

Механические и электромагнитные колебания

Гармонические колебания

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), повторяющиеся во времени вблизи некоторого среднего положения.

Положение, вблизи которого совершаются колебания, называют **положением равновесия**.

В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают **механические**, **электромагнитные**, **электромеханические** и др.

Гармонические колебания

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени.

Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Гармонические колебания

Периодические колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса), называются **гармоническими**.

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad s' = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A характеризует максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия и называется **амплитудой**.

ω_0 - **круговая (циклическая) частота**

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебания** в момент времени t

φ_0 – **начальная фаза** в момент времени $t = 0$

Гармонические колебания

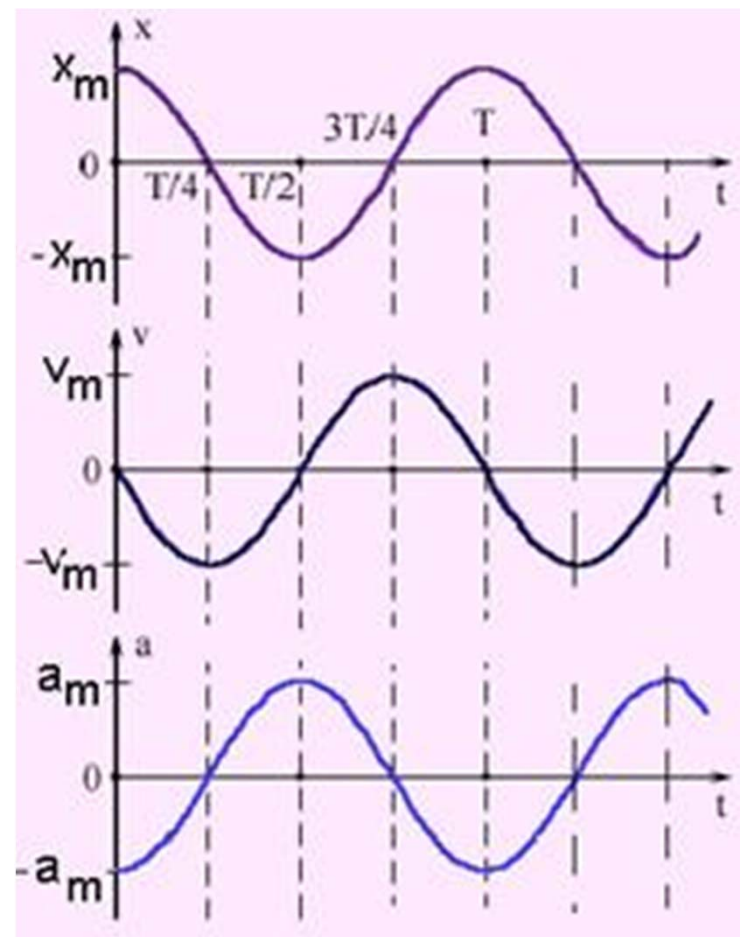
Гармонически колеблющаяся величина s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ &= A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) \end{aligned}$$



Механические гармонические колебания



$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$V = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

$$F = ma$$

$$F = -m \omega_0^2 x$$

Механические гармонические колебания

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания:

$$E_K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_{\Pi} = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Полная энергия:

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Механические гармонические колебания

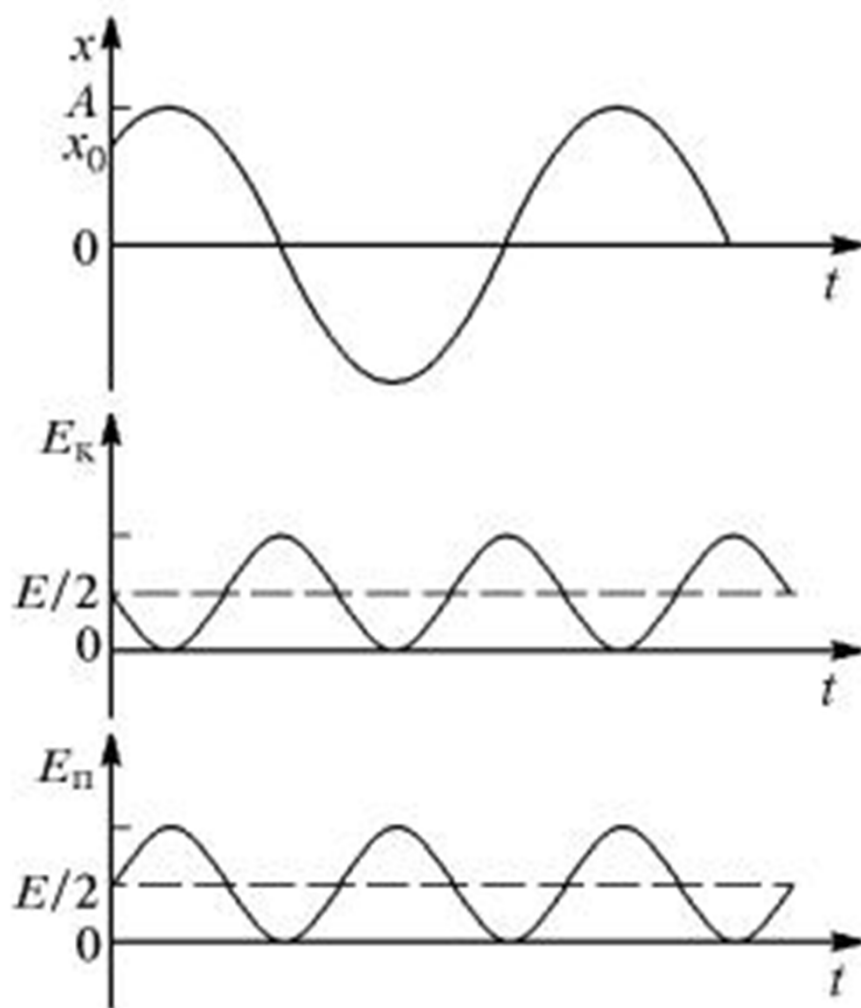


График изменения кинетической и потенциальной энергии при гармонических колебаниях.

Гармонический осциллятор.

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида :

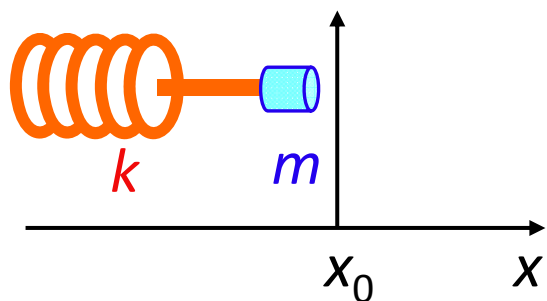
$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

Примерами гармонического осциллятора являются

пружинный, физический и математический маятники.

