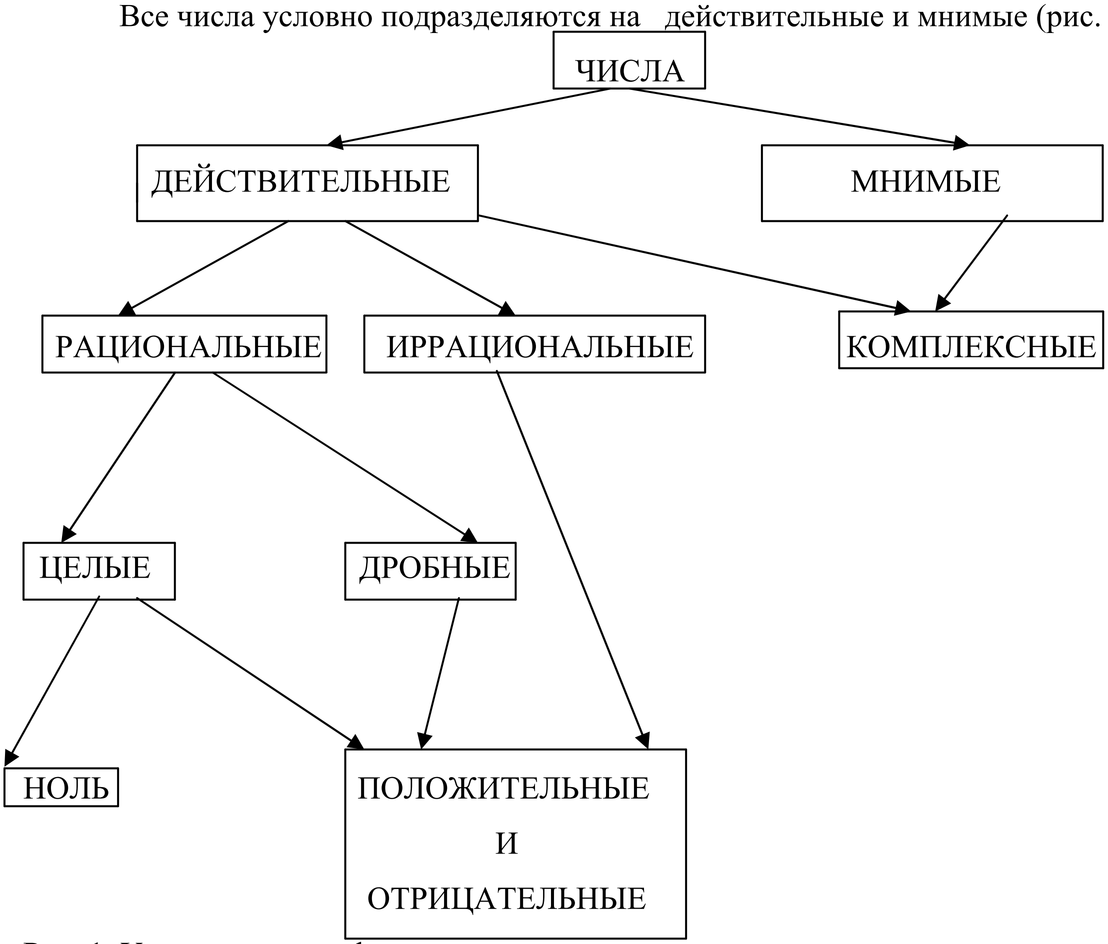


Рис. 1. Условная классификация чисел.

1. Мнимые и комплексные числа

Под мнимым числом подразумевается произведение $\boldsymbol{i}$y, где y – действительное число, $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица ($\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$; $\boldsymbol{i}^2 = -1$) . Сумма действительного ($\boldsymbol{x}$) и мнимого чисел $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}$y называется ***комплексным числом.*** Таким образом, мнимое число можно считать частным случаем комплексного числа с $\boldsymbol{x} = 0$. Разница $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}$y называется числом, *сопряжённым* числу $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}$y.

При этом справедливо и обратное утверждение: число $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}$y является сопряжённым числу $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}$y.

Модулем комплексного числа $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i}$y или $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}$y называется абсолютное значение числа:

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример 1. Вычислить выражение:

$$2^2 + 3i^2$$

Решение. Поскольку $i^2 = -1$, то

$$2^2 + 3i^2 = 4 + 3(-1) = 4 - 3 = 1$$

Следовательно

$$2^2 + 3i^2 = 1$$

Пример 2. Вычислить выражение:

$$(5 + 4i)^2 - 40i$$

Решение. Раскроем скобки

$$(5 + 4i)^2 - 40i = 25 + 40i + 16i^2 - 40i$$

Поскольку $i^2 = -1$, то

$$25 + 40i + 16i^2 - 40i = 25 - 16 = 9$$

Следовательно

$$(5 + 4i)^2 - 40i = 9$$

Пример 3. Представить в виде функции мнимого числа площадь S квадратного листа со стороной a, в середине которого вырезан участок в виде меньшего квадрата со стороной b (b < a) (Рис. 2).

Рис. 2. Квадрат с удалённой частью площади.

Решение. Из рисунка видно, что

$$S = a^2 - b^2$$

При этом

$$a^2 - b^2 = a^2 + b^2(-1)$$

Поскольку $-1 = i^2$, то

$$a^2 + b^2(-1) = a^2 + (i\,b)^2$$

Следовательно

$$S = a^2 + (i\,b)^2$$

Пример 4. Вычислить модуль комплексного числа $3 + 4i$.

Решение. Согласно определению модуля комплексного числа:

$$|3 + 4i| = \left|\sqrt{3^2 + 4^2}\right| = \left|\sqrt{9 + 16}\right| = \left|\sqrt{25}\right| = 5$$

Следовательно

$$|3 + 4i| = 5$$

Упражнения

1. Вычислить выражения

а) $7^2 + 5i^2$; б) $(3 + 2i)^2 - 12i$;

в) $(7i - 4)^2 + 56i$; г) $9i^2 - 1$;

д) $3i^2 + 3$; е) $25 + 20i^2$.

2. Представить в виде функции мнимого числа площадь S круга с радиусом R, в середине которого вырезан участок в виде меньшего круга с радиусом r ($r < R$).
3. Представить в виде функции мнимого числа площадь S прямоугольного треугольника с катетами A и B, в середине которого вырезан меньший прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a < A$; $b < B$).

4. Вычислить модули тех комплексных чисел, для которых приведены сопряжённые:

$3 + 4i$; $\sqrt{13} + 6i$; $\sqrt{21} + 10i$; $\sqrt{21} + 10i$; $\sqrt{7} + 3i$; $\sqrt{13} - 6i$; $\sqrt{3} + i$; $\sqrt{17} + 8i$;

$\sqrt{11} - 5i$; $\sqrt{3} - i$; $\sqrt{19} + 9i$; $\sqrt{17} - 8i$; $\sqrt{5} + 2i$; $\sqrt{7} - 3i$; $\sqrt{15} + 7i$

5. Доказать, что произведение сопряжённых комплексных чисел равно квадрату их модулей.

2. Действительные, рациональные и иррациональные числа

Действительными числами называется совокупность рациональных и иррациональных чисел. Числа, которые можно представить отношением целых чисел $\frac{m}{n}$, при условии, что $n \neq 0$, называются ***рациональными*** (ноль относится к множеству целых чисел). Рациональные числа часто удобно представлять в виде десятичных дробей. Например, $\frac{1}{10}$=0,1; $\frac{327}{100}$=3,27. Однако, нередко рациональное число невозможно записать в форме конечной десятичной дроби: $\frac{1}{3}$=0,33333333... ; $\frac{1}{7}$= 0,142857142857142....

Бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр (период дроби) называется периодической дробью. Периодические дроби принято записывать следующим образом:
$\frac{1}{3}$ = 0,(3) (читается: «ноль целых, три в периоде»); $\frac{1}{7}$= 0, (142857) (ноль целых, 142857 в периоде); 23, 14565656.... = 23, 14(56) (23 целых, 14 сотых, 56 в периоде). Необходимо отметить условность разделения дробей на периодические и конечные, поскольку любую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби с помощью ноля. Например, 0,1= 0,10000000....=0,1(0); 3,27 = 3,27000000... = 3,27(0). Если знаменатель рационального числа $\frac{m}{n}$ равен единице (n =1), то оно оказывается *целым*. Например:
$\frac{3}{1}$=3; $\frac{7}{1}$=7; $\frac{29}{1}$=29 и т.д. То есть, можно утверждать, что ***рациональные числа*** представляют собой совокупность целых и дробных чисел. Однако, следует подчеркнуть и условность подразделения чисел на целые и дробные, поскольку, как видно из последних равенств, любое целое число можно считать частным случаем дроби.

Иррациональным числом называется *бесконечная* десятичная *непериодическая* дробь. Например, $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309......; $\sqrt{3}$ =1,73205080756.....; $\sqrt{7}$ = 2,64575131106459.....;
$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \textbf{...} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot \mathrm{n}} + \textbf{...}$ = 2,718281828459......; $\pi = \frac{l}{d}$ = 3,14159265358.....,
где l – длина окружности, d - диаметр окружности. Интересно отметить, что в записи значения иррационального числа e после первого десятичного знака 7 два раза подряд записан год рождения

Л.Н. Толстого. К иррациональным числам относится также золотое сечение (золотая пропорция), представляющее собой отношение $(1+\sqrt{5}): 2 = 1{,}6180339\ldots$ Золотое сечение образуется в результате деления отрезка АС точкой В таким образом, что

АВ : ВС = АС : АВ. При этом АВ : ВС = АС : АВ = $(1+\sqrt{5}): 2 = 1{,}6180339\ldots$

Рациональные, а также иррациональные числа могут быть как положительными, так и отрицательными. Целые положительные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называются ***натуральными числами.*** Как видно из рис. 1 натуральные числа, с которых начинается изучение математики в школе, представляют собой лишь небольшой частный случай богатейшего разнообразия бесконечного мира чисел.

Весьма полезно знать названия больших чисел, используемые в России:

10^3 – тысяча (обозначается приставкой «кúло» к названию некоторых единиц измерения: килограмм, километр)

10^6 – миллион («мега»: мегатонна, мегагерц)

10^9 – миллиард («гига»: гигагерц, гигаватт)

10^{12} – триллион («тера»)

10^{15} – квадриллион («пета»)

10^{18} – квинтиллион («экса»)

10^{21} – секстиллион («зетта»)

10^{24} – септиллион («йотта»)

10^{100} – гугóл

Таким образом, с точки зрения математики число $6{,}022 \cdot 10^{23}$ представляет собой шестьсот два секстиллиона двести квинтиллионов. Однако, поскольку в естествознании это число имеет огромное значение, то ему даны ещё два названия: «число Авогадро» и «моль». Например, если говорится о том, что количество вещества равно одному молю, то на самом деле подразумевается КОЛИЧЕСТВО МОЛЕКУЛ вещества, равное числу Авогадро $6{,}022 \cdot 10^{23}$.

Запись чисел в форме, подобной числу Авогадро, то есть, как произведение

$$\boldsymbol{x} \cdot 10^{\mathrm{n}},$$

где n – целое число, $\boldsymbol{x}$ – число, абсолютное значение которого удовлетворяет требованию

$1 \le |\boldsymbol{x}| < 10$, называется *нормализованной* записью. Так, число «одна тысяча» оформляется нормализованной записью как произведение $1 \cdot 10^3$.

Следует, однако, иметь в виду, что при измерениях количества информации в байтах:

- термин «килобайт» означает 1024 (2^{10}) байт;
- мегабайт равен 1024 килобайт;
- гигабайт равен 1024 мегабайт.

Пример 1. Представить рациональным числом в виде дроби $\frac{m}{n}$ произведение иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{24,5}$$

Решение. Представим данное произведение единым корнем

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{24,5} = \sqrt{2 \cdot 24,5} = \sqrt{49}$$

Хотя мы знаем, что

$$\sqrt{49} = \pm 7$$

Но по условию примера, полученное рациональное число должно быть записано в виде дроби. Поэтому, окончательный ответ запишем следующим образом

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{24,5} = \pm\frac{7}{1}$$

Пример 2. Представить рациональным числом в виде дроби $\frac{m}{n}$ произведение иррациональных чисел:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$$

Решение. Выполним действия те же, что и в предыдущем примере:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3 = \frac{3}{1}$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \frac{3}{1}$$

Пример 3. Прочитать приведённое ниже число и представить его нормализованной записью.

72 000 000 000

Решение. Семьдесят два миллиарда:

$$72\ 000\ 000\ 000 = 7,2 \cdot 10^{10}$$

Пример 4. Прочитать приведённую ниже дробь и представить её нормализованной записью.

0, 0000000003

Решение. Ноль целых, три десятимиллиардных.

$$0,\ 000\ 000\ 0003 = 3 \cdot 10^{-10}$$

Пример 5. Выразить в молях количество стаканчиков мороженного, приобретённого покупателем в магазине, если он купил их 6 штук. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

Решение. Если в одном моле $6{,}022\cdot10^{23}$ штук, то в одной штуке $\frac{1}{6{,}022\cdot10^{23}}$ моль.

А в 6 штуках $\frac{6}{6{,}022}\cdot10^{-23}$ моль $\approx 9{,}96\cdot10^{-24}$ моль.

Упражнения.

Представить выражение рациональным числом в виде дроби $\frac{m}{n}$ (6,7).

6. а) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; б) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$;

в) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; г) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{9}$.

7. а) $\sqrt{50}:\sqrt{8}$; б) $\sqrt{12}:\sqrt{27}$;

в) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{54}$; г) $\sqrt[3]{500}:\sqrt[3]{108}$.

Прочитать число и представить его нормализованной записью (8 – 10)

8. а) 9 000 000 000; б)12 300 000;

в) 0, 0534; г) 0, 00000123;

9. а) 100; б) 10;

в) 1; г) 100 000.

10. а) 250 000; б) 0,1;

в) 0, 01; г) $\frac{1}{1000}$;

д) 0, 0001; е) 0, 0000000007

11. а) Покупатель заплатил за покупку 18 066 рублей. Выразить указанное количество рублей в молях.

б) Количество информации, равное 3 221 225 472 байта, выразить в мегабайтах (Мбайт) и гигабайтах (Гбайт).

?

1. **Дайте определения понятий число и цифра. Приведите конкретные примеры.**
2. **Что такое мнимое число и комплексное число?**
3. **Дайте определения следующим понятиям: действительное число, рациональное число, иррациональное число. Приведите примеры иррациональных чисел.**

§2. Числовые последовательности

Числовой последовательностью называется совокупность чисел, являющихся функцией их порядкового номера. Наиболее распространены два способа задания последовательности (x_n): *аналитический* и *рекуррентный*.

При использовании аналитического способа задаётся функциональная зависимость между значением числа x_n и его порядковым номером n, например:

$$x_n = \frac{n^2}{5-2n}$$

где n – натуральные числа.

Иногда для выражения последовательности недостаточно одной формулы. Если

$$x_n = \frac{2}{n-3}$$

то третий член последовательности оказывается неопределённым. Чтобы последняя функция стала последовательностью необходимо доопределить её значение в точке n = 3. Например:

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-3} \text{ при } n \neq 3 \\ 1 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

При использовании рекуррентного способа задаётся функциональная зависимость между значениями соседних чисел x_{n+1} и x_n и указывается значение одного из членов последовательности, например:

$$x_{n+1} = x_n + 5 \text{ при } x_1 = 2$$

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему, сложенному с одним и тем же числом d, называют *арифметической прогрессией.* Это число d называют разностью арифметической прогрессии. Например, последняя из рассмотренных последовательностей является арифметической прогрессий с d = 5.

Последовательность (x_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого n > 1 верно равенство:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \qquad (1)$$

Для любой арифметической прогрессии справедливы равенства:

$$x_n = x_1 + (n-1)d \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n \qquad (3)$$

где S_n – сумма первых n членов последовательности. Сумму большого числа слагаемых в математике очень часто обозначают специальным знаком суммы $\sum$ (сигма). В данном случае выражение (3) можно записать так

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$$

При этом левая часть равенства читается следующим образом «сумма икс итых по и от одного до эн».

Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число q, называют *геометрической прогрессией*. Это число q называют знаменателем геометрической прогрессии. Например, последовательность

$$x_{n+1} = 2x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 5$$

является геометрической прогрессией с q = 2.

Последовательность (x_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого n > 1 верно равенство:

$$x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1} \qquad (4)$$

Для любой геометрической прогрессии справедливы равенства:

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

где S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии, которая иначе может быть записана так

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Пример 1. Для геометрической прогрессии

$$x_{n+1} = 10x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 2$$

вычислить сумму $\sum_{i=1}^{30} x_i$.Округлить полученное значение до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

Решение. В соответствии с формулой

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(10^{30} - 1)}{10 - 1} = \frac{2}{9}(10^{30} - 1)$$

Поскольку предстоит округление до второй цифры после запятой в нормализованной записи, то вычитаемая в скобке единица оказывается цифрой незначащей. Поэтому можем записать

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \approx \frac{2}{9} \cdot 10^{30}$$

или в нормализованной записи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 2,22 \cdot 10^{29}$$

Упражнения.

12. Вычислить третий, десятый и сотый члены последовательности

$$x_n = \frac{n^2}{5-2n}$$

13. Рассчитать первые пять членов последовательности

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-3} \text{ при } n \neq 3 \\ 1 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

14. Для последовательности, заданной рекуррентным способом

$$x_{n+1} = x_n + 5 \text{ при } x_1 = 2$$

а) определить первые три члена последовательности;

б) проверить справедливость равенства (1) для x_2;

в) помощью равенства (2) представить последовательность аналитическим способом;

г) рассчитать $\sum_{i=1}^{100} x_i$.

15. Для геометрической прогрессии

$$x_{n+1} = 10x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 2$$

а) вычислить первые пять членов;

б) проверить справедливость равенства (4) для x_3;

в) определить x_{31}, x_{32}, x_{33};

г) вычислить сумму $\sum_{i=31}^{33} x_i$ и представить её нормализованной записью;

д) вычислить сумму $\sum_{i=1}^{50} x_i$.Округлить полученное значение до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

§3. Размерности единиц

Под размерностью понимают названия единиц измерения конкретных физических величин. Например, в системе СИ размерностью:

- длины является метр;
- времени – секунда;
- массы – килограмм и т.д.

Однако, зачастую для измерения одной и той же величины используют различные единицы. В частности:

- длина измеряется не только метрами, но и сантиметрами, миллиметрами, километрами…;
- время – минутами, часами, сутками, годами…;
- масса – граммами, миллиграммами, тоннами…

При этом, нередко возникает необходимость пересчёта количества одних единиц измерения в количество других единиц измерения. Так, если требуется рассчитать площадь прямоугольника, у которого длина измерена метрами, а ширина сантиметрами, то необходимо привести эти две величины к одинаковой единице измерения.

При переводе значения какой либо величины B, измеряемой в единицах x (B_x), в другую единицу измерения y (B_y) можно пользоваться следующим равенством:

$$B_y = k_{y/x} \cdot B_x \qquad (1)$$

где $k_{y/x}$ (ка с индексом «игрек делённое на x»)– коэффициент пропорциональности, показывающий количество единиц y, содержащихся в одной единице x.

Умножением значения величины, измеряемой в единицах x, на коэффициент $k_{y/x}$, находится значение этой же величины, измеряемой в единицах y.

Например, поскольку в 1 см содержится 10 мм, то, в качестве коэффициента пропорциональности между размерностями см и мм следует выбрать :

$$k_{мм/см} = 10 \text{ мм/см} \qquad (2)$$

если необходимо пересчитать сантиметры в миллиметры. Или

$$k_{см/мм} = 0{,}1 \text{ см/мм} \qquad (3)$$

если необходимо пересчитать миллиметры в сантиметры.

В частности, для пересчёта расстояния $S_{см}$, равного 5 см, в расстояние, измеряемое миллиметрами ($S_{мм}$), можно записать:

$$S_{мм} = k_{мм/см} \cdot S_{см}$$

$$S_{мм} = 10 \text{ мм/см} \cdot 5 \text{ см} = 50 \text{ мм}$$

Следовательно

$$S_{мм} = 50 \text{ мм}$$

И наоборот, для пересчёта расстояния $S_{мм}$, равного 50 мм, в расстояние, измеряемое сантиметрами ($S_{см}$), запишем:

$$S_{см} = k_{\,см/мм} \cdot S_{мм}$$

$$S_{см} = 0{,}1 \text{ см/мм} \cdot 50 \text{ мм} = 5 \text{ см}$$

Следовательно

$$S_{см} = 5 \text{ см}$$

Известно, что знак равенства в физико-математических выражениях корректно ставить только в тех случаях, когда размерность левой и правой частей выражения одинаковы. Поэтому тождественность величин правильней обозначать зна́ком тождественности (идентичности) « ≡ ». Например, 1 см ≡ 10 мм (один сантиметр тождественен десяти миллиметрам). Аналогично можно записать:

$$1 \text{ см} \equiv 10^{-2} \text{ м}; \quad 1 \text{ г} \equiv 10^{-3} \text{ кг}; \quad 1 \text{ час} \equiv 60 \text{ минут и т.д.}$$

Интересно отметить, что если $B_y \equiv B_x$, например, 1 мл ≡ 1 $см^3$,

то $k_{y/x} = 1$ y/x; $k_{x/y} = 1$ x/y. В данном случае $k_{мл/см^3} = 1$ мл/$см^3$; $k_{см^3/мл} = 1$ $см^3$/мл

Подобно тому, как миллиметры и сантиметры являются различными единицами измерения одной и той же длины, любая пара величин, связанная уравнением (1) может восприниматься как два аспекта единого свойства изучаемой действительности. Например, энергия (E) и масса (m):

$$E = c^2 m; \qquad (4)$$

пространство (S) и время (t):

$$S = \upsilon t; \qquad (5)$$

масса и пространство:

$$m = \rho V, \ (V = S_1 S_2 S_3) \qquad (6)$$

и т.д. Коэффициентами пропорциональности в последних трёх уравнениях выступают квадрат скорости света, скорость поступательного движения и плотность соответственно.

Пример 1. Выразить в квадратных метрах площадь ($S_м^2$) прямоугольника одна из сторон ($A_{мм}$) которого 5 мм, другая ($B_{мм}$) равна 15 мм. Ответ представить нормализованной записью.

Решение. Для решения задачи необходимо данные стороны выразить в метрах. Введём обозначения:

- $A_м$ – сторона $A_{мм}$, выраженная в метрах;
- $B_м$ – сторона $B_{мм}$, выраженная в метрах;

Известно, что один метр тождественен ста сантиметрам, которые, в свою очередь, тождественны тысяче миллиметров:

$$1\ м \equiv 100\ см \equiv 1000\ мм$$

$$k_{м/мм} = 0{,}001\ м/мм = 1\cdot 10^{-3}\ м/мм$$

$$A_м = k_{м/мм} \cdot A_{мм}$$

$$A_м = 1\cdot 10^{-3}\ м/мм \cdot 5\ мм = 5\cdot 10^{-3}\ м$$

$$A_м = 5\cdot 10^{-3}\ м$$

$$B_м = k_{м/мм} \cdot B_{мм}$$

$$B_м = 1\cdot 10^{-3}\ м/мм \cdot 15\ мм = 1{,}5\cdot 10^{-2}\ м$$

$$B_м = 1{,}5\cdot 10^{-2}\ м$$

$$S_м{}^2 = A_м \cdot B_м$$

$$S_м{}^2 = 5\cdot 10^{-3}\ м \cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\ м = 7{,}5\cdot 10^{-5}\ м^2$$

Следовательно

$$S_м{}^2 = 7{,}5\cdot 10^{-5}\ м^2$$

Пример 2. Выразить в граммах массу одного атома золота, равную 197 а.е.м, если 1а.е.м. $\equiv 1{,}66\cdot 10^{-27}$ кг. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

Решение. Введём обозначения:

- $Au_{а.е.м.}$ – масса атома золота, измеряемая атомными единицами масс;
- $Au_г$ – масса атома золота, измеряемая граммами.

По условию задачи

$$k_{кг/а.е.м.} = 1{,}66\cdot 10^{-27}\ кг/а.е.м.$$

Кроме того, известно, что

$$k_{г/кг} = 10^3\ г/кг$$

Поэтому

$$k_{г/а.е.м.} = k_{г/кг} \cdot k_{кг/а.е.м}$$

$$k_{г/а.е.м.} = 10^3\ г/кг \cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ кг/а.е.м. = 1{,}66\cdot 10^{-24}\ г/а.е.м.$$

$$k_{г/а.е.м.} = 1{,}66\cdot 10^{-24}\ г/а.е.м.$$

$$Au_г = k_{г/а.е.м.} \cdot Au_{а.е.м}$$

$$Au_г = 1{,}66\cdot 10^{-24}\ г/а.е.м \cdot 197\ а.е.м. \approx 3{,}27\cdot 10^{-22}\ г$$

Следовательно

$$\mathrm{Au}_{\text{г}} \approx 3,27\cdot 10^{-22}\ \text{г}.$$

Пример 3. Выразить в радианах угол, равный 75°.

Решение. Введём обозначения:

- α_{π} – угол, выраженный в радианах;
- α° – угол, выраженный в градусах.

Известно, что радианы равны отношению длины дуги окружности, ограниченной сторонами угла с вершиной в центре окружности, к радиусу этой окружности. При этом $180^{\circ} \equiv \pi$. То есть, отношение половины длины любой окружности к её радиусу равно примерно 3,14. Но, как правило, радианы представляют в единицах π. То есть, в данном случае

$$\mathrm{k}_{\pi/\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

(Ка с индексом «π, делённое на градусы», равно π, делённому на 180°).

Поэтому, можем утверждать, что

$$\alpha_{\pi} = \mathrm{k}_{\pi/\circ}\cdot\alpha^{\circ}$$

Значит

$$\alpha_{\pi} = \frac{\pi}{180^{0}}\cdot 75^{\circ} = \frac{5}{12}\pi$$

Следовательно

$$\alpha_{\pi} = \frac{5}{12}\pi$$

Важно подчеркнуть, что размерность «радиан» на самом деле *безразмерная*. Как ни парадоксально это звучит. Просто, исторически сложилось так, что безразмерному отношению длины дуги окружности к радиусу этой окружности присвоили название «радиан».

Пример 4. За некоторый промежуток времени монетный двор выпустил 24 088 десятикопеечных монет. Выразить указанное количество монет в молях.

Решение. Введём обозначение

- $N_{\text{моль}}$ – искомое количество монет, выраженное в молях;
- N – данное количество монет, выраженное в штуках и равное 24 088.

Один моль эквивалентен $6{,}022\cdot 10^{23}$ штукам. Однако, штуки считаются величиной безразмерной. Поэтому, корректная запись должна выглядеть так:

$$1\ \text{моль} \equiv 6{,}022\cdot 10^{23}$$

Значит, количество молей, приходящееся на одну штуку, окажется

$$k_{моль} = \frac{1}{6,022 \cdot 10^{23}} \text{ моль}$$

$$N_{моль} = k_{моль} \cdot N$$

$$N_{моль} = \frac{24088}{6,022 \cdot 10^{23}} \text{ моль} = 4 \cdot 10^{-20} \text{ моль}$$

$$N_{моль} = 4 \cdot 10^{-20} \text{ моль}$$

Упражнения.

16. Вычислить количество квадратных метров, содержащихся в 7, 5 км^2. Ответ представить нормализованной записью.

17. Выразить в квадратных миллиметрах площадь прямоугольника, одна из сторон которого 200 м, а другая 50 м. Ответ представить нормализованной записью.

18. Выразить в квадратных метрах площадь прямоугольника, длина ($A_{км}$) которого 3 км, а ширина ($B_{мм}$) равна 0,3 мм. Ответ представить нормализованной записью.

19. Сколько рулонов обоев потребуется для покрытия 42 м^2 стен комнаты, если длина каждого рулона составляет 10,5 м, а ширина 100 см.