Гармонический осциллятор.

Пружинный маятник.



Движение происходит под действием
силы упругости пружины, описываемой
законом Гука $F = -k\Delta x$

$$F = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}(x-x_0) \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\omega^2 s + \frac{d^2s}{dt^2} = 0}$$

$s = x - x_0$ - отклонение от положения равновесия

$\omega = \sqrt{k/m}$ собственная частота механической системы

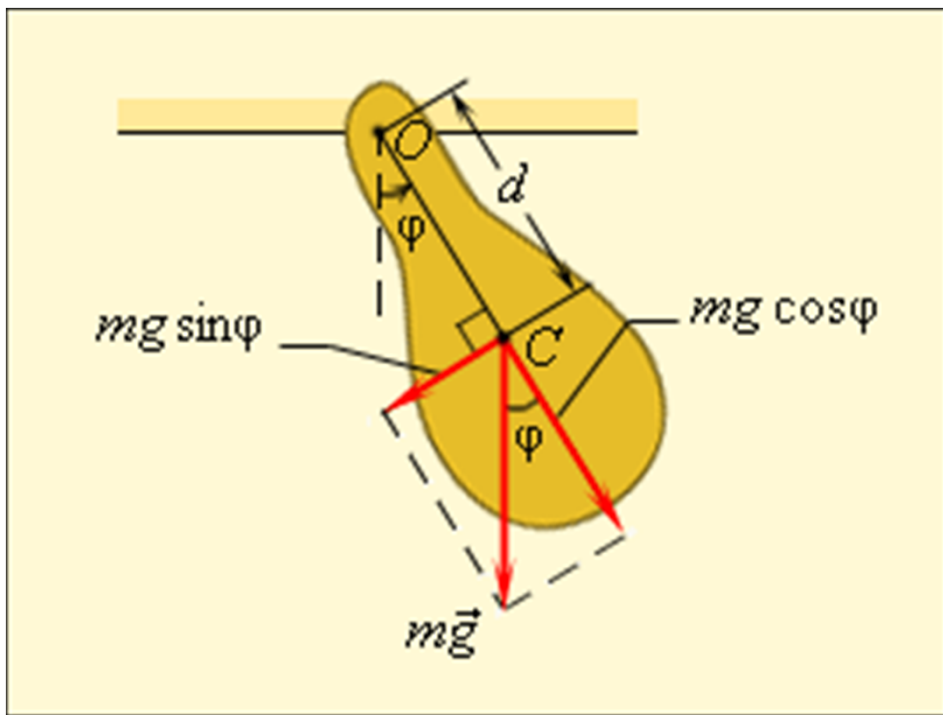
$T = 2\pi\sqrt{m/k}$ период колебания

$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}$ потенциальная энергия пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Гармонический осциллятор.

Физический маятник



$$M = J\varepsilon = J\ddot{\varphi} = F_T d$$

$$F_T d = -mgd \sin \varphi \approx -mgd \varphi$$

J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O

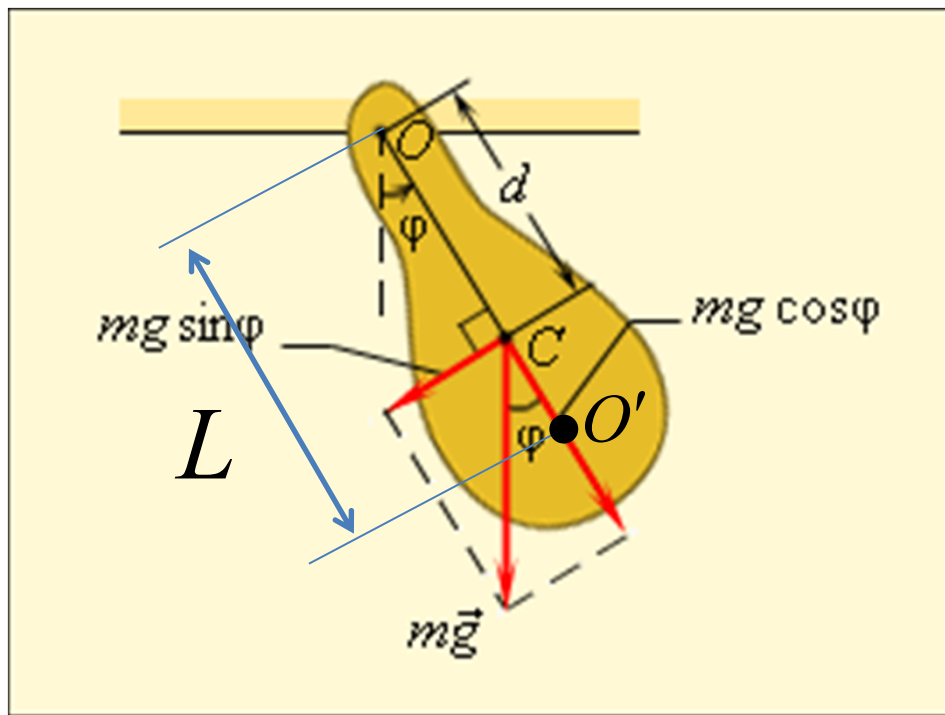
$$J\ddot{\varphi} + mgd\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J}\varphi = 0$$

ω^2

Гармонический осциллятор.

Физический маятник



$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J} \varphi = 0$$

ω_0^2

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{J / (mgd)} = 2\pi \sqrt{L / g}$$

$$L = J / md$$

— приведенная длина физического маятника.

Гармонический осциллятор.

Математический маятник.

$$\begin{aligned} M_z &= [\vec{l}, (\vec{F}_T + \vec{T})]_z = [\vec{l}, \vec{F}_T]_z + \cancel{[\vec{l}, \vec{T}]_z}^0 = \\ &= [\vec{l}, \vec{F}_T]_z = lmg \sin(\vec{l}, \vec{F}_T) = -lmg \sin \alpha \end{aligned}$$

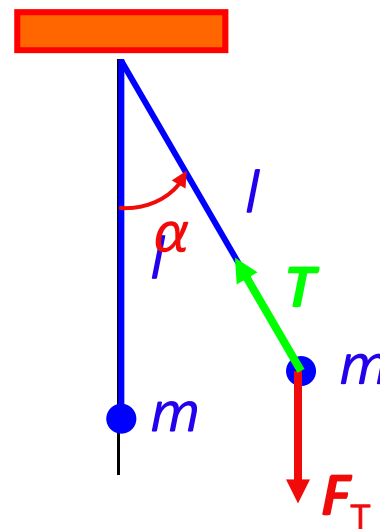
$$M_z = J_z \varepsilon = ml^2 \varepsilon$$

$$ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + lmg \sin \alpha = 0$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$



Сложение колебаний. Биения

Многие колебательные системы могут одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах.

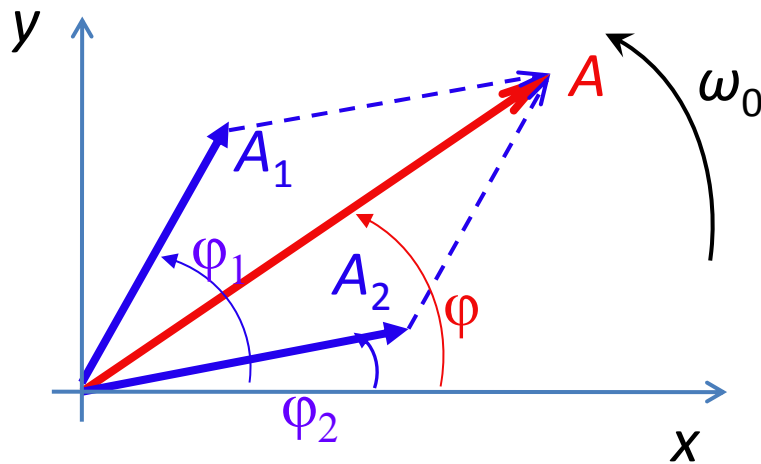
Под **сложением** колебаний понимают нахождение закона движения тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных процессах.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Сложение колебаний. Биения

Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы



$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

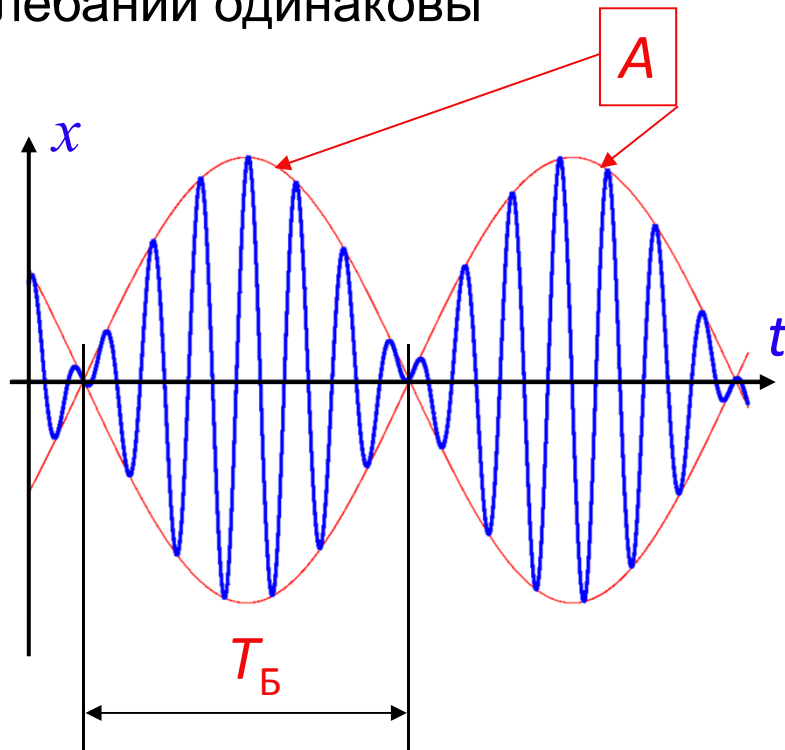
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Сложение колебаний. Биения

Негармонические колебания, получающиеся в результате сложения одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$, называются **биениями**.

Рассмотрим простой случай - пусть амплитуды складываемых колебаний одинаковы



$$\begin{aligned} |\omega_1 - \omega_2| &\ll \omega_1 \\ |\omega_1 - \omega_2| &\ll \omega_2 \end{aligned}$$

критерий наблюдения биений

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t$$

Сложение колебаний. Биения

амплитуда биений

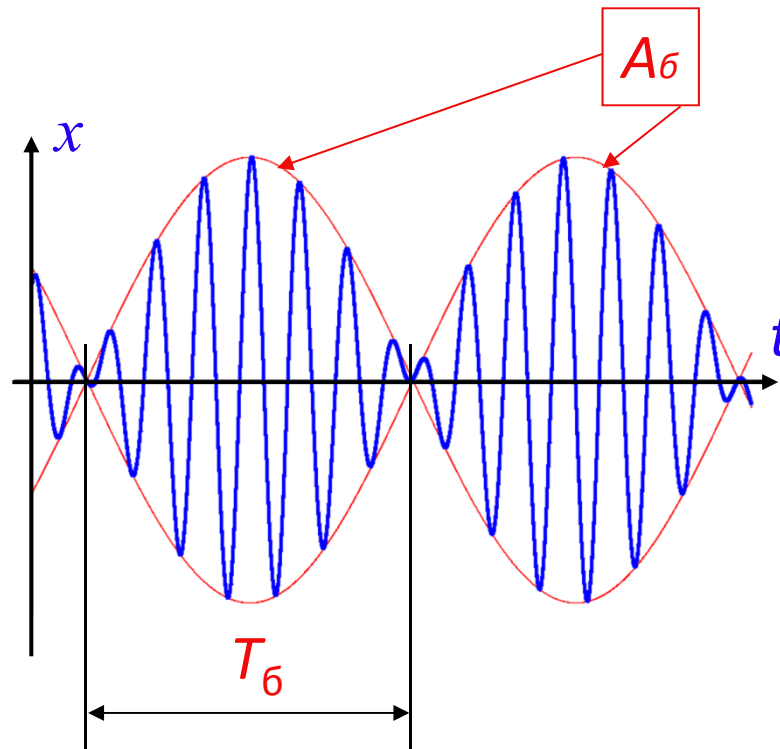
$$A_{\delta} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

частота биений

$$\Delta\omega_{\delta} = \omega_2 - \omega_1$$

период биений

$$T_{\delta} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются **затухающими**.
Энергия механических колебаний постепенно
расходуется на работу против сил трения и амплитуда
колебаний постепенно уменьшается.

сила трения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$$

где r — коэффициент сопротивления,

$\vec{v}$ — скорость движения

Свободные затухающие механические колебания

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$ma_x = -kx - r v_x$$

где kx – возвращающая упругая сила, $r v_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введем обозначения

$$\frac{r}{2m} = \beta$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\omega \neq \omega_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad \beta = \frac{r}{2m} ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T .