20. Выразить в метрах расстояние между солнцем и ближайшей звездой созвездия Кассиопея равное 6 800 световых лет, если скорость света составляет 300 000 км/с, а световой год – это расстояние, преодолеваемое светом за один год. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

21. Учитывая, что 1 л ≡1дм^3; 1мл ≡1см^3; 1 английский галлон ≡ 4, 55 л выразить в системе СИ следующие значения объёмов:

а) 22,4 л;	б) 11,2 дм^3;
в) 3 мл;	г) 5 см^3;
д) девять кубометров;	е) сто английских галлонов

22. Выразить в системе СИ следующие концентрации растворов вещества:

а) 0,1 моль/л;	б) 0,5 моль/л;
в) 0,3 моль/л;	г) 0, 7 моль/л.

23. Выразить в килограммах массу одной молекулы воды, равную 18 а.е.м. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

24. Выразить в метрах расстояние между атомом водорода и атомом кислорода в молекуле воды, равное 0,097 нм, если 1 нм ≡ 10^{-9} м. Ответ представить нормализованной записью.

25. Выразить в молях количество вещества, содержащего:

а) 3011 молекул; б) 6022 молекулы;

в) 12044 молекулы; г) $6{,}022 \cdot 10^{23}$ молекул;

д) $1{,}2044 \cdot 10^{24}$ молекул; е) $3{,}6132 \cdot 10^{24}$ молекул

26. Используя равенство (4) выразить в Джоулях массу собственного тела и представьте полученный результат нормализованной записью.

27. Выразить 1 час времени

а) метрами, преодолеваемыми светом, если $\upsilon = c \approx 300\,000$ км/с [(формула (5)]. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи;

б) количеством электромагнитных колебаний излучения, испускаемого атомом $^{133}_{55}Cs$, если за одну секунду совершается $1{,}19263177 \cdot 10^{9}$ таких колебаний. Ответ представить нормализованной записью.

28. Выразить в граммах пять литров воды, если её плотность равна 1г/мл (формула (6)).

29. Определить размерность и значение постоянной Фарадея (F), если при пропускании электричества (Q) в количестве 96 485 Кл через раствор $CuCl_2$, на катоде выделяется количество меди (n) равное 0, 5 моль, а зависимость количества осаждаемого металла от количества электричества определяется равенством:

$$Q = n \cdot F \cdot z,$$

где z – валентность металла, величина безразмерная.

30. Вычислить заряд одного моля электронов, если заряд одного электрона равен $-1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ Кл. Ответ округлить до целого числа.

31. Переписать в тетрадь и заполнить таблицу

Угол, выраженный в градусах	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Угол, выраженный в радианах	0						$\frac{\pi}{2}$						π

?

1. Сформулируйте правило пересчёта единиц измерения.

2. Объясните, в каких случаях следует использовать знак равенства, а в каких знак тождества (идентичности)?

Упражнения к главе I

32. Выразить в граммах массу одного атома железа, равную 56 а.е.м, если 1 а.е.м. ≡ $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

33. Для геометрической прогрессии

$$x_{n+1} = 5x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 2$$

а) определить первые пять членов;

б) рассчитать сумму первых пяти членов;

в) определить девятнадцатый член этой прогрессии.

34. Вычислить пятый, шестой, седьмой члены последовательности

$$x_n = \frac{2 + n^2}{10}$$

и рассчитать $\sum_{i=5}^{7} x_i$.

35. Выразить в системе СИ следующие концентрации растворов вещества:

0,2 моль/л; 0,7 моль/мл; 0,9 г/см^3.

36. Определить первые пять членов последовательности

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{3}{n-2} & \text{при } n \neq 2 \\[2ex] -\dfrac{2}{3} & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

и рассчитать $\sum_{i=1}^{5} x_i$

37. Для геометрической прогрессии:

$$x_{n+1} = 7x_n \qquad \text{при} \quad x_1 = 3$$

а) определить первые пять членов;

б) рассчитать сумму первых пяти членов;

в) определить семнадцатый член этой прогрессии

4. Выразить в системе СИ следующие концентрации растворов вещества:

0,4 моль/л; 0,6 моль/мл; 0,8 г/см^3.

38. Вычислить выражения

а) $5^2 + 7i^2$;	б) $(2 + 3i)^2 - 12i$;
в) $(4 - 7i\,)^2 + 56i$;	г) $1 - 9i^2$;
д) $3 - 3i^2$;	е) $25i^2 - 20$.

39. Представить в виде функции мнимого числа площадь S прямоугольника со сторонами A и B, в середине которого вырезан меньший прямоугольник со сторонами a и b ($a < A$; $b < B$).

40. Выразить в килограммах массу одного атома серы, равную 32 а.е.м, если 1 а.е.м. ≡ $1{,}66 \cdot 10^{-30}$ г. Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

ГЛАВА II
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

В дополнение к изученным Вами ранее математическим действиям, таким как: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, рассмотрим ещё одну пару – логарифмирование и потенцирование, которые были разработаны для решения уравнений с переменной, являющейся показателем степени.

§4. Логарифмирование и потенцирование

1. Логарифм и основное логарифмическое тождество

Равенство

$$2^3 = 8$$

иначе может быть представлено следующим образом

$$\log_2 8 = 3$$

(Логарифм восьми по основанию два равен трём.) Или в общем случае, равенство

$$\mathbf{a}^{\mathbf{c}} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

можно представить так

$$\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad (2)$$

(Логарифм b по основанию a равен c.)

То есть, *логарифмом числа* **b** *по основанию* **a** *называется показатель степени, в которую надо возвести число* **a***, чтобы получить число* **b**.

Замена равенства (1) на равенство (2) называется логарифмированием. Обратное действие – замена равенства (2) на равенство (1) называется потенцированием. Изобретено логарифмирование было именно для того, чтобы иметь возможность как то выражать показатель степени из равенств вида (1).

Для $a \neq 1$ и $a > 0$ всегда можно найти единственный логарифм любого положительного числа. Если $a = 1$, то выражение $\log_1 1$ имеет бесконечное множество значений, поскольку единица в любой степени равна единице. А логарифмов других чисел по этому основанию просто не существует, потому что нет такой степени, при возведении в которую единицы получалось бы число, отличное от 1. Если же $a < 0$, то не для всякого числа можно найти логарифм. Например, невозможно найти значение выражения $\log_{-2} 8$. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться логарифмы только с положительным основанием не равным единице.

Если в уравнении (1) $a > 0$ и $a \neq 1$, то $\mathbf{c = \log_a b}$. Иначе говоря, оказывается справедливым равенство:

$$a^{\log_a b} = b$$

которое называется *основным логарифмическим тождеством.* В частности:

$$4^{\log_4 5} = 5; \qquad 13^{\log_{13} 3/4} = 3/4; \qquad 7^{\log_7 9} = 9$$

Пример 1. Вычислить приведённые ниже выражения:

$$\log_3 9; \qquad \log_3 \frac{1}{27}; \qquad 3^{-2\log_3 5}$$

Решение. Выражение $\log_3 9$ означает, что необходимо найти степень, при возведении в которую числа 3 получится 9. Поскольку $3^2 = 9$, то

$$\log_3 9 = 2$$

Для вычисления второго выражения вспомним, что $27 = 3^3$:

$$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$$

Следовательно

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3$$

Для вычисления третьего выражения воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

Следовательно:

$$3^{-2\log_3 5} = 0{,}04$$

Пример 2. Потенцировать выражение $\log_x y = z$.
Решение. Согласно определению логарифма:

$$y = x^z$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_3 (1–x) = 2$$

Решение. Согласно определению логарифма выражение $\log_3 (1–x) = 2$ означает, что

$$3^2 = 1 – x$$

$$9 = 1 – x$$

Следовательно

$$x = –8$$

Упражнения.

Вычислить (41 – 46).

41. а) $\log_3 27$; б) $\log_2 \frac{1}{4}$;

в) $\log_{1/3} \frac{1}{27}$; г) $\log_{1/3} 27$;

42. а) $\log_7 7$; б) $\log_8 64$;

в) $\log_{11} 1$; г) $\log_7 1$;

43. а) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; б) $\log_5 625$;

в) $3^{\log_3 18}$; г) $5^{\log_5 16}$;

44. а) $(\frac{1}{4})^{\log_{1/4} 18}$; б) $3^{5\log_3 2}$;

в) $0,3^{2\log_{0,3} 6}$; г) $9^{\log_3 12}$;

45. а) $16^{\log_4 7}$; б) $0,125^{\log_{0,5} 1}$

в) $4^{\log_2 5}$; г) $0,04^{\log_{0,2} 3}$

46. Потенцировать выражения.

а) $\log_a x = b$; б) $\log_{10} 1000 = 3$;

в) $\log_{\boldsymbol{e}}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi$; г) $\log_{\boldsymbol{e}} (–1) = \boldsymbol{i\pi}$;

д) $\log_5 0,04 = –2$; е) $\log_5 25 = 2$;

Решить уравнения (47, 48).

47. а) $\log_6 x = 3$; б) $\log_5 x = 4$;

в) $\log_2 (5 - x) = 5$; г) $\log_3 (x + 2) = 2$;

48. а) $\log_{1/4} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$; б) $\log_{1/6} (0{,}5 + x) = -1$;

в) $\log_x 27 = 3$; г) $\log_x \frac{1}{7} = -1$;

д) $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{4}$; е) $\log_x \frac{1}{27} = 3$.

---

1. Что такое логарифм?

2. Запишите основное логарифмическое тождество и укажите условия, при которых оно выполняется.

2. Основные свойства логарифмов

Если $c > 0$; $b > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$, , то справедливы следующие равенства

$\mathbf{\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c}$ - логарифм произведения равен сумме логарифмов;

$\mathbf{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ - логарифм частного равен разности логарифмов;

$\mathbf{\log_a b^r = r \log_a b}$ - логарифм числа, возведённого в степень равен произведению показателя степени на логарифм этого числа.

Причём, r – любое действительное число.

В этом можно убедиться, воспользовавшись основным логарифмическим тождеством.

$$b \cdot c = a^{\log_a b \cdot c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$$

то есть

$$a^{\log_a b \cdot c} = a^{\log_a b + \log_a b}$$

или

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

Первое свойство доказано.

$$\frac{b}{c} = a^{\log_a b/c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}$$

то есть

$$a^{\log_a b/c} = a^{\log_a b - \log_a c}$$

или

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Второе свойство доказано.

$$b^r = a^{\log_a b^r} = (a^{\log_a b})^r = a^{r \cdot \log_a b}$$

то есть

$$a^{\log_a b^r} = a^{r \cdot \log_a b}$$

или

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Третье свойство доказано.

Из основного логарифмического тождества вытекает также *формула перехода* от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию, согласно которой

$$\mathbf{\log_a b} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Действительно, согласно основному логарифмическому тождеству для выражения $\log_a b$ должно выполняться равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

Если прологарифмировать левую и правую части этого равенства по произвольному основанию *c*, получим

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

или, согласно третьему свойству

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

Откуда

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Формула перехода доказана.

Кроме того, используя основное логарифмическое тождество, можно доказать ***теорему*** согласно которой

Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$,

где $a > 0,\ a \neq 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$, то

$x_1 = x_2$

Доказательство

Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$,

то $a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2}$

Поскольку $a^{\log_a x_1} = x_1$; $a^{\log_a x_2} = x_2$, то

$x_1 = x_2$

Что и требовалось доказать

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию *e* (где *e*≈2,718, см. раздел «Числа и цифры»). При этом вместо $\log_e b$ пишут ln b. То есть $\log_e b = \ln b$.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. При этом вместо $\log_{10} b$ пишут lg b. То есть $\log_{10} b = \lg b$.

Пример 1. Вычислить приведённые ниже выражения.

$$\log_6 18 + \log_6 2$$

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4$$

$$\log_3 27^5$$

Решение. Согласно первому свойству

$$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18\cdot 2 = \log_6 36 = 2$$

Следовательно

$$\log_6 18 + \log_6 2 = 2$$

Согласно второму свойству

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$$

Следовательно

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = 1$$

Согласно третьему свойству

$$\log_3 27^5 = 5 \cdot \log_3 27 = 5\cdot 3 = 15$$

Следовательно

$$\log_3 27^5 = 15$$

Пример 2. Выразить приведённые ниже выражения отношением логарифмов основанием 7:

$$\log_6 18;\ \log_3 27$$

Решение. Согласно формуле перехода:

$$\log_6 18 = \frac{\log_7 18}{\log_7 6}$$

$$\log_3 27 = \frac{\log_7 27}{\log_7 3}$$

Пример 3. Выразить $\log_{a^p} b$ через $\log_a b$

Решение. Пусть $\log_{a^p} b = x$, тогда $b = a^{px}$, и

$$\log_a b = px \log_a a = px = p \log_{a^p} b$$

то есть

$$\log_a b = p \log_{a^p} b$$

Следовательно, оказывается справедливой формула:

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$$

Пример 4. Решить уравнения:

$$\log_3 x = 4 \log_3 2 + 2 \log_3 7$$

$$\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$$

Решение. Пользуясь свойствами логарифмов, преобразуем первое уравнение:

$$\log_3 x = 4 \log_3 2 + 2 \log_3 7 = \log_3 2^4 + \log_3 7^2 = \log_3 (2^4 \cdot 7^2) = \log_3 (16 \cdot 49) = \log_3 784$$

То есть

$$\log_3 x = \log_3 784$$

На основании последней теоремы можем записать, что

$$x = 784$$

Для решения второго уравнения воспользуемся формулой, которую вывели в примере 3:

$$\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = \frac{1}{2} \log_x 9 + 2 \log_x 4 = \log_x 9^{1/2} + \log_x 4^2 = \log_x (\sqrt{9} \cdot 16) = \log_x 3 \cdot 16 = \log_x 48 =$$

2

То есть

$$\log_x 48 = 2$$

Откуда

$$x^2 = 48$$

Или

$$x = \pm\sqrt{48} = \pm\sqrt{3\cdot 16} = \pm 4\sqrt{3}$$

Следовательно

$$x = \pm 4\sqrt{3}$$

Пример 5. Определить во сколько раз значение натурального логарифма числа больше десятичного логарифма этого же числа. Ответ выразить десятичной дробью, округленной до первой цифры после запятой.

Решение. Поскольку, согласно формуле перехода

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}, \text{ то}$$

$$\frac{\ln b}{\lg b} = \ln 10 \approx 2{,}3$$

Следовательно

$$\frac{\ln b}{\lg b} \approx 2{,}3$$

Натуральный логарифм больше десятичного в 2,3 раза. То есть

$$\ln b \approx 2{,}3 \lg b$$

Упражнения.

Вычислить выражения (49, 50).

49. а) $\log_8 16 + \log_8 4$; б) $\log_3 16 + \log_3 \frac{27}{16}$;

в) $\log_5 75 - \log_5 3$; г) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$;

50. а) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$; б) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$

в) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$; г) $\log_2 8^{32}$;

д) $\log_5 25^{100}$; е) $\log_3 9^{25}$

51. Представить каждое из приведённых ниже выражений отношением логарифмов с основанием 3 и 5.

а) $\log_2 3$; б) $\log_7 15$;

в) $\log_6 25$; г) $\log_4 5$.

52. а) Каждое из выражений предыдущего упражнения представить отношением десятичных логарифмов и вычислить на калькуляторе. Ответы округлить до сотых долей единицы.

б) Эти же выражения представить отношением натуральных логарифмов и вычислить на калькуляторе. Ответы округлить до сотых долей единицы.

в) Ответы, полученные вычислением десятичных и натуральных логарифмов, сравнить между собой.

Решить уравнения (41, 42)

53. а) $\log_5 x = 3\log_5 4 + 2\log_5 3$; б) $\log_{½} x = \frac{1}{3}\log_{½} 27 - \frac{1}{2}\log_{½} 4$

в) $\log_{\sqrt[3]{x}} 5 + \log_{x^2} 64 = 3$; г) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$

54. а) $\log_5 (3x - 2) = \log_5 7$; б) $\log_3 (5x + 1) = \log_3 11$;

в) $\log_2 (5x + 3) = \log_2 (7x + 5)$; г) в) $\log_2 (3x + 5) = \log_2 (5x + 7)$;

55. Определить во сколько раз значение натурального логарифма числа больше логарифма этого же числа по основанию e^3 .

56. Определить во сколько раз значение десятичного логарифма числа больше логарифма этого же числа по основанию 100.

57. Определить, что больше $\log_2 b$ или $\log_4 b$ и во сколько раз?

58. Если двухпроцентный вклад в сбербанк, равный а рублей, через n лет становится равным $a \cdot 1{,}02^n$, трёхпроцентный вклад становится равным $a \cdot 1{,}03^n$, то через сколько лет каждый из вкладов удвоится? Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

---

1. **Запишите формулы для расчёта логарифма произведения, логарифма частного, логарифма числа, возведённого в степень и докажите их справедливость**
2. **Что такое формула перехода? Выведите её пользуясь основным логарифмическим тождеством.**
3. **Докажите, что если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$**
4. **Что такое десятичный логарифм? Натуральный логарифм?**

3. Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция, т.е. функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, как и любая другая, может быть представлена:

- с помощью формулы. Например,

$$y = \log_3 x \,; \qquad y = \log_{1/3} x \,;$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 1 и 2:

Таблица 1

Зависимость $\log_3 x$ от x

$y = \log_3 x$	−2	−1	0	1	2	3
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Таблица 2

Зависимость $\log_{1/3} x$ от x

$y = \log_{1/3} x$	2	1	0	−1	−2	−3
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

- с помощью графика (графический способ). Например, рис. 3 и рис. 4

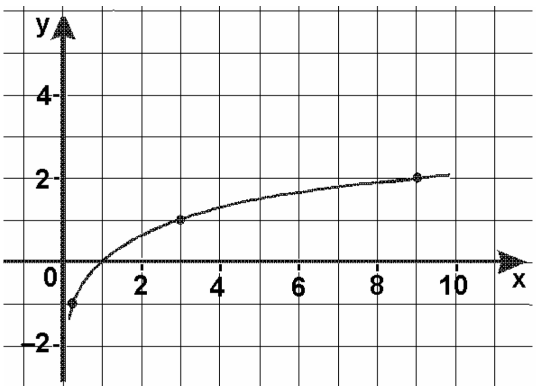


Рис. 3 График функции $y = \log_3 x$

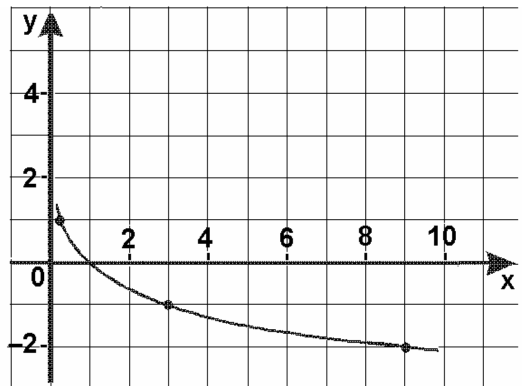


Рис.4. График функции $y = \log_{1/3} x$

Из таблиц 1, 2 и рисунков 3, 4 видно, что:

- *логарифмическая функция* $y = \log_a x$ *является возрастающей, если a > 1, и убывающей, если 0 < a <1;*
- *для действительных значений логарифмической функции, областью её определения является множество всех положительных чисел.* То есть, при действительных значениях логарифма он определяется только для x > 0.

Для *комплексных* значений логарифмической функции, областью её определения является множество всех отрицательных чисел. Например, натуральные логарифмы отрицательных чисел определяются по формуле:

$$\ln(-x) = \ln x + i\pi(2k + 1)$$

где $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$. При этом, значения при $k = 0$ считаются основными.

Упражнения.

59. Представить табличным и графическим способом функции:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{1/2} x$

60. Представить комплексным числом основные значения следующих логарифмов:

а) $\ln(-1)$; б) $\ln(-2)$;

в) $\ln(-3)$; г) $\ln(-e)$.

1. **В каких случаях логарифмическая функция является возрастающей и в каких убывающей?**
2. **Что представляет собой область определения и множество значений логарифмической функции?**

§5. Математические действия над частотами звуковых колебаний. Музыкальные строи.

1. Пифагоров строй

Как известно, звуковые колебания представляют собой колебания плотности воздуха, частоту которых обозначают древнегреческой буквой ν (ню). Если в какой-то точке пространства плотность воздуха совершает 1000 колебаний в секунду, то $\nu = 1000$ сек$^{-1}$. Именно различия в частотах воспринимаются на слух как различия в высоте звука.

Исторически первым математическим действием над частотами звуковых колебаний следует считать их деление друг на друга, результат которого назвали интервалом. То есть, *интервалом называется отношение частот звуковых колебаний*. Например, величина $\frac{\nu_m}{\nu_n}$ представляет собой интервал между высотой звука с частотой ν_m и высотой звука с частотой ν_n.[1] Понятие интервала позволило древнегреческому математику и философу Пифагору (6 век до н.э) построить музыкальный строй, который считается первым европейским музыкальным строем. Хотя в те времена не было возможности измерять частоту звуковых колебаний, однако, вместо этой величины учёный пользовался понятием «высота звука». Проводя опыты на монохорде[2], он экспериментально, на слух, установил обратно пропорциональную зависимость между высотой звука и длиной струны, его издающей:

$$\frac{l_n}{l_m} = \frac{\nu_m}{\nu_n}$$

где l_n и l_m – различные длины звучащей части монохорда, ν_n и ν_m – частоты соответствующих звуковых колебаний (соответствующие высóты звука). После этого все музыкальные звуки Пифагор предложил упорядочить таким музыкальным строем, в котором интервал между самым высоким звуком ($\nu_в$) и самым низким ($\nu_н$), равнялся бы двум:

---

[1] В математике интервалом называется множество чисел или точек на прямой, заключающихся между двумя данными числами или точками a и b – концами интервала. Обозначается (a, b). Концы интервала в него не включаются. То есть в данном случае термин «интервал» является омонимом, имеющим разные значения в музыке и в математике.

[2] Сконструированный Пифагором музыкальный инструмент, состоящий из одной струны, натянутой на специальный ящик со шкалой деления. При укорачивании звучащей части струны можно было определять какая доля струны звучит.

$$\frac{\nu_в}{\nu_н} = 2$$

А значит, длина струны, издающей самый высокий звук, должна составлять половину длины струны, издающей самый низкий звук.

$$\frac{l_в}{l_н} = \frac{1}{2}$$

Сегодня интервал, равный двум, принято называть октавой.

Правило отбора звуков предлагалось Пифагором следующее: каждый последующий звук должен издаваться струной, длина которого составляет 2/3 от длины струны, издающей предыдущий, менее высокий звук. Например, если

$$l_1 = \frac{2}{3} l_н$$

то

$$\nu_1 = \frac{3}{2} \nu_н$$

Однако, если в результате подобной процедуры длина струны становилась менее половины первоначальной:

$$\frac{l_в}{l_н} < \frac{1}{2}$$

а, значит, высота (частота колебаний) нового звука превышала высоту самого низкого звука более чем в 2 раза, т.е. выпадала за пределы октавы:

$$\frac{\nu_в}{\nu_н} > 2$$

то полученная длина струны просто удваивалась.

Например, следующая длина струны должна составлять $\frac{2}{3}$ от длины l_1 :

$$\frac{2}{3} l_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l_н = \frac{4}{9} l_н$$

При этом

$$\frac{3}{2} \nu_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \nu_н = \frac{9}{4} \nu_н$$

Но

$$\frac{4}{9} < \frac{1}{2}; \quad \frac{9}{4} > 2$$

Поэтому на самом деле

$$l_2 = \frac{2}{3} l_1 \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l_н \cdot 2 = \frac{4}{9} l_н \cdot 2 = \frac{8}{9} l_н$$

$$\nu_2 = \frac{3}{2} \nu_1 : 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \nu_н : 2 = \frac{9}{4} \nu_н : 2 = \frac{9}{8} \nu_н$$

Следуя эти правилам, Пифагор разместил в пределах октавы 13 звуков. При этом самый высокий, 13-й звук $(\nu_в = \nu_{13})$, всё-таки, за пределы октавы чуть-чуть вышел. Получилось, что

$$\frac{\nu_{13}}{\nu_н} = 2,03$$

Октава Пифагорова строя оказалась «не чистой».

С точки зрении современной математики, последовательные интервалы между соседними звуками Пифагорова строя представляют собой числовую последовательность из двенадцати элементов, которая описывается равенствами (1) для натуральных n < 7 и (1') для n ≥ 7:

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \frac{2^8}{3^5} \text{ при чётном n} \\ \\ \left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} \text{ при нечётном n} \end{cases} \tag{1}$$

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} \text{ при чётном n} \\ \\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \frac{2^8}{3^5} \text{ при нечётном n} \end{cases} \tag{1'}$$

где

- ν_{n+1} – частота звуковых колебаний, более высокая по отношению к частоте предыдущего звука (ν_n);
- $I_{n+1,\,n}$ – интервал между звуками с частотой ν_{n+1} и ν_n;

При этом

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = I_{1,1} \cdot I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} \tag{2}$$

В общем случае

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = I_{m+1,\,m} \cdot I_{m+2,\,m+1} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} \tag{3}$$

Например,

$$I_{7,3} = \frac{\nu_7}{\nu_3} = I_{4,3} \cdot I_{5,4} \cdot I_{6,5} \cdot I_{7,6} = \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$$

Спустя некоторое время после разработки своего строя, Пифагор заметил, что столь ограниченное количество звуков внутри октавы (тринадцать) приводит к некоторому диссонансу при исполнении музыкальных произведений и дополнил ранее сформированные интервалы ещё одним очень небольшим интервалом I_k, который определяется равенствами:

$$I_\text{k} = \frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{3^5}{2^8} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

В настоящее время интервал I_k принято называть *Пифагоровой коммой.*

Если Пифагоров строй не включает комму, то октава этого строя делится на двенадцать интервалов, определяемых равенствами (1), (1'). Если же Пифагоров строй включает комму, то количество интервалов октавы увеличивается до 18, и рассчитываются они с помощью следующих формул:

$$I_{n+1,\, n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3 = \dfrac{2^8}{3^5} & \text{при n} \neq 2,\, 5,\, 9{,}12,\, 15,\, 18 \\ I_\text{k} & \text{при n} = 2,\, 5,\, 9{,}12,\, 15,\, 18 \end{cases} \qquad (4)$$

Из равенств (1) и (1') видно, что значения звуковых частот Пифагорова строя, не включающего комму, для n < 7 представляют собой последовательность (5):

$$\nu_{\text{n}+1} = \begin{cases} \dfrac{2^8}{3^5}\, \nu_\text{n} & \text{при чётном n} \\ \dfrac{3^7}{2^{11}}\, \nu_\text{n} & \text{при нечётном n} \end{cases} \qquad (5)$$

а, для n ≥ 7 последовательность (5')

$$\nu_{\text{n}+1} = \begin{cases} \dfrac{3^7}{2^{11}}\, \nu_\text{n} & \text{при чётном n} \\ \dfrac{2^8}{3^5}\, \nu_\text{n} & \text{при нечётном n} \end{cases} \qquad (5')$$

Для Пифагорова строя, включающего комму:

$$\nu_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2^8}{3^5}\ \nu_n & \text{при } n \neq 2,\ 5,\ 9{,}12,\ 15,\ 18 \\ I_k \cdot \nu_n & \text{при } n = 2,\ 5,\ 9{,}12,\ 15,\ 18 \end{cases}$$

Интересно отметить, что равенства (1) и (1') можно формально свернуть в одно уравнение:

$$I_{n+1,n} = \frac{2^8}{3^5}\delta_{0,1} + \frac{3^7}{2^{11}}\delta_{1,0}$$

в котором подразумевается, что:

$$\delta_{0,1} = \begin{cases} 0 \ \text{при n} < 7 \ \text{нечётном, n} \geq 7 \ \text{чётном} \\ 1 \ \text{при n} < 7 \ \text{чётном, n} \geq 7 \ \text{нечётном} \end{cases}$$

$$\delta_{1,0} = \begin{cases} 1 \ \text{при n} < 7 \ \text{нечётном, n} \geq 7 \ \text{чётном} \\ 0 \ \text{при n} < 7 \ \text{чётном, n} \geq 7 \ \text{нечётном} \end{cases}$$

Аналогично можно свернуть равенства (4) для интервалов Пифагорова строя, включающего Пифагорову комму:

$$I_{n+1,n} = \frac{2^8}{3^5}\delta_I + \frac{3^{12}}{2^{19}}\delta_k$$

где:

$$\delta_I = \begin{cases} 1 \ \text{при n} \neq 2, 5, 9, 12, 15, 18 \\ 0 \ \text{при n} = 2, 5, 9, 12, 15, 18 \end{cases}$$

$$\delta_k = \begin{cases} 0 \ \text{при n} \neq 2, 5, 9, 12, 15, 18 \\ 1 \ \text{при n} = 2, 5, 9, 12, 15, 18 \end{cases}$$

Пример 1. Рассчитать интервал $I_{11,1}$ Пифагорова строя, не включающего Пифагорову комму, и включающего Пифагорову комму.