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \quad \chi = \beta T$$

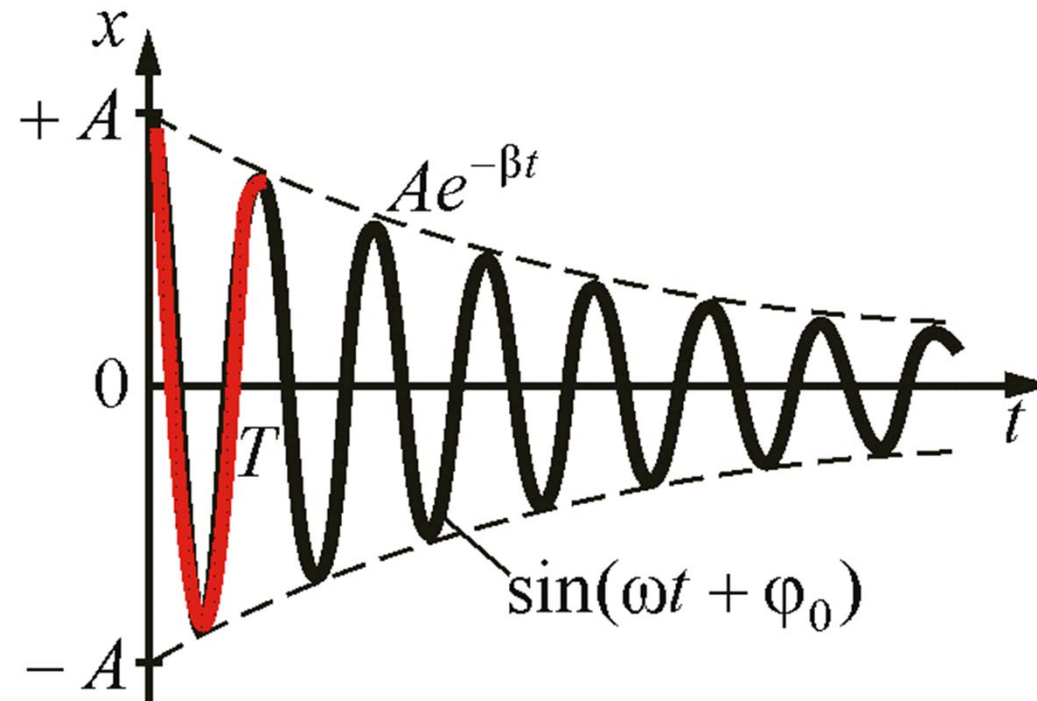
$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \quad \text{при } \beta\tau = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания β** – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, **τ называется временем релаксации.**

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – коэффициент затухания



Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы $(- kx)$ и сил сопротивления $(- rv)$ действует добавочная *периодическая сила* F – вынуждающая сила. Для колебаний вдоль оси x уравнение движения имеет вид:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = F_0 \cos \omega t.$$

Вынужденные механические колебания

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

где

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

Вынужденные механические колебания

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

где

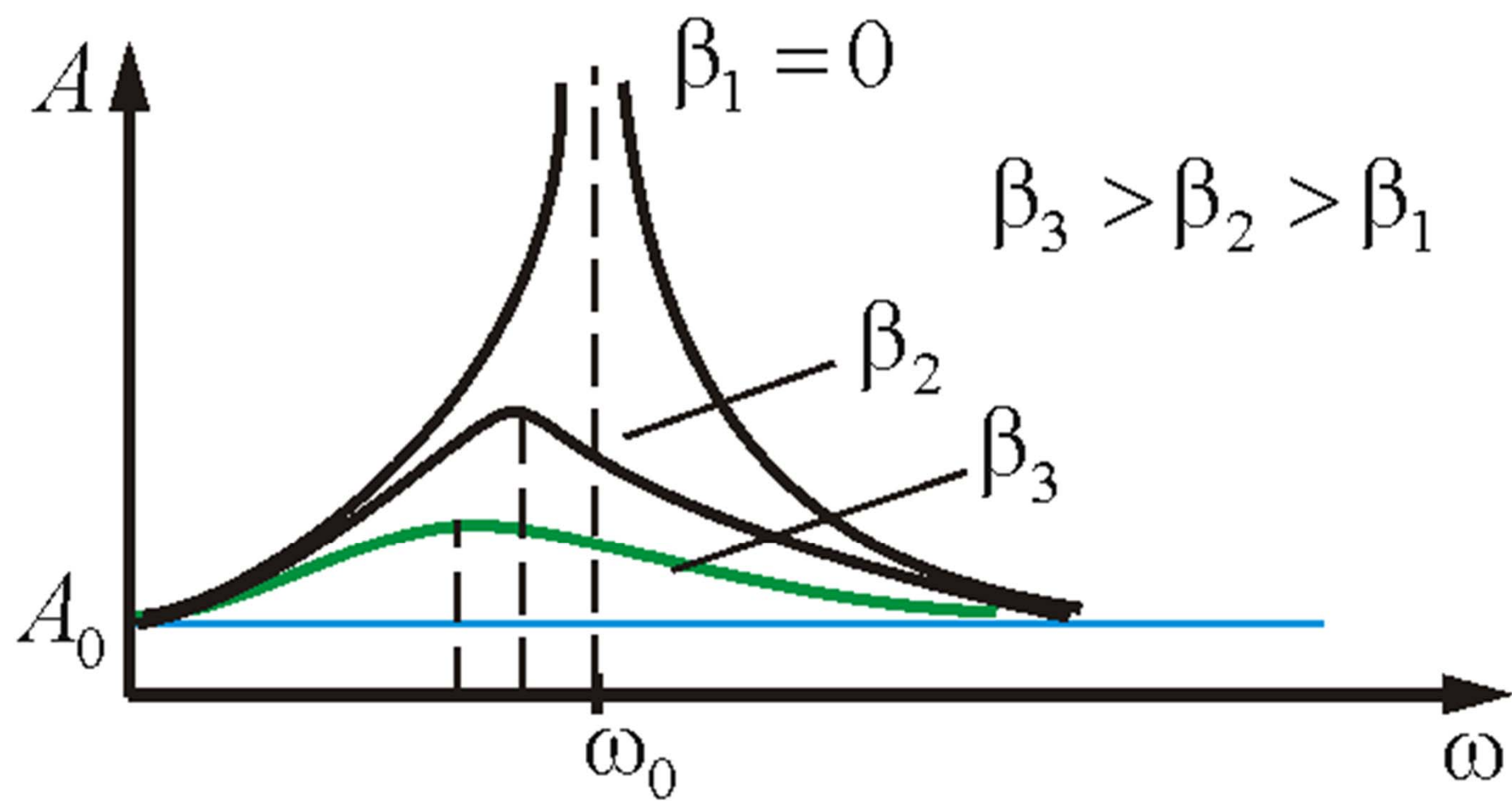
$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$\beta = 0$ (затухания нет).

С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$) амплитуда растет,

$\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \rightarrow \infty$) – **резонанс**.

$\omega > \omega_0$, амплитуда опять уменьшается.



$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$\beta \neq 0$. При $\frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = 0$ экстремум.

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — резонансная частота.

*Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом**.*

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1. Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления**
- 2. Свободные затухающие электромагнитные колебания**
- 3. Вынужденные электромагнитные колебания**
- 4. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока**



Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Электромагнитными колебаниями называются периодические изменения силы тока и связанных с ней величин, происходящие в системе, называемой *колебательным контуром*.

Колеблющиеся величины:

$$i(t); \quad q(t); \quad u(t); \quad E(t); \quad H(t); \quad W_m(t); \quad W_{\text{Эл}}(t)$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Периодически повторяющиеся значения силы тока, сопровождающиеся периодическими превращениями энергии электрического поля в энергию магнитного поля (и наоборот), происходящие при однократном сообщении колебательному контуру энергии от внешнего источника, называются **свободными электромагнитными колебаниями**.

Гармонические колебания

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Колебания называются **периодическими**, если значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени.

Наименьший промежуток времени T , удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

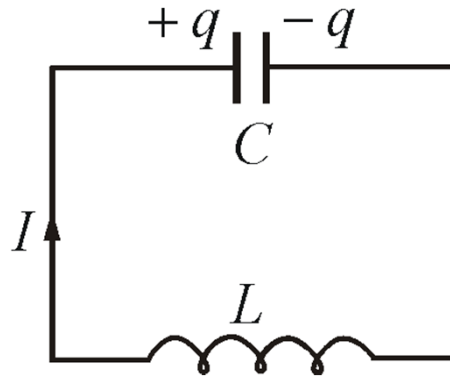
$$T = \frac{1}{\nu}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Контур, содержащий только индуктивность L и ёмкость C называется **идеальным колебательным контуром**. В таком контуре возникают **свободные (незатухающие)** электромагнитные колебания.



Колебания в контуре можно возбудить либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле). В случае идеального контура его активное сопротивление $R = 0$, поэтому полная энергия контура **сохраняется** ($W = W_C + W_L = \text{const}$).

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

В соответствии с законом сохранения энергии

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \text{const}, \quad (1)$$

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \text{const}, \quad (2)$$

Дифференцируя выражение (2) по времени, получим

$$\frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{L}{2} 2i \frac{di}{dt} = 0. \quad (3)$$

Учтем, что

$$i = \frac{dq}{dt},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Уравнение (3) принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{C}q \frac{dq}{dt} + L \frac{dq}{dt} \frac{d^2q}{dt^2} = 0.} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dq}{dt} \left(\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} \right) = 0.} \quad (4)$$

Если $\frac{dq}{dt} \neq 0$,

то нулю равно выражение в скобках, т.е.

$$\boxed{\left(\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} \right) = 0.} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.} \quad (5)$$

Введем замену:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Тогда (5) запишется в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6)$$

Это - уравнение гармонических колебаний заряда на обкладках конденсатора. Решение такого уравнения известно и оно имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7)$$

Здесь $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - *собственная частота колебательного контура.*

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственной частотой контура*. Эта частота определяется исключительно параметрами контура: его ёмкостью C и индуктивностью L . Так как

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{то} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8)$$

Формула (8) – это период собственных колебаний в колебательном контуре без активного сопротивления R – *формула ТОМПСОНА*.

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

1) Напряжение на конденсаторе

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

2) Сила тока, в катушке индуктивности

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

где $\omega_0 q_m = I_m$.

Таким образом сила тока в идеальном контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Свободные электромагнитные колебания в контуре без активного сопротивления

Соотношение между амплитудными значениями силы тока в катушке и напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{q_m}{C} \\ \omega_0 q_m &= I_m \end{aligned} \quad U_m C = \frac{I_m}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

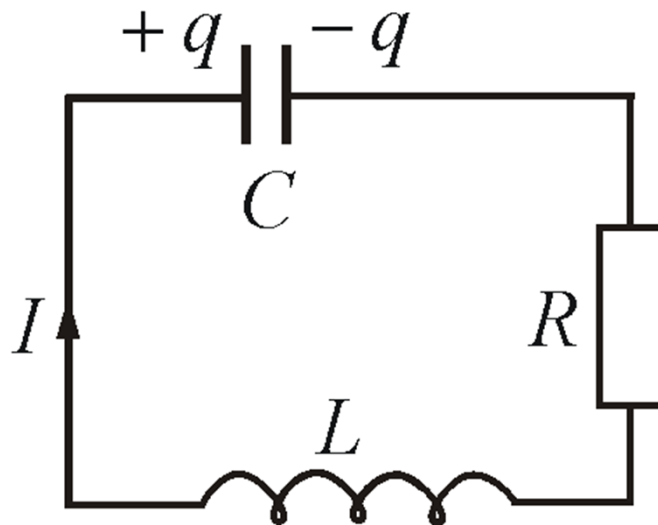
Последнее выражение представляет собой **закон Ома для идеального колебательного контура**.

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется волновым сопротивлением контура.

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Поэтому энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на его нагрев, вследствие чего колебания затухают.



Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются **затухающими**.
Энергия механических колебаний постепенно
расходуется на работу против сил трения и амплитуда
колебаний постепенно уменьшается.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

При наличии в контуре активного сопротивления закон Ома для мгновенного значения силы тока в контуре записывается в виде

$$iR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{si},$$

где

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -U = -\frac{q}{C}$$

Полное падение напряжения ($iR+U$) должно равняться ЭДС, действующей в контуре. Однако в контуре действует только ЭДС самоиндукции ε_{si}

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{di}{dt}$$

С учетом этих замечаний

$$iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

Или

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

откуда
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \text{где } \beta - \text{коэффициент затухания;}$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \text{- квадрат собственной циклической частоты контура.}$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

С учетом этих обозначений уравнение примет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 = 0.$$

Это уравнение свободных затухающих колебаний

Его решение:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Или с учетом введенных обозначений для β и ω_0

Свободные затухающие электромагнитные колебания

получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

1) Напряжение на конденсаторе

$$u = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Свободные затухающие электромагнитные колебания

или $u = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ где $U_0 = \frac{q_0}{C}$.