Решение. Согласно (2), можем записать равенство:

$$I_{11,1} = I_{2,1}\cdot I_{3,2}\cdot I_{4,3}\cdot I_{5,4}\cdot I_{6,5}\cdot I_{7,6}\cdot I_{8,7}\cdot I_{9,8}\cdot I_{10,9}\cdot I_{11,10}$$

Сомножители правой части этого равенства для Пифагорова строя, не включающего комму, определяются с помощью (1) и (1'):

$$I_{11,1} = \frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\ \frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^7}{2^{11}} = \frac{(3^7)^5\cdot(2^8)^5}{(2^{11})^5\cdot(3^5)^5} = \frac{3^{35}\cdot 2^{40}}{2^{55}\cdot 3^{25}} = \frac{3^{10}}{2^{15}}$$

Следовательно, для Пифагорова строя, не включающего комму:

$$I_{11,1} = \frac{3^{10}}{2^{15}}$$

Для Пифагорова строя, включающего комму, сомножители этого же равенства определяются с помощью (4):

$$I_{11,1} = \frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^{12}}{2^{19}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^{12}}{2^{19}}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^{12}}{2^{19}}\cdot\frac{2^8}{3^5} = \frac{(2^8)^7\cdot(3^{12})^3}{(3^5)^7\cdot(2^{19})^3} = \frac{2^{56}\cdot 3^{36}}{3^{35}\cdot 2^{57}} = \frac{3}{2}$$

Следовательно, для Пифагорова строя, включающего комму:

$$I_{11,1} = \frac{3}{2}$$

Пример 2. Пользуясь правилом отбора звуков предложенного Пифагором, рассчитать и расположить в возрастающем порядке часто́ты тринадцати звуков Пифагорова строя, не включающего комму, если частота самого низкого из них равна ν^1. Проверить справедливость последовательности (5), (5') на примере первых восьми звуков этого строя.

Решение. Согласно правилу отбора звуков, предложенному Пифагором:

$$\nu^2 = \frac{3}{2}\nu^1$$

$$\nu^3 = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\nu^1):2 = \frac{3^2}{2^3}\nu^1$$

$$\nu^4 = \frac{3^2}{2^3}\cdot\frac{3}{2}\nu^1 = \frac{3^3}{2^4}\nu^1$$

$$\nu^5 = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3^3}{2^4}\nu^1):2 = \frac{3^4}{2^6}\nu^1$$

$$\nu^6 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3^4}{2^6}\nu^1 = \frac{3^5}{2^7}\nu^1$$

$$\nu^7 = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3^5}{2^7}\nu^1):2 = \frac{3^6}{2^9}\nu^1$$

$$\nu^8 = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3^6}{2^9}\nu^1):2 = \frac{3^7}{2^{11}}\nu^1$$

$$\nu^9 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3^7}{2^{11}}\nu^1 = \frac{3^8}{2^{12}}\nu^1$$

$$\nu^{10} = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3^8}{2^{12}}\nu^1):2 = \frac{3^9}{2^{14}}\nu^1$$

$$\nu^{11} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3^9}{2^{14}}\nu^1 = \frac{3^{10}}{2^{15}}\nu^1$$

$$\nu^{12} = (\frac{3}{2}\cdot\frac{3^{10}}{2^{15}}\nu^1):2 = \frac{3^{11}}{2^{17}}\nu^1$$

$$\nu^{13} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3^{11}}{2^{17}}\nu^1 = \frac{3^{12}}{2^{18}}\nu^1$$

Однако, если полученные частоты расположить в порядке возрастания, то окажется, что

$$\nu^1<\nu^8<\nu^3<\nu^{10}<\nu^5<\nu^{12}<\nu^7<\nu^2<\nu^9<\nu^4<\nu^{11}<\nu^6<\nu^{13}$$

То есть, в возрастающем порядке частоты звуков Пифагорова строя, не включающего комму, располагаются следующим образом:

$$\nu_1 = \nu^1$$

$$\nu_2 = \nu^8 = \frac{3^7}{2^{11}}\nu^1$$

$$\nu_3 = \nu^3 = \frac{3^2}{2^3}\nu^1$$

$$\nu_4 = \nu^{10} = \frac{3^9}{2^{14}}\nu^1$$

$$\nu_5 = \nu^5 = \frac{3^4}{2^6}\nu^1$$

$$\nu_6 = \nu^{12} = \frac{3^{11}}{2^{17}}\nu^1$$

$$\nu_7 = \nu^7 = \frac{3^6}{2^9}\nu^1$$

$$\nu_8 = \nu^2 = \frac{3}{2}\nu^1$$

$$\nu_9 = \nu^9 = \frac{3^8}{2^{12}}\nu^1$$

$$\nu_{10} = \nu^4 = \frac{3^3}{2^4}\nu^1$$

$$\nu_{11} = \nu^{11} = \frac{3^{10}}{2^{15}}\nu^1$$

$$\nu_{12} = \nu^6 = \frac{3^5}{2^7}\nu^1$$

$$\nu_{13} = \nu^{13} = \frac{3^{12}}{2^{18}}\nu^1$$

Проверяя справедливость последовательности (5), (5') для первых восьми звуков этого строя, можем на основании (5) записать, что

$$\nu_2 = \frac{3^7}{2^{11}}\nu^1$$

$$\nu_3 = \frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^7}{2^{11}}\nu^1 = \frac{3^2}{2^3}\nu^1;$$

$$\nu_4 = \frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{3^2}{2^3}\nu^1 = \frac{3^9}{2^{14}}\nu^1$$

$$\nu_5 = \frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^9}{2^{14}}\nu^1 = \frac{3^4}{2^6}\nu^1$$

$$\nu_6 = \frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{3^4}{2^6}\nu^1 = \frac{3^{11}}{2^{17}}\nu^1$$

$$\nu_7 = \frac{2^8}{3^5}\cdot\frac{3^{11}}{2^{17}}\nu^1 = \frac{3^6}{2^9}\nu^1$$

На основании (5') находим ν^8:

$$\nu_8 = \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^6}{2^9} \nu^1 = \frac{3}{2} \nu^1$$

То есть, использование последовательности (5), (5') приводит к тем же результатам, что и правила отбора звуков, предложенные Пифагором.

Упражнения.

61. Перенести в тетрадь таблицу значений интервалов Пифагорова строя, не включающего пифагорову комму, и заполнить только её второй столбец, представляя значения $I_{\text{n+1,1}}$ простыми дробями вида $\frac{3^a}{2^b}$ (например $\frac{3^{10}}{2^{15}}$), октаву – десятичной дробью, округлённой до тысячных долей единицы. (Третий столбец понадобится при выполнении упражнений раздела «Равномерно-темперированные строи»).

Таблица

значений интервалов Пифагорова строя, не включающего пифагорову комму

Порядковый номер интервала (n)	$I_{\text{n+1,1}} = \frac{3^a}{2^b}$	$I^{\text{ц}}_{\text{n+1,1}} = 1200 \cdot (1,585a - b)$	Название интервала
1	2	3	4
1.			Малая секунда
2.			Большая секунда
3.			Малая терция
4.			Большая терция
5.			Кварта
6.			Тритон
7.			Ч истая квинта
8.			Малая секста
9.			Большая секста
10.			Малая септима
11.			Большая септима
12.			Октава

62. Рассчитать и расположить в возрастающем порядке часто́ты тринадцати звуков Пифагорова строя, не включающего комму, если частоту самого низкого из них условно принять равной 264 Гц. Ответ представить целыми числами.

63. Рассчитать и расположить в возрастающем порядке значения *частоты* первых пяти последовательных звуков Пифагорова строя, включающего комму, если частоту самого низкого из них условно принять равной 264 Гц. Ответ представить целыми числами.

64. Вычислить длину волны (λ) самого высокого из звуков, рассчитанных в предыдущем упражнении, если скорость его распространения (υ) в воздухе составляет 340 м/с, при этом $\lambda\,\nu = \upsilon$. Ответ выразить в метрах и представить десятичной дробью, округлённой до второй цифры после запятой.

65. В Пифагоровом строе, не включающем комму, найти интервалы:

а) $I_{3,1}$; б) $I_{5,3}$;

в) $I_{7,5}$; г) $I_{9,7}$;

д) $I_{11,9}$; е) $I_{13,11}$.

66. Сопоставляя интервалы $I_{12,1}$, $I_{13,1}$, рассчитанные при выполнении упражнения 49, определить, является ли Пифагоров строй замкнутым, если строй называется замкнутым, когда в нём есть пара звуков, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\nu_n}{\nu_m} = 2{,}00,$$

где ν_n и ν_m – соответствующие звуковые частоты.

67. Определить для Пифагорова строя интервал $I_{5,2}$ без учёта коммы и с учётом коммы.

2. Чистый строй

К 16 веку[3], наряду с Пифагоровым строем, получил распространение чистый строй, в котором выделяют три трезвучия: субдоминанту, тонику и доминанту. Внутри каждого трезвучия:

$$I_{2,1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{5}{4}$$

$$I_{3,2} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{6}{5}$$

При этом самый высокий звук субдоминанты является самым низким звуком тоники, а самый высокий звук тоники – самым низким звуком доминанты. То есть, все три трезвучия представляют собой семь звуков, интервалы между которыми можно представить следующим образом

[3] Началось внедрение чистого строя в музыкальную практику значительно ранее.

$$I_{2,1}=\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{5}{4}; \quad I_{3,2}=\frac{\nu_3}{\nu_2}=\frac{6}{5}; \quad I_{4,3}=\frac{\nu_4}{\nu_3}=\frac{5}{4}; \quad I_{5,4}=\frac{\nu_5}{\nu_4}=\frac{6}{5}; \quad I_{6,5}=\frac{\nu_6}{\nu_5}=\frac{5}{4}; \quad I_{7,6}=\frac{\nu_7}{\nu_6}=\frac{6}{5}$$

Таким образом, звуковые частоты чистого строя можно представить последовательностью, члены которой рассчитываются по формулам:

$$\nu_{n+1}=\begin{cases}\frac{5}{4}\,\nu_n \text{ – для нечётных натуральных n}\\[2ex] \frac{6}{5}\,\nu_n \text{ – для чётных натуральных n}\end{cases}$$

Причём уравнения (2) и (3) предыдущего параграфа, применяемые для Пифагорова строя, остаются справедливыми и для чистого строя:

$$I_{n,1}=\frac{\nu_n}{\nu_1}= \quad I_{1,1}\cdot I_{2,1}\cdot I_{3,2}\cdot\ldots\cdot I_{n,\,n-1}$$

$$I_{n,m}=\frac{\nu_n}{\nu_m}= \quad I_{m+1,\,m}\cdot I_{m+2,\,m+1}\cdot\ \ldots\cdot I_{n,\,n-1}$$

Упражнения.

68. Рассчитать для чистого строя интервалы $I_{4,1}$, $I_{5,1}$ и определить является ли чистый строй замкнутым?

69. Рассчитать значения частоты последовательных семи звуков чистого строя, если частота шестого звука (предыдущего по отношению к самому высокому) 444 Гц.

70. Какой интервал шире – $I_{7,1}$ в Пифагоровом строе (без учёта коммы) или $I_{7,1}$ в чистом строе? Во сколько раз? Ответ выразить десятичной дробью, округлённой до тысячных долей единицы.

3. Равномерно-темперированные строи

В современном двенадцатизвуковом равномерно-темперированном строе[4] называются:

- чистой октавой, интервал равный 2,00;
- тоном, интервал равный 1/6 октавы;
- полутоном, интервал равный 1/12 октавы;
- центом (ц), интервал равный 1/1200 октавы.

Для пересчёта безразмерного[5] интервала (I) в интервал, измеряемый центами ($I^{ц}$), можно воспользоваться следующими формулами:

$$I^{ц}=C\cdot\log_2 I = C\cdot\frac{\lg I}{\lg 2}=k\cdot\lg I \qquad (1)$$

[4] С физической точки зрения чистая октава этого строя включает 13 звуков. Однако, в музыке тринадцатый звук несёт те же функции, что и первый, поэтому считается лишь повторением первого и обозначается той же нотой «до».

[5] Под безразмерностью подразумевается отсутствие размерности – конкретной единицы измерения.

где $k = \dfrac{C}{\lg 2}$; C = 1200 ц.

Если интервал представлен дробью вида

$$I = \frac{3^a}{2^b}$$

то формулы (1) преобразуются в (2)

$$I^{ц} = 1200 \cdot (1{,}585a - b) \qquad (2)$$

Например, если

$$I = \frac{3}{2},$$

то

$$I^{ц} = 1200 \cdot (1{,}585 - 1) = 702\ (ц.)$$

Следовательно

$$\frac{3}{2} \equiv 702\ ц.$$

Пифагорову комму ($I_k = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$) можно выразить в центах следующим образом:

$$I^{ц} = 1200 \cdot (1{,}585 \cdot 12 - 19) = 24\ (ц.)$$

Следовательно

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 24\ (ц.)$$

Обратная процедура, пересчёт $I^{ц}$ в I, может осуществляться с помощью равенства:

$$I = 2^{I^{ц}/C}$$

Однако, полученное таким образом значение I не приводится к виду $\dfrac{3^a}{2^b}$

Сумма интервалов, выраженных в центах, пропорциональна логарифму *произведения* безразмерных интервалов. *Разница* между интервалами, выраженными в центах, пропорциональна логарифму *отношения* безразмерных интервалов.

Действительно, поскольку согласно (1):

$$I^{ц} = k \cdot \lg I$$

то

$$I_2^{ц} + I_1^{ц} = k \cdot \lg I_2 + k \cdot \lg I_1 = k\,(\lg I_2 + \lg I_1) = k\,\lg I_2 I_1$$

$$I_2^{ц} - I_1^{ц} = k \cdot \lg I_2 - k \cdot \lg I_1 = k\,(\lg I_2 - \lg I_1) = k\,\lg \frac{I_2}{I_1}$$

Чистая октава двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя делится на двенадцать ***равных*** полутонов. При этом:

$$I_{n+1,\,n} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \sqrt[12]{2}$$

где $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}0595$. То есть звуковые частоты двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя можно представить последовательностью, члены которой рассчитываются по формуле:

$$\nu_{n+1} = \sqrt[12]{2} \cdot \nu_n$$

Поскольку в данном случае отношение между всеми, без исключения, соседними членами последовательности постоянно, то, эта последовательность является геометрической прогрессией, каждый представитель которой, начиная со второго может быть вычислен по формуле:

$$\nu_n = \nu_1 \cdot q^{n-1} \qquad (3)$$

где $q = \sqrt[12]{2}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Использование соотношений (2) и (3) из раздела «Пифагоров строй» для исследования двенадцатизвукового равномерно-темперированного строя приводит к равенствам :

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = (\sqrt[12]{2})^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{12}}$$

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = (\sqrt[12]{2})^{n-m} = 2^{\frac{n-m}{12}}$$

Действительно, согласно указанным соотношениям (2) и (3):

$$I_{n,1} = \frac{\nu_n}{\nu_1} = I_{1,1} \cdot I_{2,1} \cdot I_{3,2} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} = 1 \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[12]{2} = (\sqrt[12]{2})^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{12}}$$

$$I_{n,m} = \frac{\nu_n}{\nu_m} = I_{m+1,\,m} \cdot I_{m+2,\,m+1} \cdot \ldots \cdot I_{n,\,n-1} = \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[12]{2} = (\sqrt[12]{2})^{n-m} = = 2^{\frac{n-m}{12}}$$

Интересно отметить, что в индийской музыке строй не является равномерно-темперированным, однако, чистая октава этого строя делится на 22 *шрути* и, поэтому требует более тонкого восприятия звука, по сравнению с европейским, основанным на двенадцатизвуковой температии. Значения шрути можно определять с помощью следующих равенств:

$$I^{ц}_{n+1,\,n} = \begin{cases} 51 \text{ ц.} & \text{для } n = 1 \div 4,\quad 10 \div 13,\quad 17 \div 20 \\ 60\frac{2}{3} \text{ ц.} & \text{для } n = 5 \div 7,\quad 14 \div 16 \\ 56 \text{ ц.} & \text{для } n = 8,\, 9,\, 21,\, 22 \end{cases}$$

Важно подчеркнуть, что в реальной индийской музыке шрути могут делиться на ещё более мелкие интервалы, требуя от слушателя и исполнителя чрезвычайно высокой подготовленности.

Некоторыми европейскими искателями новизны также предлагались более многозвучные октавы - 24, 48 и даже 53 звуковые *равномерные* темперации. На каждую из них специально писалась музыка и конструировались музыкальные инструменты. Однако, практического распространения эти темперации не получили.

Для определения интервалов между звуками различных строев можно пользоваться равенством:

$$I_{n,m'} = \frac{I_{n,1}}{I_{m',1}}$$

где $I_{n,m'}$ – интервал между частотой ν_n одного строя и $\nu_{m'}$ другого строя. Следует подчеркнуть, что последнее равенство справедливо только при условии, что ***ν_1 для обоих строев является общим***.

Упражнения.

71. Рассчитать для равномерно-темперированного строя интервал $I_{13,1}$ и определить является ли этот строй замкнутым?

72. Какой интервал шире – октава Пифагорова строя или чистая октава равномерно-темперированного строя? Во сколько раз? Ответ выразить десятичной дробью, округлённой до сотых долей единицы..

73. Заполнить третий столбец таблицы значений интервалов Пифагорова строя, не включающего Пифагорову комму (раздел «Пифагоров строй»). Значения $\mathrm{I}^{ц}_{n+1,1}$ округлить до целых чисел.

74. Вывести самостоятельно формулу (2) настоящего раздела.

75. Вычислить на сколько центов отличается чистая квинта ($I_{8,1}$ Пифагорова строя без учёта коммы) от темперированной квинты ($I_{8,1}$ равномерно-темперированного строя)?

76. Определить интервал между ν_{13} Пифагорова строя без учёта коммы и ν_{13} равномерно-темперированного строя, если ν_1 у них общее. Ответ выразить в центах.

77. Найти интервал, $I_{7,7'} = \dfrac{\nu_7}{\nu_{7'}}$, где ν_7 седьмой звук Пифагорова строя без учёта коммы, $\nu_{7'}$ – седьмой звук чистого строя, если $\nu_1 = \nu_{1'}$. Ответ выразить в центах.

78. Пользуясь равенством (3) рассчитать ν_7 и ν_9 для равномерно-темперированного строя, если $\nu_1 = 264$ Гц

79. Зная, что $\nu_{10} = 444$ Гц, определить частоты остальных двенадцати звуков равномерно-темперированного строя.

80. Найти значение I если $\mathrm{I}^{ц} = 200$ ц. Ответ представить десятичной дробью, округлённой до тысячных долей единицы.

81. Представить все три значения шрути (51 ц., 56 ц., $60\frac{2}{3}$ ц.) десятичными дробями, округлёнными до десятитысячных долей единицы.

Упражнения к главе II

82. Если пятипроцентный вклад в сбербанк, равный a рублей, через n лет становится равным $a\cdot 1{,}05^n$, то через сколько лет этот вклад удвоится? Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

83. Вычислить выражения:

а) $\log_{1/3}\frac{1}{27}$; б) $\log_7 7$;

в) $3^{\log_3 18}$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/4} 18}$;

д) $9^{\log_3 12}$; е) $16^{\log_4 7}$.

84. Решить уравнения

а) $\log_2(5-x) = 5$; б) $\log_{1/4}\left(x-\frac{1}{2}\right) = -2$

в) $\log_x\frac{1}{7} = -1$; г) $\log_3(x+2) = 2$.

85. Если семипроцентный вклад в сбербанк, равный a рублей, через n лет становится равным $a\cdot 1{,}07^n$, то через сколько лет этот вклад утроится? Ответ округлить до второй цифры после запятой в нормализованной записи.

86. Вычислить выражения:

а) $\log_{1/3} 27$; б) $\log_7 1$;

в) $\log_{0,5}\frac{1}{2}$; г) $\log_5 625$;

д) $5^{\log_5 16}$; е) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$;

87. Решить уравнения:

а) $\log_x 27 = 3$; б) $\log_x\sqrt{5} = \frac{1}{4}$;

в) $2{,}5^{\lg x} = 1$; г) $25^{\ln x} = 1$

88. Рассчитать интервал $I_{4,1}$ для:

а) Пифагорова строя, не включающего комму; б) Пифагорова строя, включающего комму;

в) Чистого строя; г) Равномерно-темперированного строя.

ГЛАВА III
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Итак, Вами освоены и применены к исследованию музыкальных строев все известные математические действия (перечислите их самостоятельно). Однако, они являются лишь частным случаем математических операций, многие из которых не считаются действиями. К таковым, например, относятся операции дифференцирования и интегрирования.

§ 6. Дифференцирование

1. Дифференциал. Производная. Значение производной.

Из курса физики известно, что абсолютное значение постоянной скорости движения ($\boldsymbol{\upsilon}$) можно представить отношением пройденного пути $S_{п}$ ко времени $t_{п}$, затраченному на этот путь:

$$\upsilon = \frac{S_{п}}{t_{п}}$$

На самом деле приведённое равенство является лишь частным случаем более общего уравнения:

$$\upsilon = \frac{S_{п} - S}{t_{п} - t}$$

в котором S *и* t могут равняться нулю. При этом разницу $S_{п} - S$ называют *приращением расстояния* и обозначают ΔS. Разницу $t_{п} - t$ называют *приращением времени* и обозначают Δt:

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1)$$

Однако, при неравномерном движении (например, при движении падающего тела) равенство (1) оказывается некорректным, так как значение скорости от точки к точке меняется. В таких случаях движение описывают с помощью «мгновенной» скорости, представляющей собой отношение бесконечно малого приращения расстояния (dS) к бесконечно малому приращению времени (dt):

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \qquad (2)$$

При этом dS называют *дифференциалом расстояния*, а dt – *дифференциалом времени*.

Дифференциалом какой либо величины называется её бесконечно малое приращение.

Следует обратить внимание, что при движении свободно падающего тела, как и при любом неравномерном движении, значение $dS\,/\,dt$ в каждый момент времени отлично от значения $dS\,/\,dt$ в другой момент времени.

Равенство (2) можно представить иначе:

$$S' = \frac{dS}{dt}$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Правую часть приведённого уравнения читают так: «предел отношения приращения расстояния к приращению времени при дельта тэ, стремящемся к нулю». Символ lim составлен из первых трёх букв латинского слова limes, означающего «предел», то есть величина, которая приобретёт своё значение при достижении переменой своего предела, указанного стрелкой.

Если расстояние воспринимать как функцию у, а время как аргумент х, то в общем виде можно записать:

$$\mathrm{y}' = \frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}} \qquad (3)$$

или

$$\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$$

При этом у' называют *производной функции* у по аргументу х.

Например, при свободном падении зависимость пройденного падающим телом расстояния S от времени t определяется уравнением:

$$S = 5\text{м/с}^2 \cdot t^2 \qquad (4)$$

А зависимость скорости ($\boldsymbol{\upsilon}$)падающего тела от времени будет определяться равенствами:

$$\upsilon = S' = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Не указывая единиц измерения, можем продолжить

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_{\text{п}} - S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5t_{\text{п}}^2 - 5t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t_{\text{п}}^2 - t^2)}{\Delta t}$$

Воспользуемся одним из свойств пределов, согласно которому постоянную можно выносить за знак предела:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t_{\text{п}}^2 - t^2)}{\Delta t} = 5 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_{\text{п}}^2 - t^2}{\Delta t}$$

Для окончательного расчета мы не можем подставить в знаменатель вместо Δt значение к которому Δt стремится, то есть ноль. На ноль делить нельзя. Проведём некоторые преобразования:

$$5 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_{\text{п}}^2 - t^2}{\Delta t} = 5 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 5 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = 5 \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t)$$

Теперь можно подставить вместо Δt значение, к которому Δt стремится, то есть ноль:

$$5 \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 5 \cdot 2t = 10t$$

Таким образом

$$\boldsymbol{\upsilon} = 10t$$

Или, с учётом единиц измерения

$$\upsilon = 10\text{м/с}^2 \cdot t \qquad (5)$$

Проанализируем полученный результат. Оказалось, что если зависимость пути от времени определяется равенством (4), т.е. $S = 5\text{м/с}^2 \cdot t^2$, то зависимость скорости от времени определяется равенством (5), т. е. $\upsilon = 10\text{м/с}^2 \cdot t$.

Таким образом, через одну секунду после начала падения тело пролетит 5м и приобретёт скорость 10 м/с, через 2 секунды пролетит20 м и приобретёт скорость20 м/с, через три секунды пролетит 45 м и приобретёт скорость 30 м/с и так далее:

$$\begin{aligned} S(1) &= 5\text{м}; \quad \upsilon(1) = 10\text{м/с} \\ S(2) &= 20\text{м}; \quad \upsilon(2) = 20\text{м/с} \\ S(3) &= 45\text{м}; \quad \upsilon(3) = 30\text{м/с} \end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассуждения для более общего случая (т.е. рассматривая «x» вместо «*t*» и «y» вместо «*S*»), получим, что для функции:

y = 5x

её производная окажется:

y' = 10x

При этом:

$$\begin{aligned} y(1) &= 5; \quad y'(1) = 10 \\ y(2) &= 20; \quad y'(2) = 20 \\ y(3) &= 45; \quad y'(3) = 30 \end{aligned}$$

Следует помнить, что y = 5x является функцией, а числа: 5, 20, 45 – *значением* этой функции при: x=1; x=2; x=3. Соответственно y' = 10x является производной функции, а числа: 10, 20, 30 *значением* этой производной при тех же значениях переменной: x=1; x=2; x=3.

Таким образом, **производная функции *y* = f (x),** – это формула, позволяющая рассчитывать значение производной этой функции.

Значение производной функции *y* = f (x) в точке x = x_0,– это величина, обозначаемая ***y***'**(x_0)** или **f '(x_0),** или $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ **(x_0),**описывающая *процесс* изменения функции, и равная отношению приращения значения функции к приращению значения аргумента, которое имело бы место при условии, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{const}$$

Например, про снимок автомобиля, сфотографированного во время движения, можно сказать, что перед нами тело, двигающееся со скоростью, скажем, 60 км/час. Хотя никакого движения на фотографии не наблюдается. Просто известно, что помимо свойств легковой машины, наблюдаемых на изображении непосредственно глазами, она обладает ещё одним свойством – перемещением в пространстве, которое проявилось *бы*, если *бы* время, остановленное снимком, пришло в движение. С математической точки зрения свойство автомобиля, которым он обладает в сфотографированный момент времени, описывается равенством

$$\frac{dS}{dt} = 60\text{км/ч}$$

и означает, что если бы это свойство автомобиль сохранил в течение часа, то переместился бы на расстояние в 60 км. В этом случае можно было бы записать $\Delta S/\Delta t$=60 км/ч.