2) Дифференцируя по времени $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$.
и введя обозначения

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \quad \text{и} \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}},$$

можно найти силу тока в контуре

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$i = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi).$$

Так как $\cos \psi < 0$, а $\sin \psi > 0$, то значение ψ

Заклучено в пределах от $\pi/2$ до π , т.е.

Свободные затухающие электромагнитные колебания

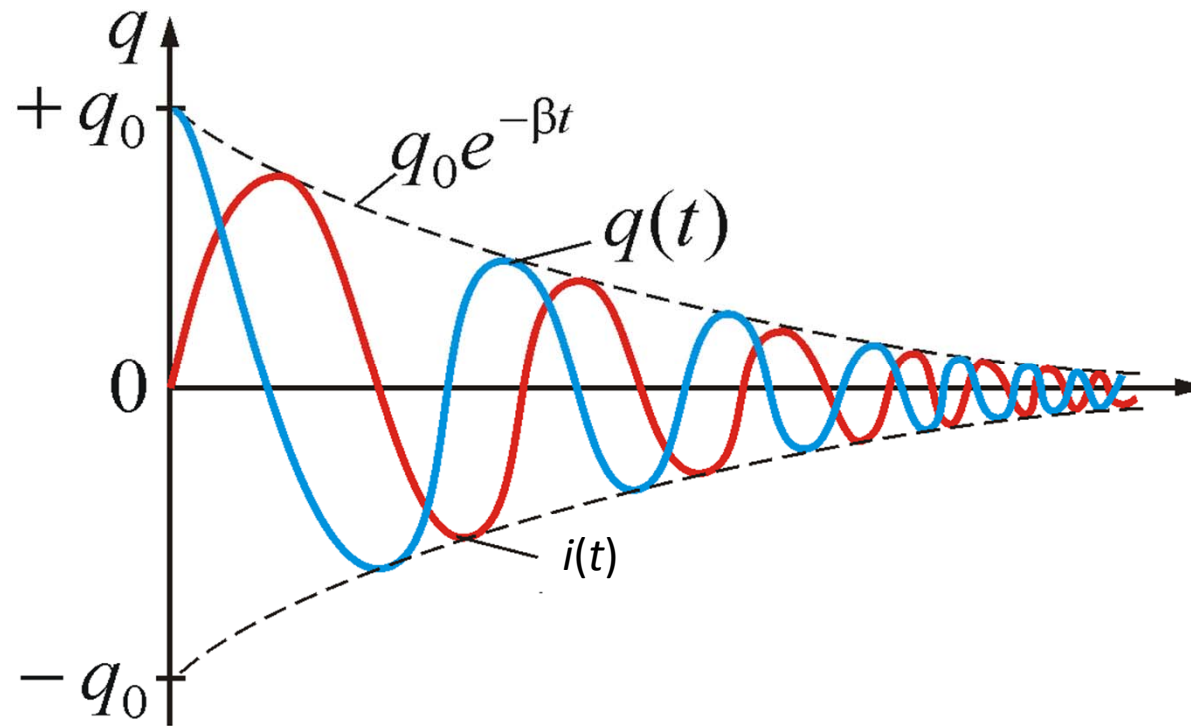
$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$$

Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе заряд и напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$ (при $R=0$ опережение составляет $\pi/2$).

На рисунке, показан вид затухающих колебаний заряда q и силы тока i .

Колебаниям q соответствует x – смещение маятника из положения равновесия, силе тока i – скорость u .

Свободные затухающие электромагнитные колебания



Затухание принято характеризовать **логарифмическим декрементом затухания**

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T .

Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T .

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \quad \chi = \beta T$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta \tau} = e^1, \quad \text{при } \beta \tau = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания β** – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, **τ называется временем релаксации.**

Свободные затухающие электромагнитные колебания

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\frac{R}{L} = 2\beta,$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и λ является характеристикой контура. Если затухание невелико

$$\beta^2 \ll \omega_0^2$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность колебательного контура Q - отношение энергии, запасённой в колебательной системе, к энергии, теряемой системой за один период колебания.

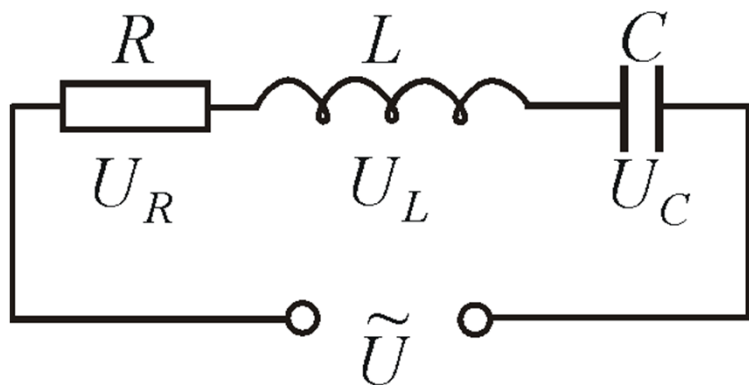
$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

W – энергия контура в данный момент, ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

Вынужденные электрические колебания

Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рисунке, подадим переменное напряжение $u(t)$



$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

В этом случае уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

Вынужденные электрические колебания

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний. Его решение при больших t

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

где 1).

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

$$2). \quad i = i_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Вынужденные механические колебания

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

где

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

Вынужденные электрические колебания

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

называется *полным сопротивлением цепи, (импеданс)*

а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называется *реактивным сопротивлением*

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω .

Вынужденные электрические колебания

Между током в контуре и внешней Э.Д.С. есть сдвиг фаз $\Delta\varphi$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний дает значение сдвига фаз $\Delta\varphi$

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

⇓

• если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $\Delta\varphi > 0$

и ток отстает по фазе от внешней ЭДС

Вынужденные электрические колебания

• если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, то $\Delta\varphi < 0$

и ток опережает по фазе внешнюю ЭДС

Вынужденные электрические колебания

$$iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t$$

⇓

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

Вынужденные электрические колебания

Можно показать, что

$$1). U_R = Ri_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

$$2). U_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \Delta\varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$3). U_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$i = i_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Вынужденные электрические колебания

То есть

$$1). U_R = Ri_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

меняется в фазе с током

$$2). U_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \Delta\varphi - \frac{\pi}{2})$$

Отстает от тока на $\pi/2$

$$3). U_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2})$$

Опережает ток на $\pi/2$

$$i = i_m \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Вынужденные электрические колебания

$$\operatorname{tg} \Delta \varphi = \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \bullet \text{если } \omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \text{то} \quad \Delta \varphi = 0$$

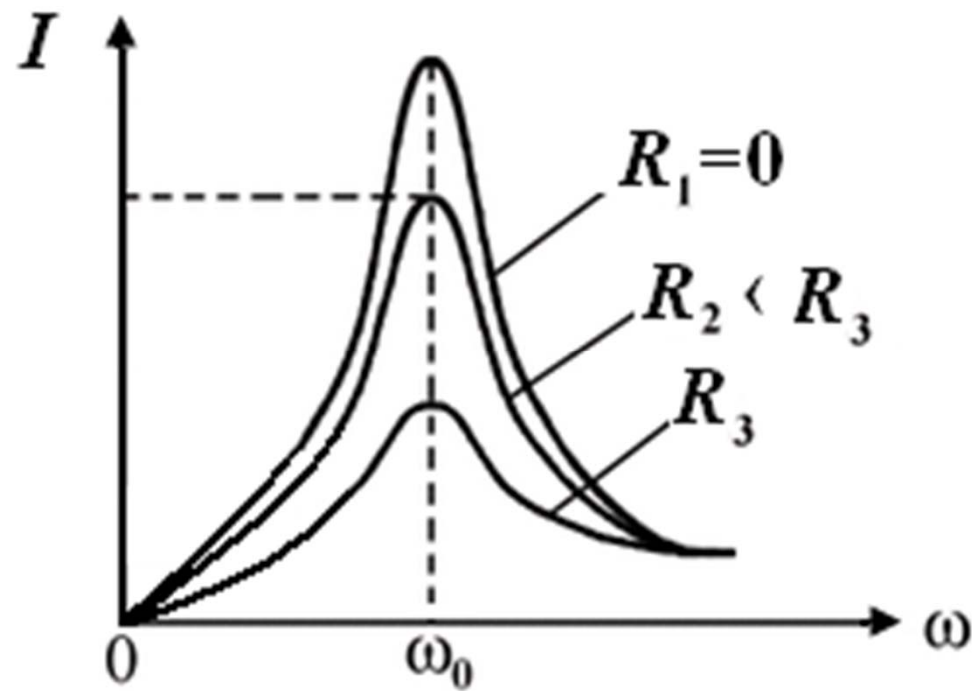
$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad - \text{наблюдается резонанс.}$$

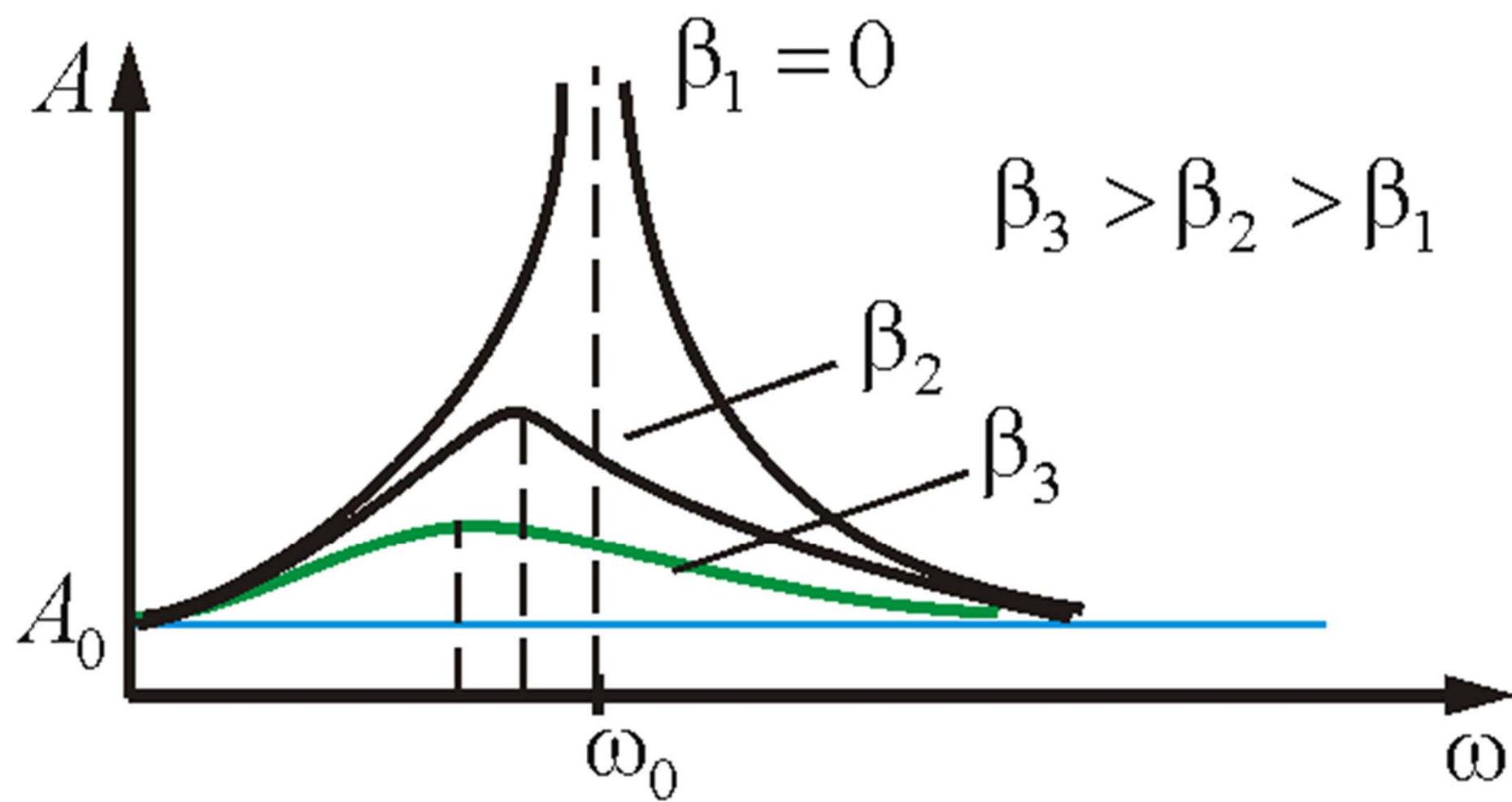
$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad \text{и} \quad Z = R$$