Помимо сказанного следует знать и классическое определение производной, которое гласит что:

производной данной функции y называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной x при стремлении этого приращения к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x + 5}{\Delta x^2 + 1}\ ;\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{ если }\ y = x^2$$

Решение. Для вычисления первого предела достаточно подставить вместо Δx значение к которому Δx стремится, то есть ноль:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2\Delta x+5}{\Delta x^2+1}=\frac{0^2+2\cdot 0+5}{0^2+1}=5$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2\Delta x+5}{\Delta x^2+1}=5$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$$

Решение. Достаточно вместо x подставить единицу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{1^2+2\cdot 1+5}{1^2+1}=\frac{8}{2}=4$$

Следовательно

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=4$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ если $y = x^2$

Решение. В данном случае мы не вправе подставлять ноль вместо Δx потому что на ноль делить нельзя. Избавимся от необходимости делить на ноль, вспомнив, что Δy – это приращение функции, а Δx – это приращение аргумента, которые можно обозначить так

$$\Delta y = y_п - y = x_п{}^2 - x^2$$

$$\Delta x = x_п - x \text{ или } x_п = x + \Delta x$$

где:

- $y_п$ – полученное после приращения значение функции;
- y – начальное значение функции;
- $x_п$ – полученное после приращения значение аргумента;
- x – начальное значение аргумента.

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_п{}^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$$

Последний предел, согласно классическому определению, представляет собой производную функции $y = x^2$, то есть, можно записать, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x^2)' = 2x$$

Упражнения.

89. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$**;**

в) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{12}{3 + 1/x}$**;** г) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3}{x - 2}$;

90. Вычислить предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ если } y = 5x^2 + 7x$$

2. Формулы дифференцирования

Под дифференцированием функции понимают операцию нахождения её производной ИЛИ дифференциала.

Однако, в данном пособии требование «продифференцировать функцию» будет означать задание «найти производную функции И её дифференциал».

Проведя с рядом функций преобразования, аналогичные преобразованиям:

- приведённым в примере 3 ;
- проведённым Вами в упражнении 90,

можно составить таблицу, которую удобно использовать при нахождении более сложных производных (Таблица 3):

Таблица 3

Некоторые формулы дифференцирования

№	Формула	Примечание
1.	$C' = 0$	производная постоянной равна нулю
2.	$(Cy)' = C(y)'$	постоянная выносится за знак производной
3.	$x' = 1$	производная аргумента равна единице
4.	$(x^2)' = 2x$	производная квадрата аргумента равна удвоенному аргументу
5.	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$	производная степенной функции;
6.	$(a^x)' = a^x \ln a$;	производная показательной функции
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	производная логарифма
8.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	производная натурального логарифма
9.	$(\sin x)' = \cos x$;	производная синуса
10.	$(\cos x)' = -\sin x$;	производная косинуса
11.	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	производная тангенса
12.	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	производная котангенса
13.	$(f + g)' = f' + g'$	производная суммы функций равна сумме производных этих функций;
14.	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	производная произведения функций;
15.	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	производная частного функций;
16.	$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$	производная сложной функции

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = 10^x + x^{10}$. Найти значение производной и дифференциала при $x = 10$.

Решение. Для того чтобы найти производную заданной функции воспользуемся формулами из таблицы 3:

$$y' = (x^{10} + 10^x)' = (x^{10})' + (10^x)' = 10x^9 + 10^x \ln 10 = 10x^9 + 10^x \cdot 2{,}3\lg 10 = 10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x$$

Следовательно:

$$y' = 10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x$$

Поскольку

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

То

$$dy = y'dx \quad \Rightarrow \quad dy = (10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x)\,dx$$

Следовательно $dy = (10x^9 + 2{,}3 \cdot 10^x)\,dx$.

Найти значение производной при $x = 10$ можно, подставив в равенство, полученное для производной, вместо x число 10:

$$y'(10) = 10 \cdot 10^9 + 2{,}3 \cdot 10^{10} = 10^{10} + 2{,}3 \cdot 10^{10} = 3{,}3 \cdot 10^{10}$$

Следовательно

$$y'(10) = 3{,}3 \cdot 10^{10}$$

Кроме того

$$dy(10) = y'(10)\,dx = 3{,}3 \cdot 10^{10}dx$$

Следовательно

$$dy(10) = 3{,}3 \cdot 10^{10}dx$$

Интересно задуматься над смыслом последнего равенства. Величина dx – бесконечно малая. Величина dy(10) больше dx в $3{,}3 \cdot 10^{10}$ раза. Но при этом тоже бесконечно мала! Подобно тому как бесконечность, делённая на любое число остаётся бесконечностью, так и бесконечно малые величины, умноженные на любое число остаются бесконечно малыми!

Пример 2. Определить вторую производную функции, приведённой в предыдущем примере. Найти значение второй производной и второго дифференциала при $x = 1$.

Решение. Вторая производная y'' (игрек два штрих) является производной по отношению к первой производной. Поэтому:

$$y''=(x^{10}+10^x)''= (10x^9+2{,}3 \cdot 10^x)' = (10x^9)'+(2{,}3 \cdot 10^x)' =10 \cdot 9x^8 + 2{,}3 \cdot 10^x \cdot 2{,}3\lg10 = 90x^8 +5{,}29 \cdot 10^x$$

Следовательно

$$y'' = 90x^8 +5{,}29 \cdot 10^x$$

Для нахождения значения второй производной при $x = 1$ подставляем вместо x указанное его значение

$$y''(1) = 90 \cdot 1^8 + 5{,}29 \cdot 10^1 = 90 + 52{,}9 = 142{,}9$$

Следовательно

$$y''(1) = 142{,}9$$

Второй дифференциал функции является дифференциалом по отношению к его первому дифференциалу d(dy) и обозначается следующим образом d^2y. При этом выполняется равенство:

$$d^2y = y''dx^2,$$

(дэ два игрек равно игрек два штрих дэ икс дважды)

где dx^2 второй дифференциал аргумента $dx^2 = d(dx)$.

Поэтому

$$d^2y = (90x^8 +5{,}29 \cdot 10^x)dx^2$$

Для нахождения значения второго дифференциала при x = 1 подставляем вместо x указанное его значение

$$d^2y(1) = (90\cdot 1^8 + 5{,}29\cdot 10^1)dx^2 = 142{,}9\ dx^2$$

Следовательно

$$d^2y(1) = 142{,}9\ dx^2$$

(дэ два игрек от единицы равно сто сорок две целых, девять десятых дэ икс дважды).

Если первую производную можно рассматривать как математическое описание скорости (изменения *расстояния* со временем), то вторую производную можно воспринимать как математическое описание ускорения (изменения *скорости* со временем).

Пример 3. Продифференцировать функцию $f(x) = x^3$. Найти значение производной и дифференциала при x = 7.

Решение. Согласно формулам таблицы 3

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

Следовательно

$$f'(x) = 3x^2$$

$$d\,f(x) = 3x^2dx$$

Для нахождения значения производной и дифференциала подставляем вместо x его значение

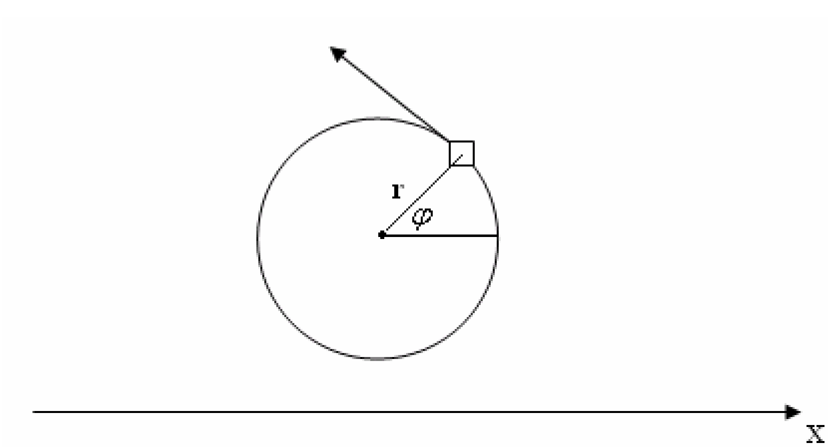
$$f'(7) = 3\cdot 7^2 = 3\cdot 49 = 147$$

Следовательно

$$f'(7) = 147$$

$$df(7) = 147\ dx$$

Пример 4. В плоскости рисунка равномерно, с постоянной линейной скоростью υ_o движется тело по окружности с радиусом r.



При этом, скорость υ тени от этого тела, падающей на ось X, подчиняется уравнению

$$\upsilon = \upsilon_o \sin wt$$

где t – время, w – постоянная угловая скорость вращения тела:

$$w = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\upsilon_o}{r} \quad (6)$$

Определить зависимость ускорения $\boldsymbol{a}$ этой тени от времени и её максимальное ускорение $\boldsymbol{a}_o$.

Решение. Ускорение представляет собой производную скорости. Поэтому

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon' = (\upsilon_o \sin wt)' = \upsilon_o (\sin wt)'$$

Выражение sin wt описывает сложную функцию, производная которой определяется с помощью формулы № 16 из таблицы 3. При этом g(x) ≡ wt, f(g(x)) ≡ sin wt. В данном случае

$$\boldsymbol{a} = \upsilon_o (\sin wt)' = w \cdot \upsilon_o \cdot \cos wt$$

Следовательно

$$\boldsymbol{a} = w \cdot \upsilon_o \cdot \cos wt$$

Из полученного равенства видно, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_o$ при cos wt равном единице.

Следовательно

$$\boldsymbol{a}_\mathbf{o} = w \cdot \upsilon_o$$

Максимальное ускорение тени равно произведению угловой и линейной скорости вращающегося тела. Полученный результат можно привести иначе, подставив вместо w, его значение из равенства (6):

$$\boldsymbol{a}_\mathbf{o} = \frac{\upsilon_o{}^2}{r}$$

Упражнения.

Продифференцировать функцию y. Найти значение производной и дифференциала при x = 3,14 (72 – 74).

91. а) $y = 28$; б) $y = 7x$;
в) $y = 7x^7/\pi^6$; г) $y = -7x^{-7}/\pi^{-8}$.

92. а) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; б) $y = \cos^2 x$;
в) $y = tgx + \sin x$; г) $y = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 6}{5}$.

93. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\cos x$;

в) $y = 5x^2/\pi + 3\sin x$; г) $y = 3x^3 \cdot \cos x$;

94. Определить вторые производные функций, приведённых в предыдущем упражнении. Найти значения вторых производных и вторых дифференциалов этих функций при x = 0.

95. Найти первую, вторую, третью и четвёртую производные функции y.

а) $y = \sin x$; б) $y = x^5$;

в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = e^x$

96. Продифференцировать функцию f(x). Найти значение её производной при x = 2.

а) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$; б) $f(x) = x^4/4$;

в) $f(x) = x^5/5$; г) $f(x) = \ln x$

97. Найти первую, вторую и третью производную функции f(r), если $f(r) = \pi r^2$. Вычислить значение функции и значение первой производной при $r = \pi^{-1}$.

98. Найти первую, вторую и третью производную функции $f(\upsilon)$, если $f(\upsilon) = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, где m - постоянная.

99. Продифференцировать функцию y. Найти значение производной при x = 2,718, если

$$y = 2e\lg x + 3e\ln x;$$

100. Найти производную функции y, если $y = x^2z^3$, при этом:

а) x является переменной, z – постоянной;

б) x является постоянной, z – переменной

101. Рассчитать абсолютное значение скорости, которую приобретёт парашютист в момент раскрытия парашюта, если зависимость расстояния (S) между ним и самолётом от времени (t) описывается равенством:

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

а парашют раскрылся через 15 секунд после прыжка с летящего самолёта ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

102. Рассчитать абсолютное значение скорости и ускорения ракеты через 5 секунд после старта, если в течение этого времени расстояние S, преодолеваемое ею, изменялось согласно равенству:

$$S = 2\text{м/с}^3 \cdot t^3$$

где t – время, измеряемое в секундах.

103. Определить скорость нагрева воды в микроволновой печи, если зависимость температуры (T) воды, от времени (t) описывается равенством:

$$T = 25\ {}^{o}C + 0,2\frac{{}^{o}C}{c}\cdot t$$

где t – время, измеряемое в секундах.

104. Для тела, движущегося по окружности и рассмотренного в примере 4, определить зависимость изменения ускорения его тени ($\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$) от времени.

---

1. **Что такое приращение? Дифференциал?**
2. **Дайте определение понятию «значение производной функции».**
3. **Что такое производная? Дайте классическое определение производной.**

3. Способы представления производной

Производная функции, также как и сама функция, может быть представлена:

- с помощью формулы. Например,

$$y = x^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \qquad (1)$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 4 и 5:

Таблица 4

Зависимость y от x

y	9	4	1	0	1	4	9
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

Таблица 5

Зависимость y' от x

y'	-6	-4	-2	0	2	4	6
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

- с помощью графика (графический способ). Например, рис. 5 и рис. 6

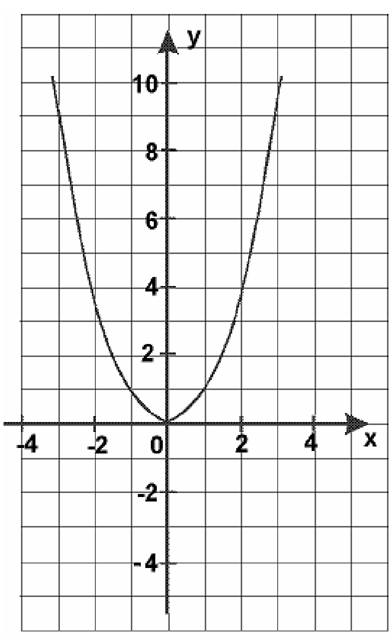


Рис. 5. График функции $y = x^2$

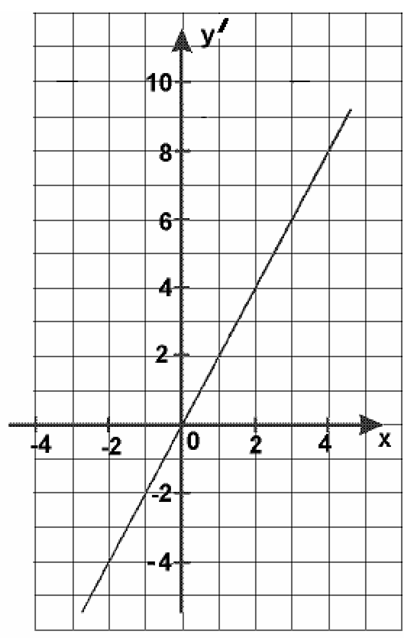


Рис.6. График функции y' = 2x

Упражнения

105. Зная, что расстояние S, преодолеваемое ракетой, определяется равенством:

$$S = 2_{м/с^3}\cdot t^3,$$

где t – время, измеряемое в секундах, представить графически зависимость скорости(S') ракеты от t в координатах t– S'. Предлагаемый масштаб:

- по оси t в трёх тетрадных клетках 1 с.;
- по оси S' в одной тетрадной клетке 5 м/с.

106. Представить графически в координатах t – T зависимость температуры воды T от времени t измеряемого секундами, а также зависимость скорости нагрева (T ') от времени в координатах t – T', если вода помещена в микроволновую печь и

$$T = 25\ {}^{o}C + 0,2\frac{{}^{o}C}{c}\cdot t$$

Масштаб координатных осей подобрать самостоятельно.

4. Графическое представление значения производной функции y = f(x) в координатах X – Y.

Из уравнения (1), таблицы 5, рисунка 6 предыдущего раздела видно, например, что y'=2 при x =1. То есть, справедливо выражение $y'(1) = \frac{dy}{dx}(1) = 2$ означающее, что $dy(1) = 2dx$, то есть функция y в точке (1; 1) изменяется в 2 раза быстрее аргумента. Например, если аргумент изменяется на единицу, то функция изменится на две единицы, если аргумент изменится на две единицы, то функция изменится на 4 единицы, если аргумент изменится на три единицы, то функция изменится на 6 единиц и т.д., что наглядно изображает прямая на рис. 7. Таким образом, *точка* с координатами (1; 2) в системе координат X – У' (рис. 6), в другой системе координат X – У представляет собой прямую, которая называется касательной к графику функции в точке (1;1). (рис.7) Тангенс угла φ наклона этой прямой к оси X и представляет собой значение производной функции в точке касания. Первая координата точки (1; 2) на рис.6 оказывается первой координатой точки касания на рис. 7, а вторая координата точки (1; 2) рисунка 6 оказывается тангенсом угла наклона к оси X касательной рисунка 7. Как известно, тангенс угла наклона равен отношению противолежащей углу стороны прямоугольного треугольника к прилежащей стороне. В данном случае – отношению длины проекции любого отрезка касательной на ось У к длине проекции этого же отрезка на ось X.

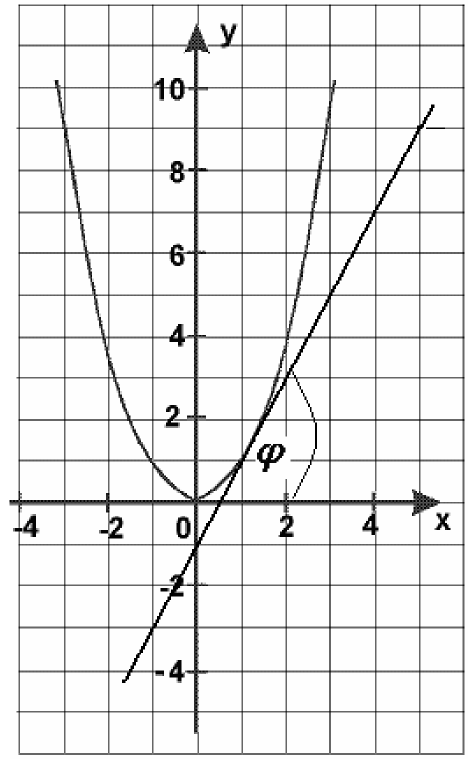


Рис.7. Касательная в точке (1; 1) к графику функции $y = x^2$.

Итак, геометрический смысл значения производной состоит в том, что графически значение производной функции в данной точке представляет собой тангенс угла наклона касательной к функции в этой точке.

Если подразумевать, что для функции $y = f(x)$ справедливо равенство $y_0 = f(x_0)$, то графическое представление $f'(x_0)$ в координатах Х–У, можно осуществлять, придерживаясь следующего алгоритма.

1). Построить график функции $y = f(x)$ на отрезке значений аргумента, включающем точку $(x_0; y_0)$.

2). Выделить (отметить) на полученном графике точку при $(x_0; y_0)$.

3). Нанести первую вспомогательную точку, отстоящую правее от выделенной точки при $(x_0; y_0)$ на одно деление оси Х.

4). Нанести вторую вспомогательную точку. Если $f'(x_0)>0$, то нанести её *выше* первой на количество делений оси У, равное $f'(x_0)$. Если $f'(x_0)<0$, то *ниже* первой на количество делений оси У, равное абсолютному значению $f'(x_0)$.

5). Провести через вторую вспомогательную точку и точку $(x_0; y_0)$ прямую. Тангенс угла наклона полученной прямой к оси Х будет представлять собой значение производной функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$.

Пример 1. Зная, что расстояние S, преодолеваемое свободно падающим телом, определяется равенством:

$$S=\frac{gt^2}{2},$$

где g = 10 м/с^2, t – время, измеряемое в секундах, представить графически:

- зависимость скорости(S') свободно падающего тела от t в координатах t– S';
- значение его скорости через 1 секунду после начала падения S'(1) в координатах t– S.

Решение. Зависимость скорости свободно падающего тела от времени представляет собой производную расстояния:

$$S' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$$

Графиком функции $S' = gt$ является прямая, которую можно построить по двум точкам (таблица 6, рис. 8).

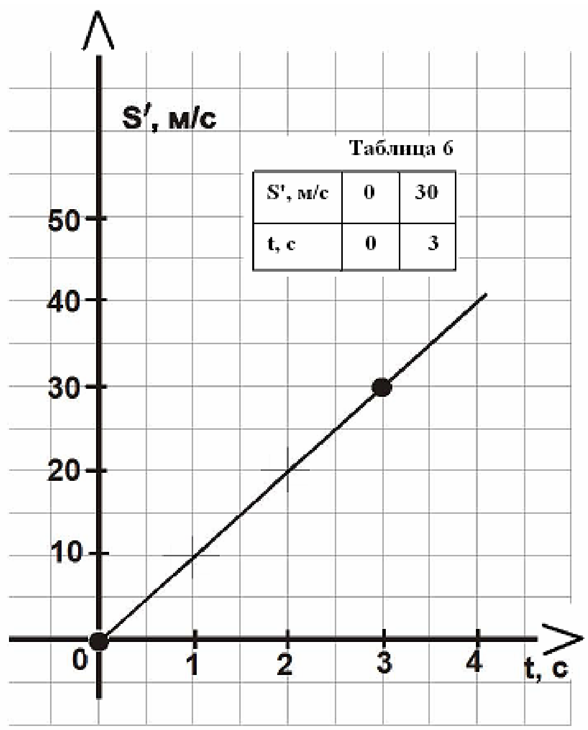


Рис. 8. График функции S′ = gt

Для графического представления S'(1) воспользуемся алгоритмом.

1). Построим график функции у = x^2 на отрезке значений аргумента от 0 до 3 с помощью таблицы 7 (рис. 9а).

2). Выделим на полученном графике точку (1; 5) (рис. 9 б).

3). Нанесём первую вспомогательную точку, отстоящую правее от выделенной точки (1; 5) на одно деление оси х (рис. 9 в). Эту точку лучше наносить в уме, чтобы не загромождать рисунок.

4). Нанесём вторую вспомогательную точку *выше* первой на десять делений оси у (рис. 9 г).

5). Проведём через вторую вспомогательную точку и точку (1; 5) прямую. Тангенс угла наклона полученной прямой к оси X представляет собой S'(1) и равен 10 (рис. 9 д).

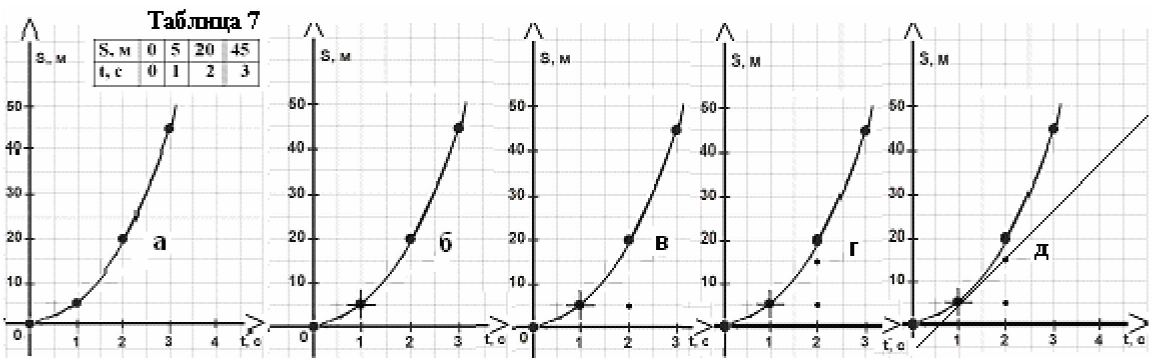


Рис. 9. Графическое представление S'(1).

Пример 2. Установить вид функции tg φ = f(x), где φ – угол наклона к оси X касательной к функции у = $\sqrt{x}$? Рассчитать tg φ(4), tg φ(9), tg φ(16).

Решение. Поскольку в данном случае tg φ является производной функции у, то

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = (\sqrt{x}\,)' = (x^{1/2})' = \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Следовательно, функция tg φ = f(x) имеет следующий вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Для расчёта tg φ(4) подставляем в полученное равенство значение х равное 4

$$\operatorname{tg}\varphi\,(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{4}$$

Следовательно

$$\operatorname{tg}\varphi\,(4) = \pm\frac{1}{4}$$

Аналогично поступаем при расчёте tg φ (9) и tg φ (16)

$$\operatorname{tg}\varphi\,(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{6}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\,(9) = \pm\frac{1}{6}$$

$$\text{tg } \varphi\ (16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \pm\frac{1}{8}$$

$$\text{tg } \varphi\ (16) = \pm\frac{1}{8}$$

Для наглядности, примерный график функции tg φ = f(x), приведён на рис. 10, однако, можно иметь в виду, что построение графика не входит в условие подобных задач.

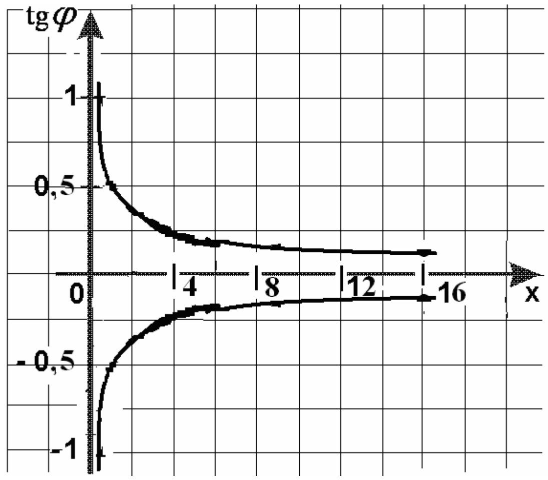


Рис. 10. Зависимость tg φ от (x) для функции y = $\sqrt{x}$.

Упражнения.

107. Зная, что расстояние S, преодолеваемое ракетой, определяется равенством:

$$S = 2_{м/с^3} \cdot t^3,$$

где t – время, измеряемое в секундах, представить графически:

а) зависимость S от t в координатах t– S. Предлагаемый масштаб:

- по оси t в трёх тетрадных клетках 1 с.;

- по оси S в одной тетрадной клетке 5 м.

б) значения скорости ракеты через 1 секунду после старта S'(1) и через 2 секунды после старта S'(2) в этих же координатах.

108. Установить вид функции tg φ = f(x), где φ – угол наклона к оси X касательной к функции y = x^4 ? Рассчитать tg φ(0), tg φ(1), tg φ(2).

---

1. **Какими способами может быть представлена производная?**
2. **В чём состоит геометрический смысл производной?**

§7. Интегрирование

1. Первообразная и неопределённый интеграл

Интегрированием называется математическая операция, обратная дифференцированию. Результатом интегрирования является нахождение первообразной, неопределённого интеграла и определённого интеграла.

Первообразная

Первообразная для заданной функции *y* = f (x), – это функция F(x), производная которой является заданной функцией:

$$F'(x) = f(x),$$

То есть, последнее равенство можно прочесть двумя способами:

1). f(x) является производной функции F(x).

2). F(x) является первообразной для функции f(x)

На основании определения можем записать, что

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Следовательно:

$$dF(x) = F'(x)dx$$

или

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (1)$$

То есть, произведение функции на дифференциал аргумента оказывается равным дифференциалу первообразной.

Основное свойство первообразной

Если F(x) является первообразной для функции f(x), то сумма F(x)+C, где C постоянная, также является первообразной для функции f(x):

$$\mathbf{(F(x)+C)' = f(x)}$$

Действительно:

$$(F(x)+C)' = F'(x)+ C' = F'(x)+0 = f(x)$$

Следовательно

$$(F(x)+C)' = f(x)$$

Бесконечное множество всех первообразных для функции f(x) называется неопределённым интегралом этой функции и записывается, на основании (1) следующим образом:

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

где C - бесконечное множество всех чисел, включающее ноль. При этом функция f (x), находящаяся под знаком интеграла ∫, называется подынтегральной функцией, переменная x – переменной интегрирования, C – постоянной интегрирования.

Например, для функции $f(x) = 10x$, выражения: $5x^2$, $5x^2 + 5$, $5x^2 – 17$, $5x^2 + 12{,}9$ являются четырьмя первообразными. То есть:

$$F_1(x) = 5x^2$$
$$F_2(x) = 5x^2 + 5$$
$$F_3(x) = 5x^2 – 17$$
$$F_4(x) = 5x^2 + 12{,}9$$

А выражение $5x^2 + C$, где под C подразумевается бесконечное множество всех чисел, включая ноль, является неопределённым интегралом заданной функции f(x):

$$\int dF(x) = \int 10x\,dx = 5x^2 + C \qquad (2)$$

Функция 10x в равенстве (2) является подынтегральной функцией, переменная x этой функции – переменной интегрирования.

Придадим абстрактным f(x) и x конкретный физический смысл. Известно, что скорость свободного падения (υ)определяется равенством:

$$\upsilon = gt,$$

где t – время, g – ускорение свободного падения ($g \approx 10 м/с^2$).

Позволим себе записать упрощённо:

$$\upsilon = 10t$$

или

$$\frac{dS}{dt} = 10t$$

где S – расстояние, преодолеваемое падающим телом. Отсюда

$$dS = 10tdt$$

Найдём неопределённый интеграл для функции 10t. В результате получим:

$$\int dS = \int 10t\,dt = 5t^2 + C,$$ где

- $\int dS = S$ – расстояние, преодолеваемое свободно падающим телом;
- C – расстояние, которое это тело преодолело до того, как его отпустили в свободное падение. И это расстояние, конечно, может быть любым. Иногда постоянная C задаётся начальными условиями интегрирования.

При нахождении неопределённых интегралов конкретных функций используют следующие *свойства неопределённых интегралов:*

1) Неопределённый интеграл суммы равен сумме неопределённых интегралов

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2) Постоянная (c), отличная от единицы, выносится за знак неопределенного интеграла

$$\int cf(x)dx = cf(x)dx$$

3) Неопределённый интеграл единицы равен сумме интегрируемой переменной и постоянной интегрирования

$$\int 1dx = \int dx = x + C$$

Некоторые первообразные и производные ряда функций приведены в Таблице 8.

Таблица 8

Некоторые первообразные и производные ряда функций

F(x) – первообразная функции	f(x) – функция	f ' (x) – производная функции
$F(x) = C$	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
$F(x) = x$	$f(x) = 1$	$f'(x) = 0$
$F(x) = Cx$	$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
$F(x) = x^2/2$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$F(x) = Cx^2/2$	$f(x) = Cx$	$f'(x) = C$
$F(x) = x^3/6$	$f(x) = x^2/2$	$f'(x) = x$
$F(x) = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$ $n \neq -1;\ n \neq -2$	$f(x) = x^{n+1}/(n+1)$ $n \neq -1$	$f'(x) = x^n$
$F(x) = \ln x$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$F(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$F(x) = -\cos x$	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Полезно иметь в виду, что если выражения правого столбца таблицы воспринимать как подынтегральные функции с интегрируемой переменной x, то выражения среднего столбца будут представлять собой первообразные этих функций.

Пример 1. Найти неопределённый интеграл функции $y = 3x^3$.

Решение. При решении подобных примеров полезно воспринимать заданную функцию y, как производную её первообразной Y ($y = \dfrac{dY}{dx}$):

$$\frac{dY}{dx} = 3x^3$$

откуда

$$dY=3x^3dx$$

$$\int dY = \int 3x^3dx$$

Согласно свойствам неопределённых интегралов, постоянная выносится за знак интеграла. Поэтому

$$\int 3x^3dx = 3\int x^3dx$$

Из таблицы 8 следует, что для некоторой функции, равной x^3, первообразной является функция $\frac{x^4}{4}$. Значит

$$3\int x^3dx = 3\frac{x^4}{4} + C$$

Следовательно

$$\int 3x^3dx = 3\frac{x^4}{4} + C$$

Пример 2. Найти неопределённый интеграл тригонометрической функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение. Также как в примере 1, подразумевая, что функция y является производной своей первообразной, представим сразу искомый интеграл следующим образом:

$$\int (\sin x + \cos x)dx$$

Согласно свойствам неопределённых интегралов, интеграл суммы равен сумме неопределённых интегралов. Поэтому:

$$\int (\sin x + \cos x)dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + C_1 + \sin x + C_2 = \sin x - \cos x + C$$

где $C = C_1 + C_2$. Следовательно

$$\int (\sin x + \cos x)dx = \sin x - \cos x + C$$

Пример 3. Найти неопределённый интеграл функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Подобно предыдущим примерам представим искомый интеграл так:

$$\int \frac{dx}{x}$$

Из таблицы 8 следует, что для функции, равной $\frac{1}{x}$, первообразной является функция $\ln x$.

Следовательно

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

Упражнения.

Найти неопределённый интеграл функции y (89 – 92):

109. а) $y = 20x$; б) $y = 3x^2$;

в) $y = 7$; г) $y = 0$.

110. а) $y = -\frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $y = 49x^6$; г) $y = 49x^{-8}$.

111. а) $y = \frac{\pi}{x}$; б) $y = 2\cos x$;

в) $y = -3\sin x$;

г) $y = 10x + 3\cos x$.

112. а) $y = 9x^2\cos x - 3x^3\sin x$; б) $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$;

в) $y = -2\sin x\cos x$; г) $y = x^{-1}$

113. Найти неопределённый интеграл функции y, если $y = x^2z^3$, при этом:

а) x является интегрируемой переменной, z – постоянной.

б) x является постоянной, z – интегрируемой переменной

---

1. **Что такое первообразная?**
2. **Сформулируйте основное свойство первообразной.**
3. **Что такое неопределённый интеграл?**
4. **Какие свойства неопределённых интегралов вы усвоили?**

2. Определённый интеграл

К сожалению, неопределённый интеграл без начальных условий интегрирования, т.е. без знания значения постоянной интегрирования, не позволяет однозначно решать конкретные задачи из-за бесконечного множества своих первообразных. Поэтому естественнонаучные задачи чаще всего решаются с помощью *определённых* интегралов.

Если в качестве функции f(x), являющейся производной своей первообразной ($f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$), рассматривать скорость движения тела ($\upsilon = \frac{dS}{dt}$), то конкретное расстояние ΔS, преодолеваемое этим телом в интервале времени от t_1 до t_2 и является *определённым интегралом* функции υ. Записывается такой определённый интеграл следующим образом:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt$$

Или в общем, математическом виде:

$$\Delta F(x) = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Числа x_1 и x_2 называются пределами интегрирования, x_1 –нижним, x_2 – верхним. Функция f(x) называется подынтегральной функцией, а переменная x – переменной интегрирования. Обозначение определённого интеграла включает в себя стилизованную букву S, как раз из-за того, что искомое изменение первообразной для подынтегральной функции воспринимается как сумма (Sum) дифференциалов - бесконечно малых приращений этой первообразной $\int_{x_1}^{x_2} dF(x)$.

Рассчитывают определённые интегралы с помощью формулы, вошедшей в историю под названием формулы Ньютона – Лейбница, гласящей, что *определённый интеграл функции равен приращению значения её первообразной на заданном отрезке аргумента*:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

При этом приращение значения первообразной нередко обозначают следующим образом:

$$F(x_2) - F(x_1) = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Таким образом, более подробная запись формулы Ньютона-Лейбница может выглядеть так:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Например, для функции скорости, при условии, что υ=const

$$\int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt = \upsilon \int_{t_1}^{t_2} dt = \upsilon t \Big|_{t_1}^{t_2} = \upsilon(t_2 - t_1) = \upsilon t_2 - \upsilon t_1 = S_2 - S_1 = \Delta S$$

Итак. Определённым интегралом функции *y* = f (x), называется сумма бесконечно малых приращений первообразной для этой функции на заданном отрезке аргумента, равная приращению значений первообразной на этом отрезке.

Конечно, для расчёта пути, пройденного равномерно движущимся объектом, нет большой необходимости прибегать к интегрированию. Достаточно перемножить значение скорости на время движения. Однако, при неравномерном движении, т.е. в случае когда $\boldsymbol{\upsilon} = f(t)$ без интегрирования не обойтись.

Рассмотрим ещё раз скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ свободно падающего тела, для которой справедливо равенство:

$$\boldsymbol{\upsilon} = gt$$

где g – ускорение свободного падения ($g \approx 10$ м/с^2). Как в этом случае определить расстояние ΔS, которое пролетит падающее тело, скажем, через 5 секунд после начала падения? Ведь значение скорости при падении непрерывно меняется. Только с помощью определённого интеграла:

$$\Delta S = \int_0^5 \upsilon dt = \int_0^5 gt dt = g \int_0^5 t dt = g \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 10 \cdot \frac{5^2}{2} - 10 \cdot \frac{0^2}{2} = 125 \text{ (м).}$$

При нахождении определённых интегралов удобно пользоваться их свойствами, которые почти совпадают со свойствами неопределённых интегралов.:

1) Определённый интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x) + g(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

2) Постоянная (с), отличная от единицы, выносится за знак определённого интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} C\, f(x)dx = C \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

3) Определённый интеграл единицы равен приращению интегрируемой переменной

$$\int_{x_1}^{x_2} 1dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 = \Delta x$$

Следует также иметь в виду, что зачастую вместо термина «определённый интеграл» используют только одно слово «интеграл».

Пример 1. Рассчитать приведённый ниже интеграл:

$$\int_1^2 3x^3dx$$

Решение. Также как в примере 1 предыдущего параграфа выносим постоянную за знак интегрирования и находим первообразную полученной подынтегральной функции:

$$\int_1^2 3x^3\,dx = 3\int_1^2 x^3\,dx = 3\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2$$

Полученную запись преобразуем в привычную разницу между различными значениями первообразной:

$$3\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = 3\frac{2^4}{4} - 3\frac{1^4}{4} = 11\frac{1}{4}$$

Следовательно:

$$\int_1^2 3x^3\,dx = 11\frac{1}{4}$$

Пример 2. Рассчитать интеграл тригонометрической функции:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x + \cos x)dx$$

Решение. Воспользуемся тем, что интеграл суммы равен сумме интегралов и последуем алгоритму, изложенному в предыдущем примере:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x + \cos x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos\frac{\pi}{2}) + \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0$$

Следовательно

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx = 0$$

Пример 3. Рассчитать приведённый ниже интеграл:

$$\int_e^{10e} \frac{dx}{x}$$

Решение. Согласно таблице 8, для некоторой функции, равной $\frac{1}{x}$, первообразной является функция lnx. Значит:

$$\int_{e}^{10e}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{e}^{10e} = \ln 10e - \ln e = \ln\frac{10e}{e} = \ln 10 \approx 2{,}3$$

Следовательно:

$$\int_{e}^{10e}\frac{dx}{x} \approx 2{,}3$$

Пример 4. Определить через сколько лет ($t_л$) в слитке металла останется 50 г. радия (Ra) если первоначально в слитке находилось 100 г Ra, а скорость его распада ($-\frac{dm}{dt}$) пропорциональна массе (m) и определяется равенством:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

где $k = 4{,}3\cdot10^{-4}$ год$^{-1}$. Ответ представить нормализованной записью, округлённой до второго знака после запятой.

Решение. Введём обозначения: $m_н$ = 100 г; $m_к$ = 50 г. Заметим, что по условию задачи располагаем, так называемым, *дифференциальным уравнением,* в котором производная функции зависит от самой функции – производная массы зависит от самой меняющейся массы. В подобных ситуациях применяют математическую операцию *разделения переменных*. В данном случае это означает, что все обозначения массы переносят в одну часть уравнения, а обозначения времени – в другую:

$$dt = -\frac{dm}{km}$$

После чего интегрируют левую и правую части:

$$\int_{0}^{t_л} dt = \int_{m_н}^{m_к} -\frac{dm}{km}$$

$$t_л = \frac{1}{k}\ln\frac{m_н}{m_к}$$

Подставляя вместо обозначения величин их значения из условия задачи, получим:

$$t_л = \frac{1}{4{,}3\cdot10^{-4}}\ \ln\frac{100}{50} \approx 1{,}61\cdot10^{3}\ \text{(лет)}$$

Следовательно $t_л \approx 1{,}61\cdot 10^3$ лет. В слитке металла останется 50 г радия примерно через $1{,}61\cdot 10^3$ лет.

Пример 5. Определить физический смысл определённого интеграла импульса тела с массой m = const, если переменной интегрирования является скорость его движения, меняющаяся от 0 м/с до υ м/с.

Решение. По условию задачи массу можно вынести за знак интеграла:

$$\int_0^{\upsilon} m\upsilon d\upsilon = m\int_0^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} = E_к = A\ ,$$

где $E_к$ – кинетическая энергия движущегося тела, A – работа, совершённая силой, придавшей покоящемуся телу скорость υ.

Следовательно, в данном случае, *интеграл импульса тела представляет собой кинетическую энергию этого тела, а также работу, совершённую силой, придавшей покоящемуся телу скорость* υ.

Упражнения.

Рассчитать интегралы (114 – 117).

114. а) $\int_2^5 20x dx$; б) $\int_3^7 3x^2 dx$;

в) $\int_{100}^{200} 7dx$; г) $\int_{10}^{100} -\frac{1}{x^2} dx$;

115. а) $\int_{25}^{49} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; б) $\int_1^2 49x^6 dx$;

в) $\int_2^3 49x^{-8} dx$; г) $\int_0^{1{,}57} 2\cos x dx$;

116. а) $\int_{1{,}57}^{3{,}14} -3\sin x\, dx$; б) $\int_{\pi}^{2\pi} (10x + 3\cos x)dx$;

в) $\int_0^{\pi/2} (9x^2\cos x - 3x^3\sin x)dx$; г) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} dx$;

117 а) $\int_{-\pi}^{+\pi} (-2\sin x\cdot\cos x)dx$; б) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$;

в) $\int_0^{1/\pi} 2\pi r dr$; г) $\int_0^{\pi^{\frac{1}{3}}} 4\pi r^2 dr$

118. Рассчитать интеграл функции y, на отрезке интегрируемой переменной [1; 2], если:

$$y = x^2 z^3 \text{ , при этом:}$$

а) z является постоянной, равной двум, x – интегрируемой переменной.

б) x является постоянной, равной двум, z – интегрируемой переменной.

119. Определить расстояние (S), которое пролетит парашютист к моменту раскрытия парашюта, если зависимость скорости его падения (υ) от времени (t) описывается равенством:

$$\upsilon = gt$$

где g – ускорение свободного падения (10 м/с^2), а парашют раскрылся через 7 секунд после прыжка с летящего самолёта.

120. Определить скорость (υ), которую приобретёт ракета через три секунды после старта, а также расстояние (S), преодолённое ею в течение этого времени, если ускорение ракеты (a) изменяется со временем согласно равенству:

$$a = 2 \text{ м/с}^3 t$$

где t - время, измеряемое в секундах.

121. Определить температуру воды, нагреваемой в микроволновой печи в течение одной минуты, если задан режим, при котором скорость нагрева возрастает со временем, согласно равенству:

$$\upsilon = 0{,}03\text{град/с}^{2} \cdot t,$$

где t – время измеряемое в секундах, а первоначальная температура воды составляла 20^{o}С.

122. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени от t = 0 до t = 5, если скорость точки меняется по закону $\upsilon = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Найти ускорение этой точки в конце пути (т.е. при t = 5).

123. Рассчитать Δy, если $\Delta y = e - y$; $\Delta x = 10 - 0$; $\frac{dy}{dx} = -ky$; $k = 0{,}1$.

124. Определить массу одного из изотопов нобелия ($^{256}_{102}\text{No}$) через 1 час после искусственного получения 1 грамма этого радиоактивного элемента и массу плутония ($^{239}_{94}\text{Pu}$) через 100 000 лет после его получения той же массы, если скорость распада ($-\frac{dm}{dt}$) обоих металлов описывается равенством:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

причём, для нобелия $k = 1{,}66$ час$^{-1}$, для плутония $k = 6{,}93 \cdot 10^{-11}$ год$^{-1}$. Ответ выразить в системе СИ и представить нормализованной записью, округлённой до второй цифры после запятой.

1. Что представляет собой формула Ньютона – Лейбница?

2. Дайте определение понятию “определённый интеграл”.

3. Какие свойства определённых интегралов вы знаете?

3. Способы представления интеграла

Интеграл функции y=f(x) на отрезке [x_1; x_2], также как и сама функция, может быть представлен:

- с помощью формулы. Например, если дана функция $y=x^2$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3};$$

- с помощью таблицы (табличный способ). Например, таблицы 9 и 10:

Таблица 9

Зависимость y от x

y	4	1	0	1	4
x	–2	–1	0	1	2

Таблица 10

Зависимость $\int_{x_1}^{x_2} y dx$ от значений x_1 и x_2

$\int_{x_1}^{x_2} y dx$	7/3	1/3	1/3	7/3	19/3
x_2	– 1	0	1	2	3
x_1	– 2	– 1	0	1	2

- с помощью графика (графический способ). Например, рис.11, 12:

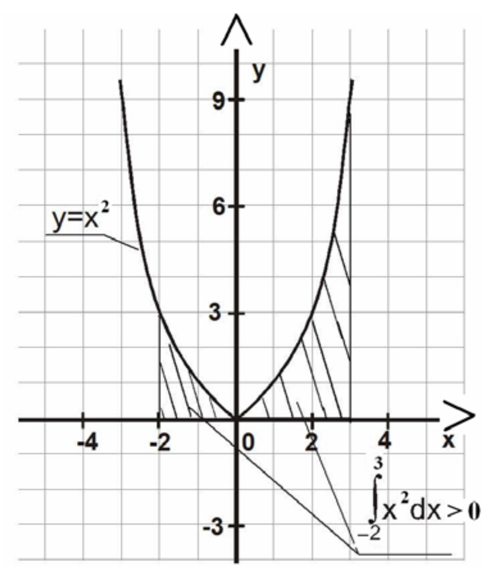


Рис. 11. Графическое представление функции $y=x^2$ и интеграла $\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx$ на отрезке оси абсцисс от – 2 до 3.

Геометрический смысл значения интеграла состоит в том, что графически, в координатах Х – У интеграл функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ представляет собой приращение площади подграфика или надграфика на этом отрезке.

Подграфиком называется фигура, ограниченная:

- графиком функции $y=f(x)$;
- прямыми $x= x_1$ и $x= x_2$;
- осью абсцисс

и расположенная ниже графика, выше оси абсцисс.

Надграфиком называется фигура, ограниченная:

- графиком функции $y=f(x)$;
- прямыми $x= x_1$ и $x= x_2$;
- осью абсцисс

и расположенная выше графика, ниже оси абсцисс.

Например если интеграл функции $y=x^2$ представляет собой приращение площади подграфика, то интеграл функции $y=-x^2$ представляет собой приращение площади надграфика. (Табл. 11., рис.12).

Таблица 11

Зависимость $\int_{x_1}^{x_2} -x^2 dx$ от x_1 и x_2.

$\int_{x_1}^{x_2} -x^2 dx$	$-7/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-7/3$	$-19/3$
x_2	-1	0	1	2	3
x_1	-2	-1	0	1	2

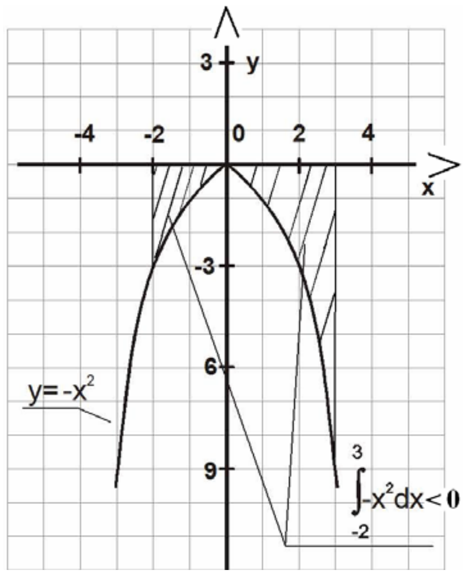


Рис. 12. Графическое представление функции y = − x^2 и интеграла $\int_{x_1}^{x_2} -x^2 dx$ на отрезке оси абсцисс от − 2 до 3.

Одно из основных отличий свойств подграфика и надграфика состоит в том, что приращение площади подграфика с ростом аргумента положительно, а приращение надграфика с ростом аргумента – отрицательно. Поэтому $\int_{-2}^{3} x^2 dx > 0$, а $\int_{-2}^{3} -x^2 dx < 0$

Пример 1. Рассчитать интеграл $\int_{-3}^{3} y dx$, где y=2x и представить его графически в координатах x – y

Решение. Предложенный интеграл оказывается равным нулю:

$$\int_{-3}^{3} y dx = \int_{-3}^{3} 2x dx = x^2 \Big|_{-3}^{3} = 9 - 9 = 0$$

Однако, графически этот интеграл представляет собой площади, отличные от нуля (рис. 13).

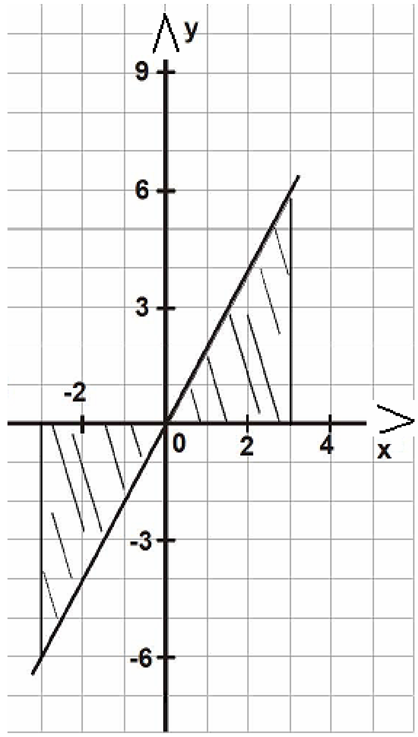


Рис. 13. График функции у=2х с указанием надграфика и подграфика на отрезке оси абсцисс от – 3 до 3.

Заданный интеграл оказался равным нулю в силу того, что приращения надграфика этой функции ($\int_{-3}^{0} 2xdx < 0$) и её подграфика ($\int_{0}^{3} 2xdx > 0$) противоположны по знаку и, в данном случае, равны по абсолютной величине.

Упражнения.

125. Вычислить размеры площадей, заштрихованных на рисунках 11, 12, 13.

126. Рассчитать интегралы и представить их графически в координатах Х – У.

а) $\int_{1/3}^{3} ydx$, если у = 3х ;

б) $\int_{-3}^{3} ydx$, если у = x^2;

в) $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} ydx$, если у = cos x

г) $\int_{0}^{\pi/2} ydx$, если у = sin x

---

1. **Какими способами может быть представлен интеграл?**
2. **В чём состоит геометрический смысл значения интеграла?**
3. **Что такое подграфик функции? Надграфик функции?**

4. Интегральные и дифференциальные формы естественнонаучных уравнений

Форма, приобретаемая уравнением после его интегрирования, называется интегральной формой этого уравнения. Первоначальную форму, при этом, называют дифференциальной формой уравнения. Однако, сама интегральная форма может приобретать различный вид при отличающихся условиях интегрирования. Например, интегрирование равенства $\upsilon = dS/dt$ при $\upsilon = const$ приводит к выражению (табл. 12):

$$\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t$$

Если же скорость окажется величиной переменной, скажем $\upsilon = gt$, то в результате интегрирования того же равенства получим:

$$\Delta S = \frac{g\Delta t^2}{2}$$

Различные (дифференциальные и интегральные) формы естественнонаучных уравнений используются для описания разных аспектов одного и того же явления. Дифференциальные формы описывают мгновенные скорости каких либо процессов (например, движения в пространстве), а интегральные формы описывают результат этих процессов по истечении какого-то времени (например, пройденный путь). Иными словами, объектами описания при использовании дифференциальных форм являются мгновенные движения, а объектами описания при использовании интегральных форм – результат этих движений.

Таблица 12

Интегральные и дифференциальные формы некоторых естественнонаучных уравнений

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ	ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ	
$\upsilon = \frac{dS}{dt}$	при $\upsilon = const$ $\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t$	при $\upsilon = gt$ $\Delta S = \frac{g\Delta t^2}{2}$
$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	при a = const $\Delta \upsilon = a \cdot \Delta t$	при a = Ct $\Delta\upsilon = \frac{C\Delta t^2}{2}$
$w = \frac{d\varphi}{dt}$	при w = const $\Delta\varphi = w \cdot \Delta t$	при w = Ct $\Delta\varphi = \frac{C\Delta t^2}{2}$
$\frac{dm}{dt} = -km$	при k = const $\frac{m_2}{m_1} = e^{-k\Delta t}$	при k = 2Ct $\frac{m_2}{m_1} = e^{-C\Delta t^2}$

Пример 1. Доказать, что равенство $\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t$ является интегральной формой равенства $\upsilon = dS/dt$, при условии, что $\upsilon = const$.

Решение. После небольшого преобразования предложенного выражения $\upsilon = dS/dt$, получим $dS = \upsilon dt$. Согласно условию, при интегрировании равенства $dS = \upsilon dt$, можно вынести υ за знак интеграла:

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = \upsilon \int_{t_1}^{t_2} dt$$

Откуда

$$S_2 - S_1 = \upsilon(t_2 - t_1)$$

или

$$\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t$$

Следовательно, равенство $\Delta S = \upsilon \cdot \Delta t$ является интегральной формой равенства $dS = \upsilon dt$ при условии, что $\upsilon = const$.

Упражнения.

127. Доказать, что равенство $\Delta \upsilon = a \Delta t$ является интегральной формой равенства $a = d\upsilon/dt$, при условии, что $a = const$.

128. Доказать, что равенство $m_2 / m_1 = e^{-k\Delta t}$ является интегральной формой равенства $dm/dt = -km$, при условии, что $k = const$.

129. При условии, что величины: ε, I, R, ε, C – постоянны, представить в интегральной форме следующие уравнения:

а) $d\Phi = -\varepsilon\, dt$; б) $\dfrac{dW}{dt} = I^2R$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = Cy$; г) $\dfrac{dy}{dx} = -Cy^2$

---

1. Каким образом дифференциальную форму уравнения можно перевести в интегральную? Приведите конкретные примеры.

2. Какие объекты описывают с помощью дифференциальных форм уравнений?

3. Какие объекты описывают с помощью интегральных форм уравнений?

Упражнения к главе III

Продифференцировать функцию y. Найти значение производной и дифференциала при $x = \pi/2$ (130–133).

130. а) $y = 77$; б) $y = 9x$;

в) $y = 5x^3$; г) $y = -3x^{-9}$;

131. а) y = 3sinx; б) y = 2cosx;

в) y = $4x^2$ +7sinx; г) y =$3x^2$ •cosx;

д) y = $\frac{\sin x}{x}$; е) y = $\sin^2 x$

132. а) y =7^{-7} ; б) y =x·0,3;

в) y = $2x^4$; г) y= $-9x^{-3}$;

133. а) y = 5 cosx; б) y = 9 cosx +$2x^4$;

в) y =$2x^3$ •sinx; г) y = $\frac{\cos x}{x}$;

134. Найти неопределённый интеграл функции y, если:

а) y = x^2; б) y = – sin x;

в) y = x^{-2}; г) y = $-\frac{1}{x^2}$

Рассчитать интегралы (135, 136):

135. а) $\int_3^{30} 3x dx$; б) $\int_4^{40} 0{,}25\, dx$;

в) $\int_9^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; г) $\int_2^{3} -3x^{-2} dx$;

136. а) $\int_{1,57}^{3,14} -5 \sin x\, dx$; б) $\int_1^{2} 4x^3 dx$;

в) $\int_2^{3} -\frac{2}{x^3} dx$; г) $\int_0^{2} 5x^4 dx$;

д) $\int_0^{1,57} 2\sin x dx$; е) $\int_0^{\pi/2} (x + \sin x)dx$

137. а) Представить графически функцию y = sinx на отрезке оси абсцисс [-2π; $+2\pi$]. Предлагаемый масштаб:

- по оси ординат в трёх тетрадных клетках одно деление;
- по оси абсцисс в трёх тетрадных клетках $\frac{\pi}{2}$ делений.

б) Построить касательные к функции y = sinx в точках ($-\pi$; 0) и ($\frac{\pi}{2}$; 1).

в) Вычислить площадь, ограниченную линией графика функции y = sinx и отрезком абсциссы [0; π].

138. а) Представить графически функцию y = cosx на отрезке оси абсцисс [-2π; $+2\pi$]. Предлагаемый масштаб:

- по оси ординат в трёх тетрадных клетках одно деление;
- по оси абсцисс в трёх тетрадных клетках $\frac{\pi}{2}$ делений.

б) Построить касательные к функции y = cosx в точках $(-\pi; -1)$ и $(\frac{\pi}{2}; 0)$.

в) Вычислить площадь, ограниченную линией графика функции y =cosx и отрезком абсциссы $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

ГЛАВА IV

КОМБИНАТОРИКА И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 8. Комбинаторика

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий перестановки, сочетания и размещения элементов множества.

Перестановкой *элементов множества называется заданный порядок данных элементов, установленный в данном множестве.*

Для множества, состоящего из n элементов, число перестановок (P_n) рассчитывается по формуле:

$$P_n = n! \qquad (1)$$

где n! (эн факториал) представляет собой произведение натуральных чисел от единицы до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

При этом считается, что $P_0 = 0! = P_1 = 1! = 1$

Важно заметить, что термин «перестановка» в комбинаторике обозначает не процесс, а состояние множеств. То же самое справедливо и по отношению к понятиям: сочетание и размещение. ***Сочетанием*** *называется конечное подмножество* m *конечного множества* n (m < n).

Число сочетаний из n по m (C_n^m) рассчитывается по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (2)$$

Поскольку

$$n! = (n-m)! \cdot (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

то

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \qquad (3)$$

В практических расчетах наиболее удобна формула (3)

Размещением *называется конечное подмножество* m *конечного множества* n, *с заданным порядком элементов, установленном в подмножестве* m. Число размещений из n по m (A_n^m) рассчитывается по формуле:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (4)$$

Поскольку

$$n! = (n-m)! \cdot (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

то

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \qquad (5)$$

В практических расчетах наиболее удобна формула (5)

Размещением с повторениями *называется конечное подмножество т конечного множества* n, *с заданным порядком элементов, установленном в подмножестве* m, *среди которых могут быть одинаковые.* Число размещений с повторениями из n по m (A'^{m}_{n}) рассчитывается по формуле:

$$A'^{m}_{n} = n^m \qquad (6)$$

Пример 1. Рассчитать число перестановок P_3, возможных при распределении трёх человек на одной скамейке.

Решение. Согласно формуле (1)

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Следовательно

$$P_3 = 6$$

В данном случае правильность решения можно легко проверить простым перебором вариантов перестановок. Действительно, условно обозначив трёх человек цифрами 1, 2, 3, все возможные варианты можно представить следующим образом:

I – 1, 2, 3;

II – 2, 3, 1;

III – 3, 1, 2;

IV – 3, 2, 1;

V – 1, 3, 2;

VI – 2, 1, 3.

То есть, число возможных перестановок для множества, состоящего из трёх элементов, действительно, равно шести.

Пример 2. Если из трёх человек (1, 2, 3), поступивших в музыкальный колледж, только двое его окончат, то кто из них? Рассчитать количество возможных вариантов ответа.

Решение. В соответствии с формулой (2)

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Следовательно

$$C_3^2 = 3$$

Тот же результат получим, используя формулу (3)

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$$

В данном случае величины (n –1) и (n – m +1) формулы (3) совпадают:

$$n - 1 = n - m + 1$$

потому что 3–1 = 3–2+1.

Правильность полученного результата проверим перебором возможных вариантов:

I – 1, 2;

II – 2, 3;

III – 1, 3

То есть на вопрос – кто конкретно закончит музыкальный колледж? – существует только три варианта ответа.

Пример 3. Если из трёх человек (1, 2, 3), поступивших в музыкальный колледж, только двое его окончат, причём один с отличием, а другой с тройками, то кто станет отличником и кто троечником? Рассчитать количество возможных вариантов ответа.

Решение. В соответствии с формулой (4)

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Следовательно

$$A_3^2 = 6$$

Тот же результат получим, используя формулу (5)

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Здесь, также как и в предыдущем случае

$$(n - 1) = (n - m + 1)$$

Правильность полученного результата проверим перебором возможных вариантов. Подразумевая, что первая арабская цифра подразумевает отличника, а вторая – троечника, эти варианты можно представить следующим образом:

I – 1, 2;

II – 2, 1;

III – 2, 3;

IV – 3, 2;

V – 1, 3;

VI – 3, 1.

То есть, число размещений из трёх по два равно шести.

Пример 4. Если после вступительных экзаменов, на троих друзей (1, 2, 3) выдали только два студенческих билета в разные учебные заведения – музыкальный колледж и государственный университет, то кто поступил куда? Рассчитать количество возможных вариантов ответа.

Решение. Согласно формуле (6)

$$A'^{\,2}_{3} = 3^2 = 9$$

То есть, число размещений с с повторениями из трёх по два равно девяти. Правильность полученного результата проверим перебором возможных вариантов. Подразумевая, что первая цифра обозначает студента музыкального колледжа, а вторая студента госуниверситета, эти варианты можно представить следующим образом:

I – 1, 2;

II – 2, 1;

III – 2, 3;

IV – 3, 2;

V – 1, 3;

VI – 3, 1.

Кроме того, не следует исключать и возможности поступления кого-то из них сразу в два учебных заведения:

VII – 1, 1;

VIII – 2, 2;

IX – 3, 3

Таким образом, количество возможных вариантов ответа равно девяти.

Упражнения.

139. Каким количеством способов можно расставить на одной полке 7 разных книг?

140. Из восьми шахматистов равного мастерства необходимо составить команду, в которую входило бы только три человека. Сколько существует способов составления такой команды?

141. Рассчитать количество способов, которыми можно назначить трёх человек на три различные должности из семи одинаково достойных кандидатов.

142. Рассчитать количество способов, которыми можно назначить двух человек на две различные должности из пяти одинаково достойных кандидатов с учётом возможности совмещения этих должностей одним кандидатом.

§ 9. Элементы теории вероятностей

В теории вероятностей различают события: достоверные, невозможные, случайные, совместные, несовместные, единственно возможные, равновозможные.

Событие, которое обязательно *произойдёт*, при выполнении некоторого комплекса условий S, называется *достоверным*.

Например, если внутри помещения, расположенного на земле, подбросить монетку и не ловить, то она обязательно упадёт на пол. В этой ситуации падение монетки будет событием достоверным. Если монетку подбросить внутри помещения космической станции, находящейся на околоземной орбите, то монетка может и не упасть на пол, поскольку не выполнено условие расположения помещения на земле.

Событие, которое наверняка *не произойдёт* при выполнении некоторого комплекса условий S называется *невозможным*.

Например, при сбрасывании камня со скалы, его самопроизвольное движение вверх является невозможным.

Событие, которое может произойти, но может и не произойти, называется *случайным.*

Например, подброшенная монетка может упасть на пол «решкой», а может и не решкой – «орлом». Если, всё-таки, упала «решкой», то это событие случайное. Причём, падение «решкой» исключает падение «орлом». В этих условиях падение «решкой» и падение «орлом» считаются событиями *несовместными.* В других условиях, например, при одновременном подбрасывании двух монет, эти события могут стать *совместными*. События, при которых появление одного из них исключает одновременное появление других, называются *несовместными.*

Падение «орлом» или «решкой» являются событиями *единственно возможными.* Никаким другим образом монетка упасть не может.

Кроме того, эти события являются *равновозможными*, поскольку нет оснований предполагать выпадение «решки» более возможным, нежели «орла» или наоборот.

Вместе с тем, все события в теории вероятностей считаются исходом некоторого *испытания.* Во всех рассмотренных примерах таким испытанием являлось подбрасывание монетки. Если в результате испытания наступает событие А, то такой исход называется *благоприятным* для события А.

Классической вероятностью события А [P(A)] называется отношение числа благоприятных исходов (m) к общему числу (n) несовместных единственно возможных и равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Величину n иногда называют полем элементарных исходов

Из этого определения вытекают следующие основные свойства классической вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна 1;
2. Вероятность невозможного события равно 0;
3. Вероятность случайного события заключена между 0 и 1.

Статистической вероятностью (P'(A)) называется предел отношения числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов (n') при неограниченном количестве испытаний:

$$P'(A) = \lim_{n' \to \infty} \frac{m}{n'}$$

Например, с классической точки зрения вероятность рождения мальчика не должна отличаться от вероятности рождения девочки. Действительно, поле элементарных исходов (мальчик и девочка) равно двум (n = 2). Благоприятный исход только один (m = 1). Следовательно для обоих случаев

$$P = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Однако, во все времена, во всех странах, в среднем, на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков. То есть, статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,514. Практически установленная статистическая вероятность свидетельствует о том, что рождение мальчика и рождение девочки не являются событиями равновозможными, а значит, применение формулы классической вероятности в данном случае некорректно.

Но классическая и статистическая вероятности выпадения «орлом» подброшенной монетки совпадают.

В дальнейшем, под термином «вероятность» будет подразумеваться только вероятность классическая.

Пример 1. Игральную кость (рис. 48) собираются подбросить 6 раз. Какова вероятность Р того, что она будет падать по очереди числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

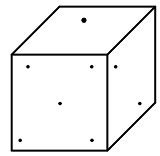


Рис. 48. Игральная кость, представляющая собой куб, каждая грань которого символизирует число, равное количеству точек.

Решение. В данном случае, возможны *повторные* выпадения одних и тех же цифр. То есть, нельзя исключать даже таких вариантов исхода:

1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6

Поэтому поле элементарных исходов представляет собой размещение с повторениями из 6 по 6:

$$n = A'^{6}_{6} = 6^6$$

Поскольку только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

то

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{6^6} \approx 2{,}14 \cdot 10^{-5}$$

Следовательно

$$P \approx 2{,}14 \cdot 10^{-5}$$

Пример 2. На клавиатуре компьютера 100 клавиш. Из них 33 клавиши являются буквенными и настроенными на русский алфавит. Обезьянка стала случайно нажимать клавиши. Оцените вероятность P того, что, нажав 33 раза, она напишет начало произведения Л.Н. Толстого «Война и мир».

Решение. Вполне возможно, что обезьянка будет нажимать на одни и те же клавиши. Поэтому

$$n = A'^{33}_{100} = 100^{33} = 10^{66}$$

При этом только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

Значит

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{10^{66}} = 10^{-66}$$

Следовательно

$$P = 10^{-66}$$

Пример 3. Биохимическим носителем информации обо всех белках, вырабатываемых организмом, являются его дезоксирибонуклеиновые кислоты (ДНК), молекулы которых представляют собой две сплетённые цепи структурных звеньев, называемых нуклеотидами. Чтобы стал вырабатываться новый белок, необходимый данному организму для выживания в изменившихся условиях, последовательность нуклеотидов цепи в одной из ДНК, состоящей из 200 001 нуклеотида, должна измениться таким образом, чтобы поменялись местами соседние нуклеотиды[6]:

- пятисотый и пятьсот первый;
- девятьсот второй и девятьсот третий;
- тысяча четвёртый и тысяча пятый.

Оценить вероятность такого события при облучении организма, вызывающем только три одновременных произвольных перестановки различных пар соседних нуклеотидов.

Решение. В цепи состоящей из 200 001 нуклеотида возможно 200 000 перестановок между соседними звеньями. Поэтому, в данном случае поле элементарных исходов равно количеству сочетаний из 200 000 по 3:

$$n = C^3_{2\cdot 10^5} = \frac{2\cdot 10^5!}{3!(200000-3)!} = \frac{199998\cdot 199999\cdot 200000}{6} \approx 1{,}33\cdot 10^{15}$$

При этом только одно из этих размещений является благоприятным исходом:

$$m = 1$$

Поэтому

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{C^3_{2\cdot 10^5}} \approx \frac{1}{1{,}33\cdot 10^{15}} \approx 7{,}5\cdot 10^{-16}$$

Следовательно

$$P \approx 7{,}5\cdot 10^{-16}$$

То есть, вероятность события пренебрежимо мала. Таким образом, с точки зрения вероятности, теория эволюции, гласящая, что живые организмы приспосабливаются к меняющимся внешним условиям благодаря СЛУЧАЙНЫМ мутациям, из которых выживают наиболее приспособленные, оказывается несостоятельной.

Упражнения.

143. Рассчитать вероятность:

- падения «орлом» однократно подброшенной монетки;
- выпадения числа 5 при однократном подбрасывании игральной кости.

---

[6] Изменения структуры ДНК называются мутациями.

144. Пенсионеру для расчёта за проезд необходимо достать из кармана одну пятирублёвую монету. Но в кармане у него, помимо двух пятирублёвых монет, находятся также три двухрублёвые монеты и пять рублёвых монет. Какова вероятность того, что пенсионер достанет нужную монету, если на ощупь он не чувствует разницы в их размерах?

145. На клавиатуре компьютера 100 клавиш. При этом буквенные клавиши настроены на русский алфавит. Обезьянка стала случайно нажимать клавиши. Оцените вероятность того, что она:

- нажав только один раз, попала на букву «ж»;
- нажав 2 раза, написала слово «уж»;
- нажав 3 раза, написала слово «муж»;
- нажав 33 раза, написала русский алфавит.

146. Для ДНК, рассмотренной в третьем примере решения задач оценить вероятность перемены местами двух соседних *заданных* нуклеотидов при облучении организма, вызывающем одну произвольную перестановку только в этой ДНК.

Упражнения к главе IV

147. В лотерее миллионного тиража предусмотрено сто шесть выигрышей. Один из них составляет 100 000 рублей, пять выигрышей по 10 000 рублей и сто выигрышей по 1000 рублей. Какова вероятность того, что покупатель, приобретающий один лотерейный билет, выиграет:

а) 100 000 рублей

б) 10 000 рублей

в) 1000 рублей.

148. Какова вероятность того, что покупатель, приобретающий два лотерейных билета тиража, рассмотренного в предыдущем примере, выиграет одновременно:

а) 100 000 рублей и 10 000 рублей

б) 100 000 рублей и 1000 рублей.

в) 10 000 рублей и 1000 рублей.

149. Рассчитать вероятность выпадения числа 5 при однократном подбрасывании игральной кости.

150. Игральную кость собираются подбросить 2 раза. Какова вероятность того, что она будет падать по очереди числами 5 и 6.

151. Представить нормализованной записью возможное число перестановок множества, состоящего из семи элементов.

152. Рассчитать:

- число сочетаний из семи по два;
- число размещений из семи по два;
- число размещений с повторениями из семи по два.

ГЛАВА V
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрия – это раздел геометрии, изучающий свойства, фигур, тел и векторов в пространстве. При этом подразумевается, что:

- фигурами в пространстве являются: точка, прямая и плоскость;
- тело – это замкнутая часть пространства;
- вектор – величина, характеризующаяся направлением. Направленный отрезок *расстояния* – это радиус-вектор. Например, скорость движения пешехода по прямой в конкретном направлении является вектором (или векторной величиной), а путь, который преодолеет этот пешеход в этом направлении за определённый промежуток времени – радиус-вектором. Радиус-вектор, начало которого совпадает с некоторой фиксированной точкой О, а конец - с точкой М называется радиус – вектором точки М. Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы) или противоположные.

§10. Векторы в пространстве

При изучении Вами планиметрии рассматривались только векторы, лежащие на плоскости, которые описывались двумя координатами x и y, называемыми, абсцисса и ордината соответственно, либо суммой координатных векторов $\bar{i}$ и $\bar{j}$, где $\bar{i}$ - единичный вектор оси x, $\bar{i}$ (1; 0), $\bar{j}$ - единичный вектор оси y, $\bar{j}$ (0; 1) (рис. 17).

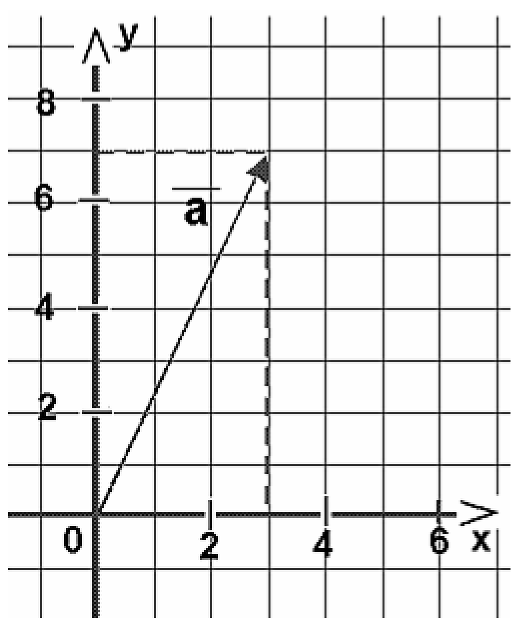


Рис. 17. Вектор $\bar{a}$ (3; 7), представленный в координатах плоскости, $\bar{a} = 3\,\bar{i} + 7\,\bar{j}$

То есть, использовалась система координат, которую называют плоской или двухмерной системой координат.

В стереометрии вектор описывают тремя координатами x, y, z, последняя из которых называется аппликатой. Либо суммой координатных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, где $\bar{i}$ (1; 0; 0), $\bar{j}$ (0; 1; 0), $\bar{k}$ (0 ; 0; 1) . То есть, $\bar{k}$ представляет собой единичный вектор оси z. Ось аппликат располагается перпендикулярно плоскости, образуемой осями x и y, при этом ось x направляют к читателю, а оси y и z оказываются лежащими на плоскости рисунка (рис.18, 19). Такая система координат называется трёхмерной системой координат.

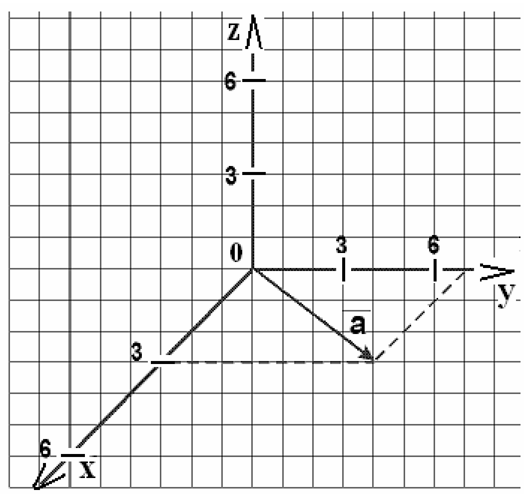


Рис. 18. Вектор $\bar{a}$ (3; 7; 0), представленный в трёхмерной системе координат, $\bar{a} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 0\bar{k}$

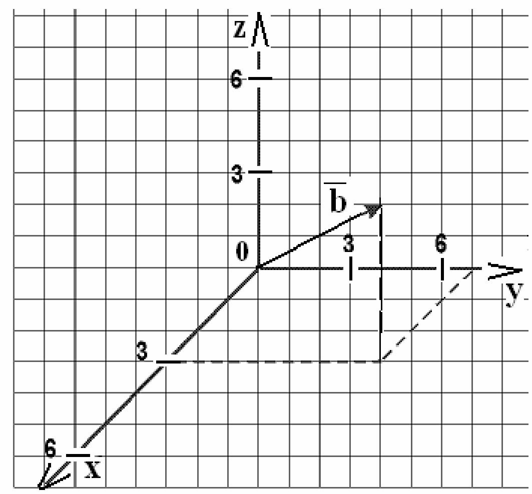


Рис. 19 . Вектор $\bar{b}$ (3; 7; 5), $\bar{b} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$

Для удобства изображения некоторых рисунков, за единицу оси абсцисс условно будем принимать *диагональ* клетки тетради, хотя она больше стороны клетки в $\left|\sqrt{2}\right|$ раз. Масштабы различных осей координат могут иногда не совпадать. Векторы, лежащие в плоскости рисунка или направленные к читателю, будем обозначать сплошными линиями.[7] Векторы, лежащие за плоскостью рисунка – пунктиром.[8] (Рис. 20)

---

[7] Для таких векторов x ≥ 0

[8] В этом случае x < 0

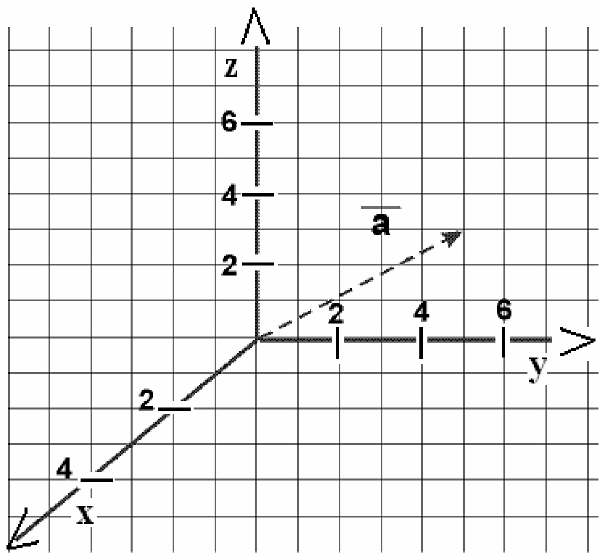


Рис. 20 . Вектор $\overline{a}$ (–2; 3; 1)

Следует иметь в виду, что существенным недостатком представления пространственного вектора на плоскости является практическое совпадение изображения некоторых векторов, имеющих различные координаты. Например, вектор $\overline{(0;4;2)}$ займет на рис. 19 то же положение, что и вектор $\overline{b}$ (3; 7; 5), хотя порядок построения первого будет существенно иным.

Длина вектора[9] в пространстве равна корню квадратному из суммы квадратов трёх его координат

$$|\overline{b}| = \left|\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right|$$

Например, для вектора, представленного на рис. 19

$$|\overline{b}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2} = \left|\sqrt{83}\right|$$

Произведением вектора $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ на число k называется вектор с координатами

$(\overline{ka_1; ka_2; ka_3})$.

[9] Длина вектора $\overline{b}$ обозначается $|\overline{b}|$ или b.

Пример 1. Представить графически вектор $\bar{m}$ (2; 5; 0)

а) в плоской системе координат;

б) в трёхмерной системе координат.

Решение 1. Решение подобных задач оформляется рисунками (рис 21).

а) Представление вектора в плоской системе координат возможно только в том случае, если хотя бы одна из трёх координат равна нулю (рис. 26 а).

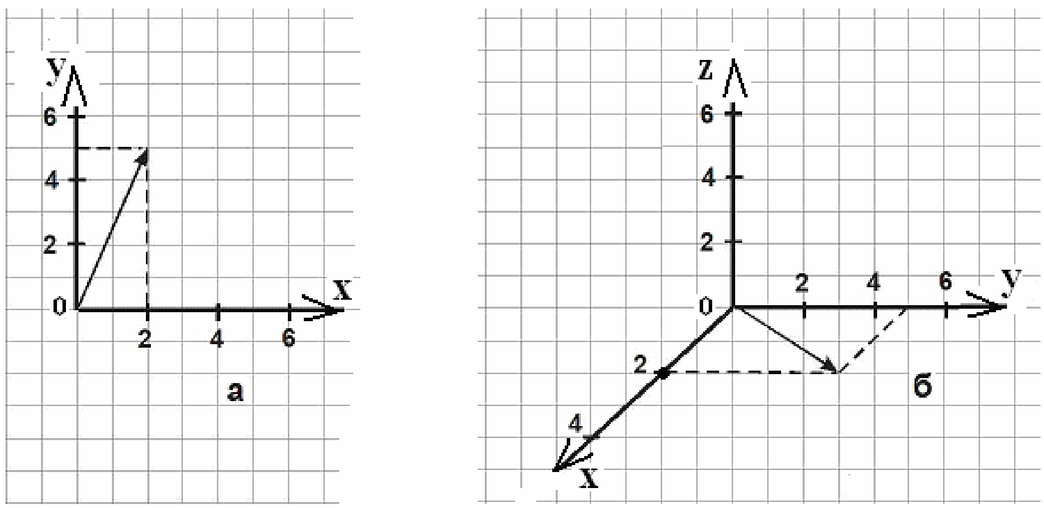


Рис. 21. Вектор $\bar{m}$ (2; 5; 0), представленный в плоской системе координат (а) и в трёхмерной системе координат (б).

б) Для построения вектора $\overline{(x;y;z)}$ в трёхмерной системе координат предлагается следующий алгоритм.

1). Построить координатные оси X, Y, Z как это показано на рис. 21 (б).

2). На оси X отметить точку с координатами (x; 0; 0). В данном случае (2; 0; 0).

3) От отмеченной точки провести, параллельно оси y, вспомогательный отрезок, длина которого равна по величине второй координате. Если вторая координата больше нуля, то отрезок проводится вправо, если меньше нуля, то влево. В данном случае вторая координата равна пяти, поэтому, в соответствии с выбранным масштабом, вспомогательный отрезок длиной в пять клеток проведён на рис. 21 (б) вправо. Однако вспомогательные отрезки, обозначенные на рисунке пунктиром, лучше проводить в уме, чтобы не загромождать рисунок.

4). От конца полученного отрезка провести, параллельно оси z, отрезок, длина которого равна третьей координате. Если третья координата больше нуля, то отрезок проводится вверх, если меньше нуля, то вниз. В данном случае третья координата равна нулю, поэтому, конец уже отрезка является концом вектора $\bar{m}$ (2; 5; 0), проводимого из начала координат.

5). Из начала координат провести вектор $\bar{m}$ (2; 5; 0).

Пример 2. Вектор $\bar{n}$ (2; 5; 9) представить суммой координатных векторов, а также графически.

Решение. Под представлением вектора $\bar{n}$ (2; 5; 9) суммой координатных векторов подразумевается запись

$$\bar{n} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}$$

в которой $\bar{i}$ - единичный вектор оси Х, $\bar{j}$ - единичный вектор оси У, $\bar{k}$ - единичный вектор оси Z.

Графическое представление вектора $\bar{n}$ осуществляется по алгоритму предыдущего примера.

1). Построим координатные оси Х, У, Z (рис. 22).

2) На оси Х отметим точку с координатами (2;0;0)

3) От отмеченной точки проведём вправо вспомогательный отрезок длиной 5.

4) От конца полученного отрезка проведём вверх, параллельно оси z, отрезок, длиной 9.

5) Проведём вектор $\bar{n}$ (2; 5; 9) из начала координат в конец последнего вертикального отрезка.

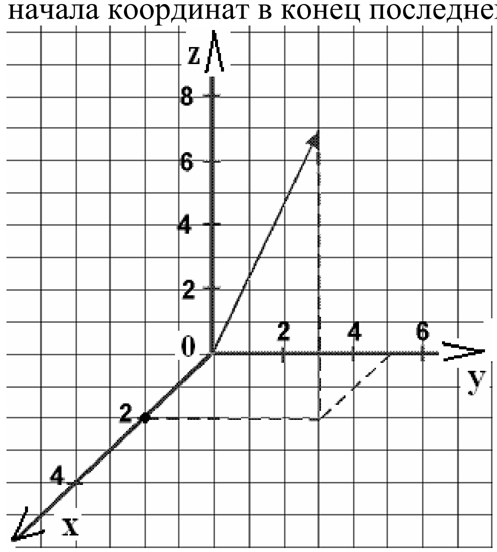


Рис.22. Вектор $\bar{n}$ (2; 5; 9). (Вспомогательные линии, обозначенные на рисунке пунктиром, лучше проводить в уме, чтобы не загромождать рисунок)

Пример 3. Определить координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{c} = k\bar{a}$, $k = 5$; $\bar{a}$ (–3; 2; 0,1).

Решение. Поскольку умножение вектора на число означает умножение на это число координат данного вектора, то

$$\bar{c} = k\bar{a} = 5 \cdot (-3)\ \bar{i} + 5 \cdot 2\bar{j} + 5 \cdot 0{,}1\bar{k} = -15\bar{i} + 10\bar{j} + 0{,}5\ \bar{k}$$

Следовательно

$$\bar{c} = -15\bar{i} + 10\bar{j} + 0{,}5\ \bar{k}$$

или

$$\bar{c}\ (-15;\ 10;\ 0{,}5)$$

Упражнения.

153. Представить вектор графически в плоской и трёхмерной системах координат:

а) $\overline{n}$ (1; 4; 0) ; б) $\overline{l}$ (–2; 5; 0) ;

в) $\overline{p}$ (–1; –3; 0) ; г) $\overline{q}$ (2; –3; 0) .

154. Представить вектор суммой координатных векторов, а также графически:

а) $\overline{n}$ (1; 4; 5); б) $\overline{l}$ (–2; 5; –7);

в) $\overline{p}$ (–1; –3; 2) ; г) $\overline{q}$ (2; –3; 2);

д) $\overline{s}$ (–1; – 4; –7); е) $\overline{r}$ (–1; – 4; 5).

155. Определить координаты вектора $\overline{c}$, если $\overline{c} = k\overline{a}$, при этом:

а) $\overline{a}$ (2; 9; 7), k = 3; б) $\overline{a}$ (1; – 0,5; 4), k = –2

в) $\overline{a}$ (–3; 2; –1), k = 1,5; г) $\overline{a}$ (5; – 6; 8), k = 0,2

§ 11. Сложение и вычитание векторов в пространстве

Многие действия над векторами в пространстве выполняются точно также как и над векторами на плоскости.

Графическое сложение векторов производится по правилу треугольника и по правилу параллелограмма (рис. 23, 24).

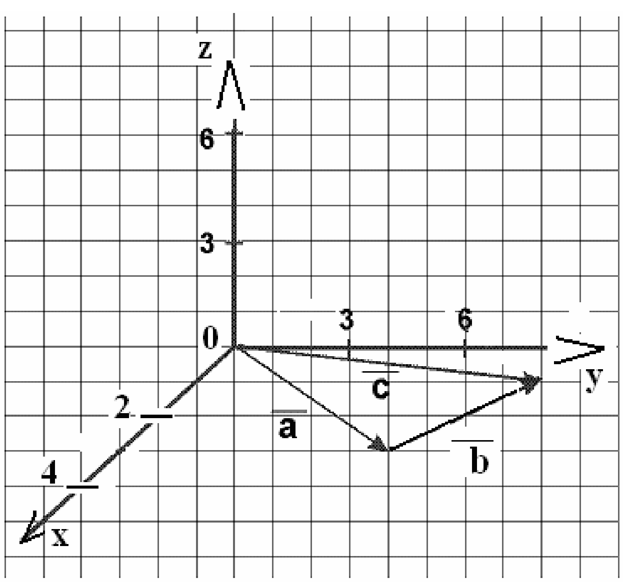


Рис. 23. Графическое сложение векторов $\overline{a}$ (3; 7; 0) и $\overline{b}$ (3; 7; 5) по правилу треугольника: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

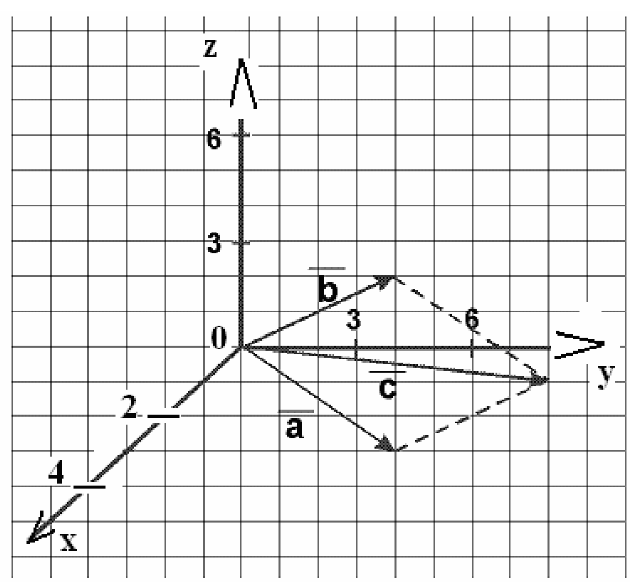


Рис. 24. Графическое сложение векторов $\overline{a}$ (3; 7; 0) и $\overline{b}$ (3; 7; 5) по правилу параллелограмма: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

Координаты суммы векторов определяются сложением соответствующих координат слагаемых векторов:

$$\bar{a}\ (a_1;\ a_2;\ a_3) + \bar{b}\ (b_1;\ b_2;\ b_3) = \bar{c}\ (a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$$

Например, если вектор $\bar{c}$ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведённых на рисунках 18 и 19, то

$$\bar{a}\ (3;\ 7;\ 0) + \bar{b}\ (3;\ 7;\ 5) = \bar{c}\ (3+3;\ 7+7;\ 0+5) = \bar{c}\,(6;\ 14;\ 5)$$

Графическое сложение этих векторов представлено на рис. 23, 24.

Пример 1. Рассчитать координаты и абсолютное значение скорости $\bar{\upsilon}$ движения лодки, направляемой к берегу со скоростью $\bar{\upsilon}_1$ (2,5; 0,5; 0), если скорость течения реки $\bar{\upsilon}_2$ (0,5; 1,5; 0) . Координаты векторов скорости приведены в м/с. Представить сложение векторов $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$ графически в плоской системе и в трёхмерной системе координат.

Решение. Вектор $\bar{\upsilon}$ представляет собой сумму векторов $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$:

$$\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 + \bar{\upsilon}_2 = 2{,}5\,\bar{i} + 0{,}\,5\,\bar{j} + 0\,\bar{k} + 0{,}5\,\bar{i} + 1{,}5\,\bar{j} + 0\,\bar{k} = 3\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + 0\,\bar{k}$$

Следовательно

$$\bar{\upsilon} = 3\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + 0\,\bar{k}$$

или

$$\bar{\upsilon} = (3;\ 2;\ 0)$$

Абсолютное значение скорости $\bar{\upsilon}$ движения лодки, с геометрической точки зрения, представляет собой длину вектора $\bar{\upsilon}$.

$$|\bar{\upsilon}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}\,61 \text{ (м/с)}$$

$$\boxed{|\bar{\upsilon}| \approx 3{,}\,61 \text{ м/с}}$$

Графическое сложение векторов приведено на рис. 25.

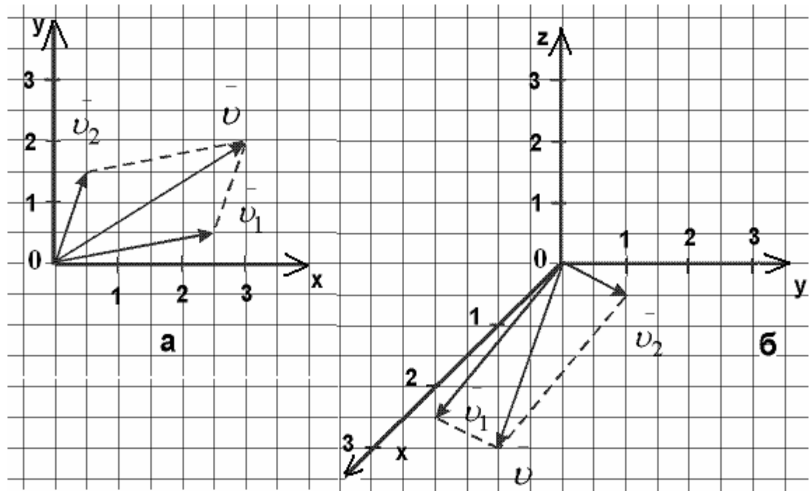


Рис. 25. Графическое сложение векторов $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$ по правилу параллелограмма в плоской системе координат (а) и в трёхмерной системе координат (б).

Пример 2. Рассчитать координаты и длину вектора $\bar{p}$, являющегося суммой векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если

$\bar{m} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}$; $\bar{n} = \bar{i} - 4\bar{j} - 2$. Представить все три вектора графически.

Решение. Поскольку суммирование векторов означает суммирование соответствующих координат, то

$$\bar{p} = \bar{m} + \bar{n} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k} + \bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k} = 3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$$

Следовательно:

$$\bar{p} = 3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$$

или

$$\bar{p}(3; 1; 7)$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат

$$|\bar{p}| = \left|\sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2}\right| = \left|\sqrt{59}\right| \approx 7{,}68$$

$$|\bar{p}| \approx 7{,}68$$

Графическое представление векторов $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ приведено на рис.26.

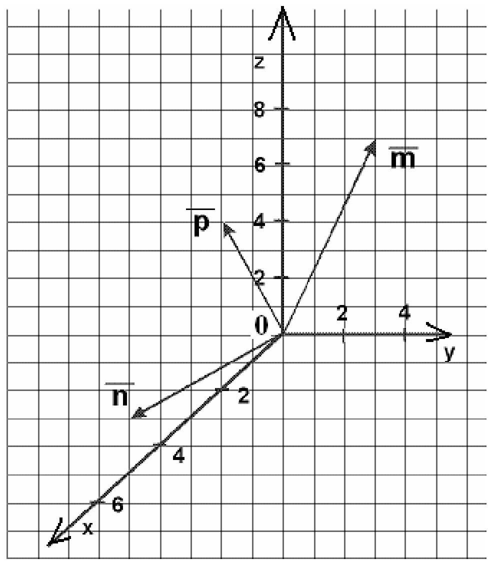


Рис.26. Векторы $\overline{m}$ (2; 5; 9), $\overline{n}$ (1; – 4; –2); $\overline{p}$ (3; 1; 7)

Пример 3. Рассчитать координаты и длину вектора $\overline{p}$, являющегося разностью векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если $\overline{m} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$; $\overline{n} = \overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Представить все три вектора графически.

Решение. Разность векторов означает разность соответствующих координат:

$$\overline{p} = \overline{m} - \overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k} - \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} = \overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$$

Следовательно

$$\overline{p} = \overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$$

или

$$\overline{p}\ (1;\ 3;\ 7)$$

Длину вектора определяем аналогично предыдущему примеру

$$\left|\overline{p}\right| = \left|\sqrt{1^2 + 3^2 + 7^2}\right| = \left|\sqrt{59}\right| \approx 7{,}68$$

$$\left|\overline{p}\right| \approx 7{,}68$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 27.

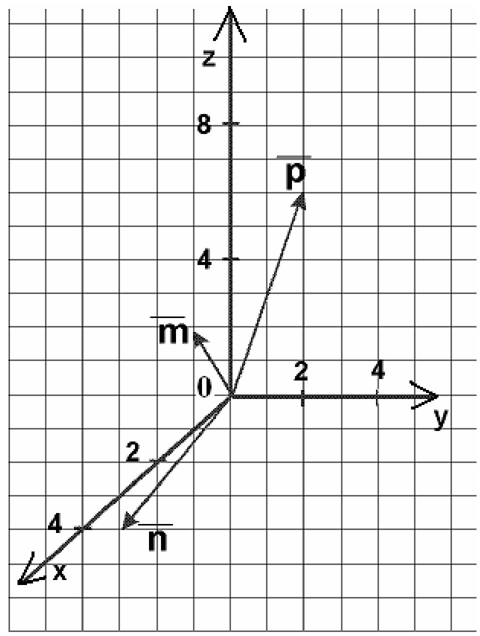


Рис.27. Векторы $\bar{m}$ (2; 1; 4), $\bar{n}$ (1; –2; –3); $\bar{p}$ (1; 3; 7)

Упражнения.

156. Рассчитать координаты и длину вектора $\bar{d}$, являющегося суммой векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если

$\bar{b} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 7\bar{k}$; $\bar{c} = -4\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$

Представить все три вектора графически.

157. Рассчитать координаты и длину вектора $\bar{a}$, являющегося разностью векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, приведённых в предыдущем упражнении. Представить вектор $\bar{a}$ графически, на рисунке, выполненном Вами при решении предыдущего упражнения.

158. Рассчитать координаты и абсолютное значение скорости $\bar{\upsilon}$ полёта пчелы, возвращающейся к улью со скоростью $\bar{\upsilon}_1$ (2,5; 0,5; –1,0), если скорость ветра $\bar{\upsilon}_2$ (1,5; 1,5; 0) . Размерность координат векторов скорости подразумевается в системе СИ. Представить вектор $\bar{\upsilon}$ графически.

§12. Скалярное произведение векторов в пространстве

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ (a_1; a_2; a_3) и $\bar{b}$ (b_1; b_2; b_3) называется сумма:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

при этом

$$P = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$$

где α – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Обозначается $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $\bar{a}\,\bar{b}$. В научной литературе используют также такие обоначения: $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle$ или $(\bar{a},\bar{b})$ Значения косинусов и синусов некоторых углов приведены в таблице 13.

Таблица 13

Значения косинусов и синусов некоторых углов.

α / Функция α	0^o (0π)	30^o ($\pi/6$)	36^o ($\pi/5$)	45^o ($\pi/4$)	60^o ($\pi/3$)	90^o ($\pi/2$)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Иногда при решении задач удобно пользоваться тригонометрическими тождествами (1)–(9):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (4)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (5)$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (6)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (7)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (8)$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \qquad (9)$$

Скалярные произведения широко используются в физике, например для расчётов работы A, совершённой силой $\bar{F}$ при перемещении тела вдоль радиус – вектора $\bar{s}$:

$$A = |\bar{F}|\cdot|\bar{s}|\cdot\cos\alpha,$$

где $|\bar{F}|$ и $|\bar{s}|$ соответственно абсолютные значения силы и радиус – вектора, α – угол между этими двумя векторами (рис.28).

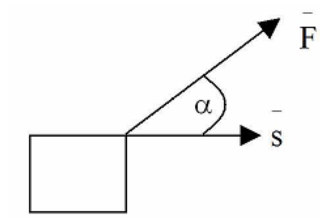


Рис. 28. Сила $\bar{F}$, перемещающая тело в направлении $\bar{s}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол α между которыми составляет 30°. При этом $|\bar{a}| = 2\sqrt{3}$; $|\bar{b}| = 7$.

Решение. Согласно определению скалярного произведения

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha = 2\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21.$$

Следовательно

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 21$$

Пример 2. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}\ (3; 4; 0)$ и $\bar{d}\ (-2; 1; 0)$. Представить оба вектора в плоской системе координат и в трёхмерной системе координат.

Решение. В данном случае векторное произведение следует представить как сумму произведения соответствующих координат

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2$$

Следовательно

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = -2$$

Графическое представление векторов приведено на рис.29.

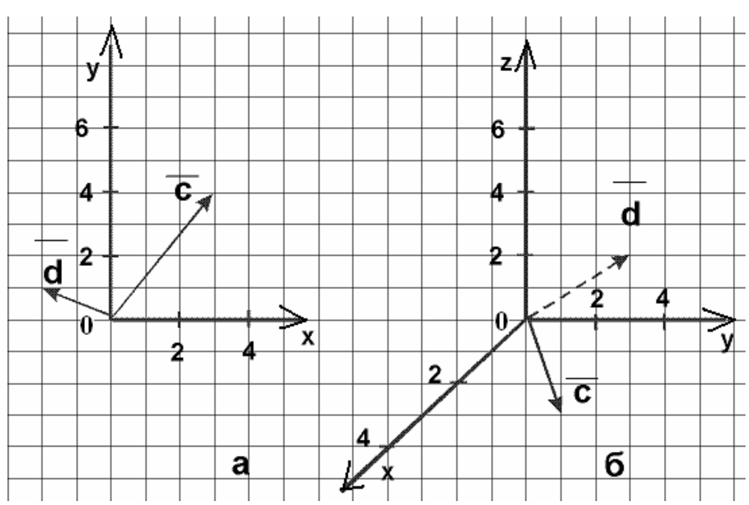


Рис. 29. Векторы $\bar{c}\ (3; 4; 0)$ и $\bar{d}\ (-2; 1; 0)$ в плоской системе координат (а) и в трёхмерной системе координат (б).

Пример 3. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ (1; –2; 3) и $\bar{b}$ (2; 3; 7). Представить оба вектора графически.

Решение. Согласно определению скалярного произведения

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 17$$

Следовательно

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 17$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 30.

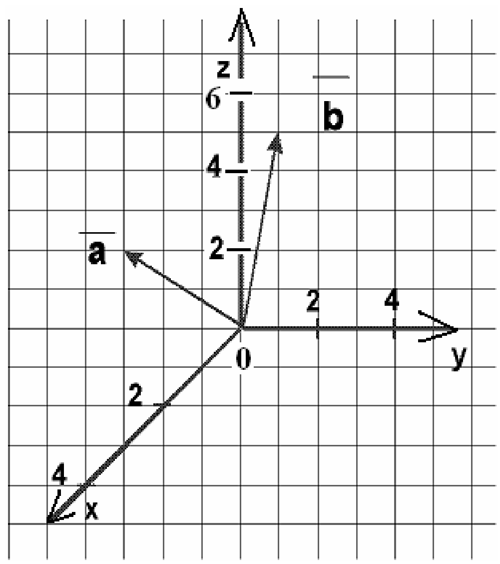


Рис. 30. Векторы $\bar{a}$ (1; –2; 3) и $\bar{b}$ (2; 3; 7).

Упражнения

159. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ угол между которыми составляет 60°, если

а) $|\bar{c}| = 4$, $|\bar{d}| = 15$; б) $|\bar{c}| = 9$; $|\bar{d}| = 2$;

г) $|\bar{c}| = 6$; $|\bar{d}| = 5$; д) $|\bar{c}| = 8$; $|\bar{d}| = 3$

160. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$, угол между которыми составляет 30°.

а) $|\bar{m}| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $|\bar{n}| = 7$; б) $|\bar{m}| = 11$, $|\bar{n}| = 5 \cdot \sqrt{3}$;

в) $|\bar{m}| = \sqrt{3}$, $|\bar{n}| = 8$; г) $|\bar{m}| = 8$, $|\bar{n}| = \sqrt{3}$;

161. Вычислить скалярное произведение Р векторов $\bar{a}\ (1; -2;\ 2)$ и $\bar{b}\ (-0{,}5; -3; 2)$. Оба вектора представить графически.

162. Пользуясь тождествами (1) – (4) определить: sin 105^o, cos 105^o, sin 15^o, cos15^o.

163. Вычислить работу (А), совершённую силой $\bar{F}$ перемещением тела вдоль радиус-вектора $\bar{s}$, если $|\bar{F}|$ = 70 Ньютон (70 Н), $|\bar{s}| = \sqrt{2}$ м, 1Н·1м ≡ 1Джоуль (1Дж). При этом угол между радиус-вектором и направлением приложенной силы составлял:

а) 15^o; б) 36^o

в) 45^o г) 105^o.

164. Проверьте справедливость тождеств (5) – (8) для α = 60^o.

165. Пользуясь тождеством (8), вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$, если $|\bar{c}|$ = 4, $|\bar{d}|$ = 3, а синус половины угла, образуемого этими векторами равен одной второй.

166. Пользуясь тождеством (5), вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$, если $|\bar{c}|$ = 3, $|\bar{d}|$ = 4, а синус угла, образуемого этими векторами равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

167. Вычислить работу (А), совершённую силой $\bar{F}\ (10; 15;\ 3)$ перемещением тела вдоль радиус-вектора $\bar{s}\ (3; 2; 5)$, подразумевая, что сила измеряется в Ньютонах, координаты радиус-вектора в метрах.

168. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{f}$ и $\bar{q}$. Не строя график, определить угол между этими векторами.

а) $\bar{f}\ (2; 0; -3)$, $\bar{q}\ (0; 5; 0)$; б) $\bar{f}\ (3; -7; 10)$, $\bar{q}\ (5; 2; -0{,}1)$;

в) $\bar{f}\ (-4; 6; 20)$, $\bar{q}\ (3; 2;\ 0)$; г) $\bar{f}\ (3; 0; 0)$, $\bar{q}\ (2;\ 2\sqrt{3}; 0)$.

§13. Векторное произведение

Над векторами в пространстве возможно ещё одно действие, которое неосуществимо в рамках плоской системы координат и которое называется *векторным произведением.*

Вектор $\bar{c}$ *называется векторным произведением векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, *если он перпендикулярен плоскости, образуемой этими векторами и направлен от наблюдателя, воспринимающего поворот от* $\bar{a}$ *к* $\bar{b}$ *через меньший угол как вращение по часовой стрелке, при этом*

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \alpha$$

где α – угол между векторами $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$. Обозначается $\bar{c} = [\,\bar{a}\ \bar{b}\,]$ или $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ (рис.31).

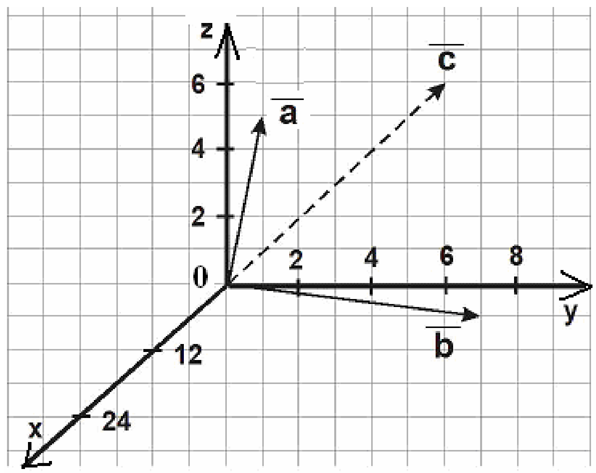


Рис. 31. Иллюстрация векторного произведения $\bar{c} = [\,\bar{a}\ \bar{b}\,]$: векторы $\bar{a}$ (0; 1; 5) и $\bar{b}$ (0; 7; –1) лежат на плоскости рисунка, вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен *от* читателя.

Существенной особенностью векторного произведения является отсутствие свойства переместительности, то есть $[\,\bar{a}\ \bar{b}\,] \neq [\,\bar{b}\ \bar{a}\,]$. В данном случае $[\,\bar{a}\ \bar{b}\,] = -[\,\bar{b}\ \bar{a}\,]$ (рис.32)

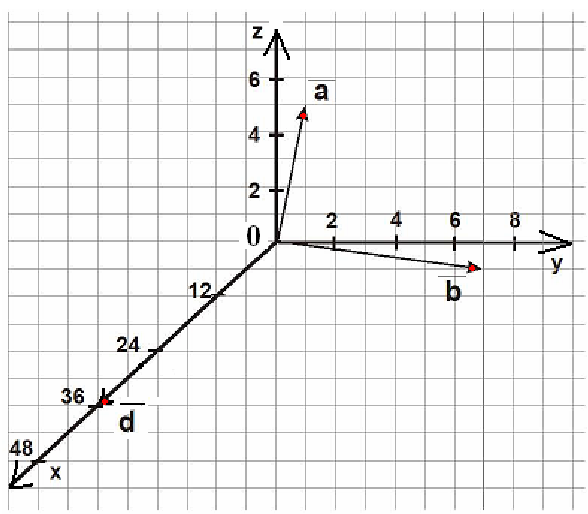


Рис. 32. Иллюстрация векторного произведения $\bar{d} = [\,\bar{b}\ \bar{a}\,]$: векторы $\bar{b}$ (0; 7; –1) и $\bar{a}$ (0; 1; 5) лежат на плоскости рисунка, вектор $\bar{d}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен *к* читателю.

Координаты векторного произведения вектора $\bar{a}$ (a_1; a_2; a_3) на вектор $\bar{b}$ (b_1; b_2; b_3) определяются равенством:

$$[\,\bar{a}\,\bar{b}\,] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

в котором, запись

- $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ означает разницу $a_2b_3 - a_3b_2$ и называется определителем второго порядка (находится разницей произведений из двух чисел);
- $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$ означает $a_3b_1 - a_1b_3$;
- $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ означает $a_1b_2 - a_2b_1$;

То есть, приведённое равенство можно записать так:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

Практически векторное произведение $[\,\bar{a}\,\bar{b}\,]$ можно определять с помощью таблицы, составленной из координат этих векторов:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

Закрыв в этой таблице первый столбец, получают матрицу (таблицу) первого определителя. Закрыв второй столбец, и, поменяв местами оставшиеся координаты внутри каждого вектора, получают матрицу второго определителя. Закрыв третий столбец, получают матрицу третьего определителя.

Поскольку в пространственных координатах $\bar{i}$ (1; 0; 0); $\bar{j}$ (0; 1; 0); $\bar{k}$ (0; 0; 1), то из определения векторного произведения вытекает, что

$$\bar{k} = [\,\bar{i}\,\bar{j}\,]$$

Действительно

$$[\,\bar{i}\,\bar{j}\,] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k} = \bar{k}$$

Пример 1. Рассчитать координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{c} = [\,\bar{a}\,\bar{b}\,]$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы, представленные на рис. 31.

Решение. Поскольку на рис. 24 представлены векторы $\bar{a}$ (0; 1; 5) и $\bar{b}$ (0; 7; –1), то:

$$\bar{c} = [\ \bar{a}\ \bar{b}\ ] = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \bar{k} = (1\cdot(-1) - 5 \cdot 7)\,\bar{i} + (5\cdot 0 - 0\cdot(-1))\,\bar{j} + (0\cdot 7 - 1\cdot 0)\,\bar{k} =$$

$$= -36\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

Следовательно $\bar{c}$ (– 36; 0; 0).

Пример 2. Рассчитать координаты вектора $\bar{d}$, если $\bar{d} = [\ \bar{b}\ \bar{a}\ ]$, где $\bar{b}$ и $\bar{a}$ векторы, представленные на рис. 32.

Решение. На рис. 25 те же векторы $\bar{a}$ (0; 1; 5) и $\bar{b}$ (0; 7; –1), но теперь необходимо найти [$\bar{b}\ \bar{a}$]:

$$\bar{d} = [\ \bar{b}\ \bar{a}\ ] = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = (7\cdot 5 - (-1) \cdot 1)\,\bar{i} + (-1\cdot 0 - 0\cdot 5)\,\bar{j} + (0\cdot 1 - 7\cdot 0)\,\bar{k} =$$

$$= 36\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

Следовательно $\bar{d}$ (36; 0; 0).

Пример 3. Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\ \bar{a} \cdot \bar{b}\ ]$, а угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляет 45^o. При этом $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\bar{b}| = 9$.

Решение. Согласно определению векторного произведения

$$|\bar{p}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha = 2\sqrt{2} \cdot 9 \sin 45^o = 2\sqrt{2} \cdot 9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 18$$

Следовательно

$$|\bar{p}| = 18$$

Пример 4. Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\ \bar{a} \cdot \bar{b}\ ]$, $\bar{a}$ (3; 4; 0) и $\bar{b}$ (–2; 1; 0). Определить длину каждого из трёх векторов и представить их графически в трёхмерной системе координат.

Решение. Координаты вектора $\bar{p}$ определяем с помощью определителей, составленных из координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{p} = [\bar{a}][\bar{b}] = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = (4 \cdot 0 - 0 \cdot 1)\,\bar{i} + (0 \cdot (-2) - 3 \cdot 0)\,\bar{j} + 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2)\,\bar{k} =$$

$$= 0\bar{i} + 0\bar{j} + 11\bar{k}$$

Следовательно

$$\bar{p} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 11\bar{k}$$

или

$$\bar{p}\,(0;\,0;\,11)$$

Длину каждого из трёх векторов определяем как корень квадратный из суммы квадратов координат

$$|\bar{a}| = \left|\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}\right| = \left|\sqrt{25}\right| = 5$$

Следовательно

$$|\bar{a}| = 5$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Следовательно

$$|\bar{b}| = \sqrt{5}$$

$$|\bar{p}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 11^2} = 11$$

Следовательно

$$|\bar{p}| = 11$$

Графическое представление векторов приведено на рис. 33.

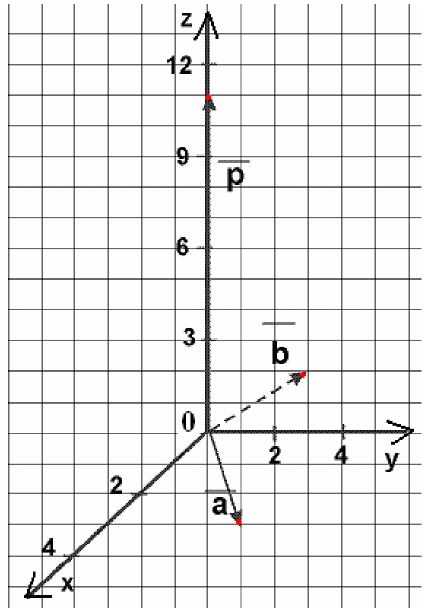


Рис. 33 Векторы $\bar{a}$ (3; 4; 0) ; $\bar{b}$ (–2; 1; 0); $\bar{p}$ (0; 0; 11).

Пример 5. Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\,\bar{c} \cdot \bar{d}\,]$, $\bar{c}$ (1; –2; 3) , $\bar{d}$ (2; 3; 7).

Определить длину каждого из трёх векторов.

Решение. В отличие от предыдущего примера все координаты перемножаемых векторов отличны от нуля. Но алгоритм решения тот же самый

$$\bar{p} = [\,\bar{c}\,][\,\bar{d}\,] = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = (-2\cdot 7 - 3\cdot 3)\,\bar{i} + (3\cdot 2 - 1\cdot 7)\,\bar{j} + 1\cdot 3 - (-2\cdot 2)\,\bar{k} =$$

$$= -23\,\bar{i} - \bar{j} + 7\,\bar{k}$$

Следовательно

$$\bar{p} = -23\,\bar{i} - \bar{j} + 7\,\bar{k}$$

или

$$\bar{p} \quad (-23; -1; 7)$$

Теперь находим длину каждого из трёх векторов

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\right| = \left|\sqrt{14}\right|$$

Следовательно

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\sqrt{14}\right|$$

$$\left|\bar{d}\right| = \left|\sqrt{2^2+3^2+7^2}\right| = \left|\sqrt{62}\right|$$

Следовательно

$$\left|\bar{d}\right| = \left|\sqrt{62}\right|$$

$$\left|\bar{p}\right| = \left|\sqrt{(-23)^2+(-1)^2+7^2}\right| = \left|\sqrt{579}\right|$$

Следовательно

$$\left|\bar{p}\right| = \left|\sqrt{579}\right|$$

Упражнения.

169. Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\,\bar{c}\cdot\ \bar{d}\,]$, а угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ составляет 30^0.

а) $\left|\bar{c}\right| = 4$, $\left|\bar{d}\right| = 3$;

б) $\left|\bar{c}\right| = 2$, $\left|\bar{d}\right| = 5$;

в) $\left|\bar{c}\right| = 3$, $\left|\bar{d}\right| = 2$;

г) б) $\left|\bar{c}\right| = 7$, $\left|\bar{d}\right| = 4$;

170. Определить длину вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\,\bar{c}\cdot\ \bar{d}\,]$, а угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ составляет 60^0.

а) $\left|\bar{c}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\left|\bar{d}\right| = 9$;

б) $\left|\bar{c}\right| = 5$; $\left|\bar{d}\right| = 2\cdot\sqrt{3}$.

171. Определить длину вектора $\bar{f}$, если $\bar{f} = [\,\bar{m}\cdot\ \bar{n}\,]$. При этом $\left|\bar{m}\right| = 4$, $\left|\bar{n}\right| = \sqrt{3}$, а угол между

векторами $\bar{m}$ и $\bar{n}$ составляет:

а) 15^{o};

б) $\dfrac{\pi}{5}$;

в) 60^{o};

г) $\dfrac{7\pi}{12}$.

172. Определить координаты вектора $\bar{p}$, если $\bar{p} = [\,\bar{a}\cdot\ \bar{b}\,]$, при этом:

а) $\bar{a}$ (0,5; 1,5; 0,7), $\bar{b}$ (1; 3; 1,4);

б) $\bar{a}$ (0,7; 0,5; 1,5), $\bar{b}$ (3; 1,4; 1)

в) $\bar{a}$ (3; – 6; 9), $\bar{b}$ (–2; 4; – 6);

г) $\bar{a}$ (– 6; 9; 3); $\bar{b}$ (–2; – 6; 4)

Какие из рассмотренных пар векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными? Какие из коллинеарных векторов являются равнонаправленными?

173. Определить координаты векторов $\bar{p}$ и $\bar{s}$, если

$\bar{p} = [\bar{a} \cdot \bar{b}]$, $\bar{s} = [\bar{b} \cdot \bar{a}]$, $\bar{a}\ (1;\ -2;\ 2)$; $\bar{b}\,(-0{,}5;\ -3;\ 2)$

Вычислить длину каждого из четырёх векторов. Векторы $\bar{p}$ и $\bar{s}$ представить графически.

174. Определить координаты вектора силы Лоренца $\bar{F}$, а также абсолютное значение этой силы, воздействующей на электрический заряд q, движущийся со скоростью $\bar{\upsilon}$ в магнитном поле, характеризуемом вектором магнитной индукции $\bar{B}$, если подразумевается, что размерность силы, заряда, скорости и вектора магнитной индукции приведены в системе СИ:

$\bar{F} = q\,[\bar{\upsilon} \cdot \bar{B}]$; $q = 2 \cdot 10^{-6}$; $\bar{\upsilon}\ (75;\ 25;\ 125)$; $\bar{B}\ (0{,}05;\ 0{,}03;\ 0{,}01)$

175. Доказать, что

$$\bar{i} = [\,\bar{j} \cdot \bar{k}\,]$$

$$\bar{j} = [\,\bar{k} \cdot \bar{i}\,]$$

?

1. **Чем отличается стереометрия от планиметрии?**
2. **Перечислите названия трёх осей пространственных координат.**
3. **Что такое векторное произведение и как рассчитываются координаты векторного произведения?**

§ 14. Тела и их поверхности

Телом называется конечная замкнутая часть пространства. Объём тела обозначают V. Граница тела называется поверхностью тела. Площадь поверхности тела принято обозначать S.

При изображении тела будем представлять пунктиром линии, расположенные за плоскостью рисунка.

Наиболее типичными примерами тела могут служить: тела вращения и многогранники.

1. Тела вращения

Тела вращения образуются в результате вращения плоских фигур.

Шар. Шаром называется тело, которое состоит из точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки (рис. 34). Эта точка (O) называется центром шара, а данное расстояние (R) радиусом шара. Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси. Поверхность шара называется сферой.

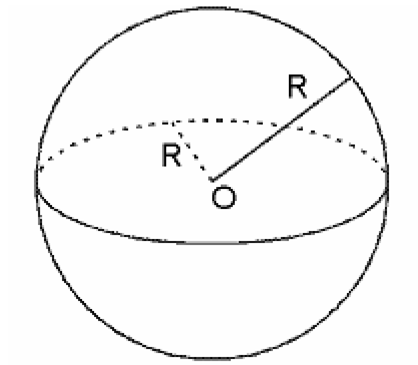


Рис. 34 Шар с радиусом R.

Площадь сферы определяется равенством:

$$S = 4\,\pi R^2$$

Объём шара рассчитывается по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Цилиндр. Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис.35). Круги называются основаниями цилиндра, их радиус (R) – радиусом цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружности кругов – образующими цилиндра. Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Расстояние между плоскостями оснований (H) называется высотой цилиндра. Прямой цилиндр можно представить как тело, описываемое прямоугольником со сторонами R и H при вращении вокруг одной из сторон как оси.

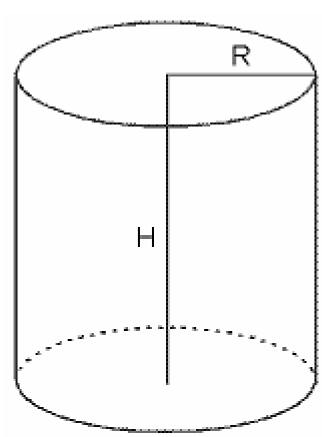


Рис. 35. Прямой цилиндр с радиусом R и высотой H

Площадь боковой поверхности прямого цилиндра вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi RH$$

Площадь полной поверхности представляет собой сумму площадей оснований и боковой поверхности. Объём прямого цилиндра определяется равенством:

$$V = \pi R^2 H$$

Конус. Конусом называется тело, которое состоит из круга – *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 36). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса (l). Высотой конуса (Н) называется перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.

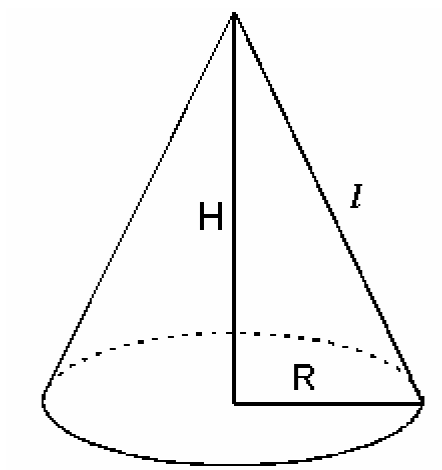


Рис. 36. Конус с радиусом основания R, высотой H и образующей l.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R l,$$

где R – радиус основания конуса. Площадь полной поверхности равна сумме площадей основания конуса и боковой поверхности.

Объём конуса определяется равенством:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Конус является результатом вращения прямоугольного треугольника с катетами R и H вокруг одного из катетов.

Пример 1. Вычислить радиус и объём шара, площадь сферы которого 12, 56 см^2. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

Решение. Поскольку площадь S сферы с радиусом R описывается равенством $S = 4\,\pi R^2$, то $R = \left|\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right|$

В данном случае

$$R = 1 \text{ см}.$$

Согласно формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и полученному значению R

$$V = \frac{4}{3}\pi\ см^3$$

В системе СИ

$$R = 1\cdot 10^{-2}\ м.$$

$$V = 1,(3)\ \pi \cdot 10^{-6}\ м^3.$$

Упражнения.

176. Вычислить площадь полной поверхности и объём прямого цилиндра с радиусом 2 см и высотой 3 см. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

177. Вычислить площадь полной поверхности конуса и его объём, если радиус его основания 3 см, а высота 4 см. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

2. Многогранники

Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 37), называемых гранями.

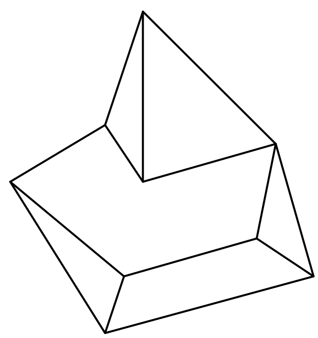


Рис. 37. Многогранник

Площадь полной поверхности многогранника равна сумме площадей всех многоугольников этого многогранника. Стороны граней называются рёбрами многогранника, а вершины – вершинами многогранника. Сфера называется вписанной в многогранник, если её поверхность касается всех граней этого многогранника Рис. 38.

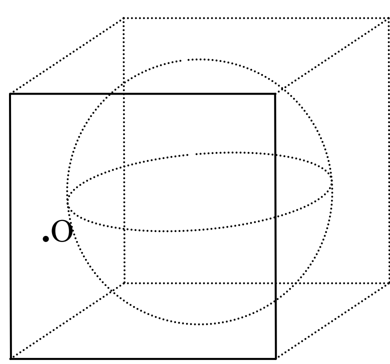


Рис. 38. Сфера, вписанная в многогранник с центром в точке О.

Сфера называется описанной около многогранника, если её поверхность касается всех вершин многогранника. Таким образом, если сфера вписана в многогранник, то этот многогранник является описанным около сферы. Если сфера описана около многогранника, то многогранник является вписанным в сферу. Внутренняя точка многогранника, являющаяся центром вписанной сферы и центром описанной сферы, называется центром этого многогранника.

Призма. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (Рис.39, 40).

Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки соединяющие соответствующие вершины – боковыми рёбрами призмы. Высотой призмы (H) называется расстояние между плоскостями её оснований.

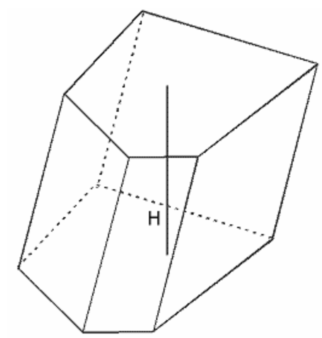


Рис. 39. Наклонная призма с высотой H.

Призма называется прямой если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям (рис. 40). В противном случае призма называется наклонной (рис.39). Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной призмой.

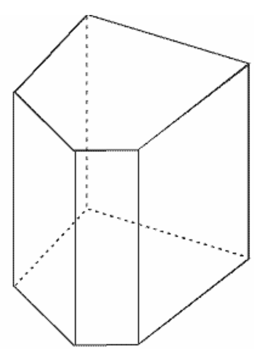


Рис. 40. Прямая призма

Объём (V) любой призмы определяется по формуле

$$V = SH,$$

где S – площадь основания.

Параллелепипед Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется параллелепипедом (Рис. 41 (а, б))

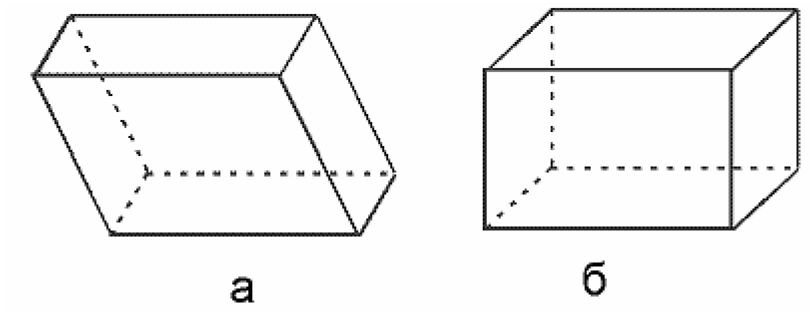


Рис. 41. Параллелепипед: наклонный (а) и прямой (б)

У параллелепипеда все грани – параллелограммы. Прямой правильный параллелепипед называется кубом (рис. 42).

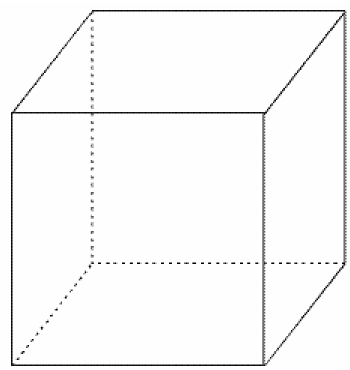


Рис. 42. Куб

Радиус R сферы, описанной около куба со стороной a рассчитывается по формуле

$$\mathrm{R} = \frac{\left|\sqrt{3}\right|}{2}a$$

Не следует путать с радиусом окружности, описанной около n-угольника со стороной a:

$$\mathrm{R} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

площадь которого (S_n) в свою очередь определяется равенством:

$$\mathrm{S}_n = \frac{n\mathrm{R}^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

Радиус r сферы, вписанной в этот куб, меньше его стороны ровно в два раза

$$\mathrm{r} = \frac{1}{2}a$$

Пирамида . Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника - *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания – *вершины пирамиды*, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 43). Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми рёбрами*. *Высотой пирамиды* (H) называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

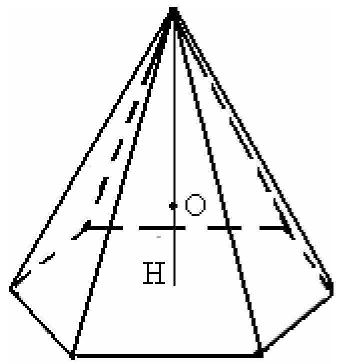


Рис. 43. Правильная пирамида с высотой H и центром в точке O.

Объём пирамиды определяется равенством

$$V = \frac{1}{3}SH$$

где S – площадь основания пирамиды. Пирамида называется n – угольной, если её основанием является n – угольник. Пирамида, у которой основанием является правильный многоугольник, называется *правильной пирамидой.* Так как центром O правильной пирамиды является внутренняя точка, являющаяся центром вписанного шара и центром описанного шара, то этот центр делит высоту H на два неравных отрезка, один из которых равен радиусу описанной сферы, а другой – радиусу вписанной сферы. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром.* Тетраэдр, у которого все грани являются равносторонними треугольниками, называется *правильным тетраэдром*. Радиус R сферы, описанной около правильного тетраэдра, может быть выражен через ребро *a* этого тетраэдра:

$$R = \frac{\left|\sqrt{6}\right|}{4}a \qquad (1)$$

Радиус r сферы, вписанной в этот тетраэдр меньше радиуса описанной сферы ровно в три раза:

$$r = \frac{\left|\sqrt{6}\right|}{12}a$$

Теорема. **В правильном тетраэдре *ABCD (*** рис.44) **все углы при центре О этого тетраэдра:** ***∠DOA; ∠DOC; ∠DOB; ∠BOC; ∠BOA; ∠COA*** **равны между собой и составляют 109°28'**

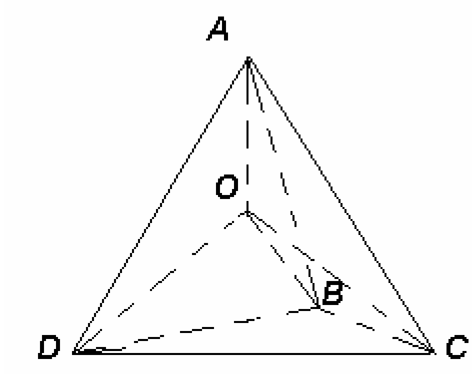


Рис.44. Правильный тетраэдр ABCD с центром в точке О.

Доказательство.

Поскольку точка О является центром тетраэдра, то отрезки $OA = OD = OB = OC$ можно воспринимать как радиус сферы R, описанной около тетраэдра. Рассматривая треугольник ΔDOA, и, вводя обозначения $\angle DOA = \alpha$; $DA = a$, $OA = OD = OB = OC = \mathrm{R}$ можем , на основании теоремы косинусов, записать:

$$a^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}^2 \cos \alpha$$

откуда

$$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2\mathrm{R}^2}$$

Подставляя в полученное равенство вместо R его значение из (1), получим

$$\cos \alpha = 1 - \frac{16a^2}{2 \cdot 6a^2}$$

или

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

Следовательно

$$\alpha = 109°28'$$

Так как, треугольники: ΔDOA; ΔDOC; ΔDOB; ΔBOC; ΔBOA; ΔCOA равны по трём сторонам, то все углы при точке *O*: ***∠DOA; ∠DOC; ∠DOB; ∠BOC; ∠BOA; ∠COA*** равны между собой и составляют 109°28'.

Что и требовалось доказать.

Пример 1. Длина углерод-углеродной связи l_1 в молекуле пропана (C_3H_8) составляет 1,54 Å, а углерод-водородной связи l_2 равна 1,10 Å (рис.46).

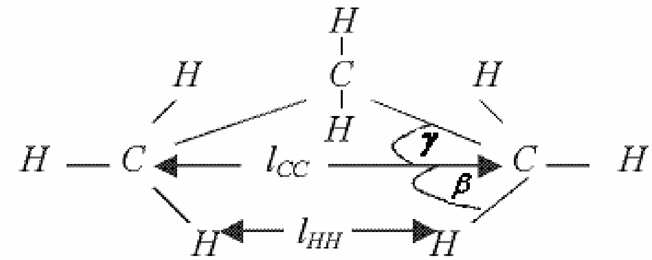


Рис. 45. Схема строения молекулы пропана.

Определить для этой молекулы кратчайшее расстояние:

- между крайними атомами углерода (l_{CC});
- между крайними атомами водорода (l_{HH})

если все углы α при атомах углерода, образованные химическими связями составляют $109^0 28'$ ($\cos 109^0 28' = -\frac{1}{3}$). Полученный результат представить нормализованной записью в системе СИ.

Решение. По теореме косинусов

$$l_{CC} = \sqrt{l_1^{\,2} + l_1^{\,2} + 2 l_1 \cdot l_2 \cdot \cos\alpha} = 1{,}54 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} = 3{,}08 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2{,}52 \text{ (Å)} \equiv 2{,}52 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Следовательно

$$l_{CC} \approx 2{,}52 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Расстояние между крайними атомами водорода можно воспринимать как часть расстояния l_{CC}:

$$l_{HH} = l_{CC} - 2 \cdot l_2 \cdot \cos\beta \qquad (2)$$

$$\beta = \alpha - \gamma$$

Поскольку γ является углом равнобедренного треугольника, сумма углов которого равна π, то

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

I способ
окончания решения задачи

$$\beta = \alpha - \gamma = \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{3\alpha - \pi}{2} = \frac{3 \cdot 109^0 28' - 180^0}{2} = 74^0 12'$$

$$\cos\beta = \cos 74^0 12' \approx 0{,}272$$

Подставляя полученное значение cos β в уравнение (2), получим

$$l_{HH} = 2{,}52 - 2 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}272 \approx 1{,}92 \text{ (Å)} \equiv 1{,}92 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}$$

Следовательно $l_{HH} \approx 1{,}92 \cdot 10^{-10}$ м

II способ
окончания решения задачи
(позволяющий избежать определения cos $74^0 12'$)

$$\cos\beta = \cos(\alpha-\gamma) = \cos(\alpha - \frac{\pi-\alpha}{2}) = \cos(\frac{3\alpha-\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\alpha) = \sin\frac{3}{2}\alpha = \sin(\alpha+\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= \sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

Согласно равенству (7) параграфа «Скалярное произведение векторов в пространстве»:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \left|\sqrt{\cos\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right|$$

Поэтому

$$\cos\beta = \sin\alpha\cdot\left|\sqrt{\cos\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right| + \cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left|\sqrt{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\right| - \frac{1}{3}\cdot\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$$

Подставляя полученное значение cos β в уравнение (2), получим

$$l_{HH} = 3{,}08\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\cdot1{,}10\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}92\ (\text{Å}) \equiv 1{,}92\cdot 10^{-10}\ (\text{м})$$

Следовательно

$$l_{HH} \approx 1{,}92\cdot 10^{-10}\ \text{м}$$

Упражнения.

178. Определить объём куба и радиус описанной около него сферы, если радиус вписанной сферы равен 2 см. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

179. Определить объём правильного тетраэдра и радиус вписанной в него сферы, если радиус описанной около него сферы равен $\frac{3}{2}\left|\sqrt{6}\right|$ м.

180. Определить площадь полной поверхности тетраэдра, рассмотренного в предыдущем упражнении.

181. Докажите теорему: «Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, то есть, на длину бокового ребра».

182. Определить площадь основания прямой призмы если её объём составляет 14 см^3, а длина бокового ребра 0,7 м. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

183. Вычислить площадь полной поверхности и объём куба, ребро которого 5 см. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

184. Найти площадь полной поверхности и объём прямого параллелепипеда, рёбра которого 1м, 2 м, 50 см. Полученный результат представить в системе СИ.

185. Определить расстояние между двумя соседними атомами водорода в молекуле метана

```
      H
      |
H — C — H
      |
      H
```

если известно, что:

- все атомы водорода являются вершинами правильного тетраэдра, центр которого занимает атом углерода;
- длина химической связи составляет 1,1 ангстрéм (Å) (1 Å≡ 10^{-10} м).

Полученный результат представить нормализованной записью в системе СИ.

186. Определить кратчайшее расстояние l_{HH} между атомами водорода, расположенными при различных атомах углерода молекулы этана C_2H_6 (рис.46),

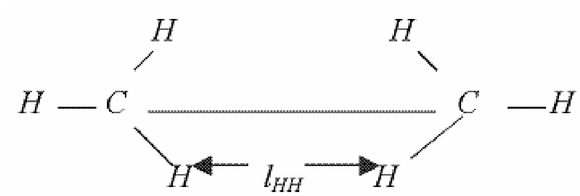


Рис. 46. Схема строения молекулы этана.

если все углы при атомах углерода, образованные химическими связями составляют $109^0 28'$ ($\cos 109^0 28' = -\frac{1}{3}$), длина углерод-углеродной связи 1,54 Å, а углерод-водородной связи 1,10 Å

Полученный результат представить нормализованной записью в системе СИ.

187. Рассчитать площадь полной поверхности молекулы фуллерена (рис. 47), состоящей из 60 атомов углерода (20 шестиугольников и 12 пятиугольников), если все углерод-углеродные связи принять равными 1,4 Å. Вычислить объём шара, площадь сферы которого равна площади полной поверхности этого фуллерена. Ответ представить нормализованной записью в системе СИ.

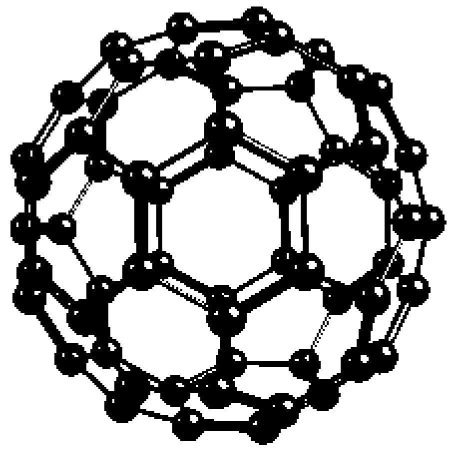


Рис. 47. Молекула фуллерена $C_{60.}$

---

1. **Что такое тело?**
2. **Приведите известные Вам примеры тел вращения и формулы, по которым определяются площади их полной поверхности и объёмы.**

? 3. **Что такое многогранник?**

4. **Приведите известные Вам примеры многогранников и формулы, по которым определяются их объёмы.**
5. **Докажите, что в треугольнике, образованном двумя вершинами правильного тетраэдра и центром тетраэдра, угол при центре тетраэдра равен $109^{o}28'$.**

Упражнения к главе V

188. Представить графически, в одних и тех же координатных осях, векторы:
$\overline{m}(1; 4; 5)$; $\overline{n}(-2; 5; -7)$; $\overline{p}$ $(2; -3; 2)$; $\overline{s}$ $(-1; -4\ -7)$.

Длину каждого из векторов представить числом, возведённым в степень ½.

189. Определить координаты векторов $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$; $\overline{f}$; $\overline{g}$ и представить их графически в одних и тех же координатных осях, если
$\overline{a}=\overline{m}+\overline{n}$; $\overline{b}=\overline{m}+\overline{p}$; $\overline{c}=\overline{m}+\overline{s}$; $\overline{d}=\overline{n}+\overline{s}$; $\overline{f}=\overline{p}+\overline{s}$; $\overline{g}=\overline{p}+\overline{n}$
где слагаемые являются векторами предыдущего упражнения.

190. Вычислить скалярные произведения векторов, суммируемых в предыдущем упражнении:

а) $\overline{m}\cdot\overline{n}$; б) $\overline{m}\cdot\overline{p}$;

в) $\overline{m}\cdot\overline{s}$; г) $\overline{n}\cdot\overline{s}$;

д) $\overline{p}\cdot\overline{s}$; е) $\overline{p}\cdot\overline{n}$.

191. Определить координаты векторного произведения векторов из предыдущего упражнения:

а) $[\overline{m}\cdot\overline{n}]$; б) $[\overline{m}\cdot\overline{p}]$;

в) $[\overline{m}\cdot\overline{s}]$; г) $[\overline{n}\cdot\overline{s}]$;

д) $[\overline{p}\cdot\overline{s}]$; е) $[\overline{p}\cdot\overline{n}]$.

192. Определить радиус и объём шара, площадь сферы которого 4π м^2.

193. Определить площадь полной поверхности конуса и его объём, если радиус его основания 3 м, а высота 4 м.

194. Определить кратчайшее расстояние l_{HH} между атомами водорода, расположенными при соседних атомах углерода молекулы пропана C_3H_8 (рис. 48), если все углы при атомах углерода, образованные химическими связями составляют $109^0 28'$ ($\cos 109^0 28' = -\frac{1}{3}$), длина углерод - углеродной связи 1,54 Å, а углерод-водородной связи 1,10 Å.

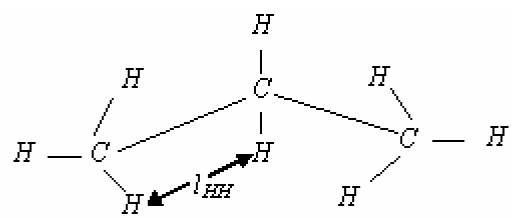


Рис. 48. Кратчайшее расстояние между атомами водорода в молекуле пропана.

Полученный результат представить нормализованной записью в системе СИ.

195. Выразить в системе СИ площадь основания прямой призмы, если её объём составляет 14 см^3, а длина бокового ребра 0,7 м.

196. Представить нормализованной записью в системе СИ объём прямого параллелепипеда, рёбра которого 1см, 3мм, 5 м.

197. Чему равна площадь основания прямого цилиндра, если площадь его боковой поверхности составляет 500 см^2, а высота равна $\frac{1}{2\pi}$ м?

198. Вычислить объём цилиндра, описанного в предыдущем упражнении.

199. Вычислить ребро правильного тетраэдра, если радиус сферы, описанной около него, равен $\left|\sqrt{6}\right|$.

200. Вычислить радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр, приведённый в предыдущем упражнении.