Ток и внешнее напряжение меняются синфазно

Резонанс для тока



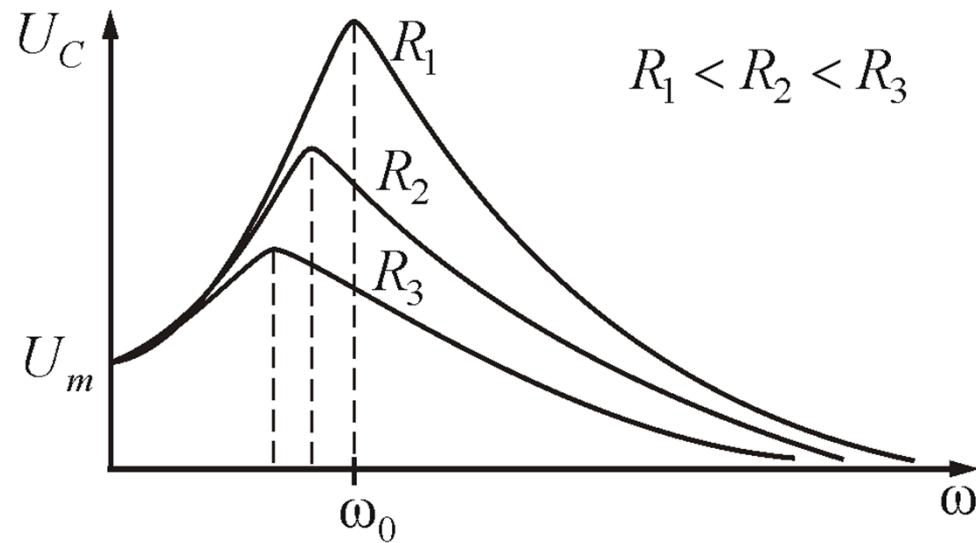
Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении ($\omega = 0$) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.



Резонанс напряжений

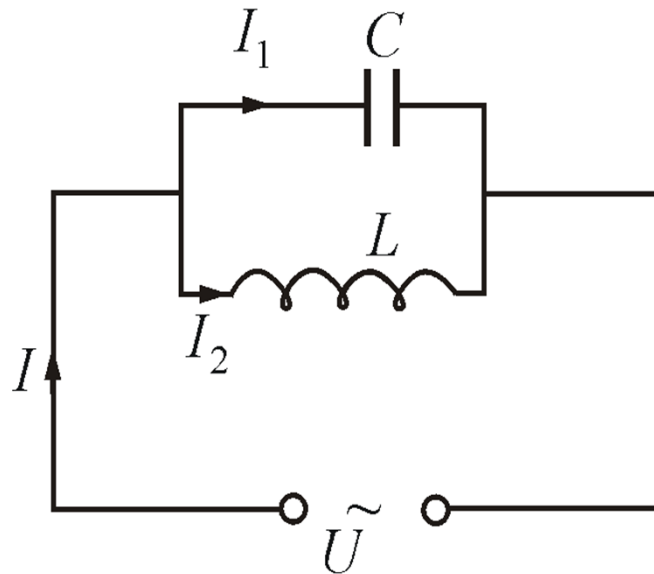
$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ток в цепи определяется активным сопротивлением R и принимает максимально возможное при данном U_m значение. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи $UR = U$, а падение напряжения на конденсаторе UC и катушке индуктивности UL одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений** или **последовательным резонансом**.

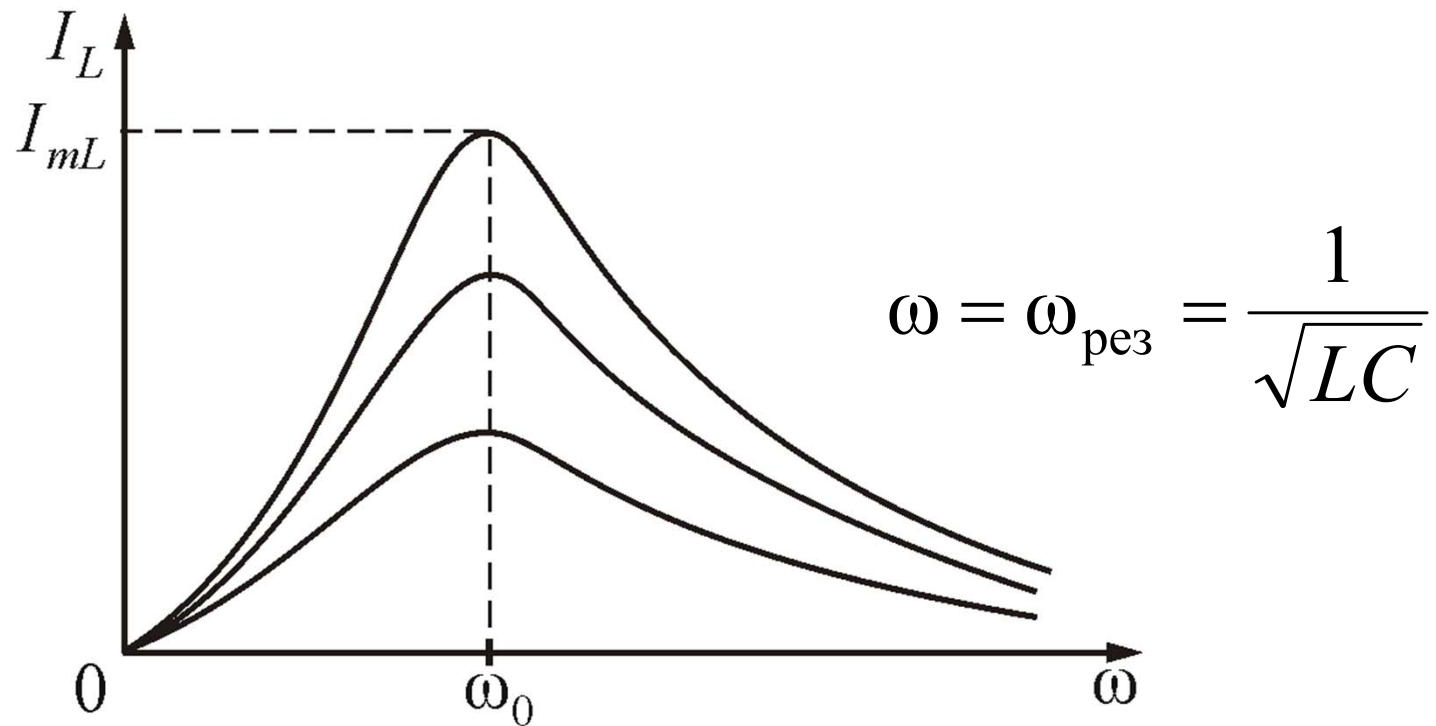


Таким образом, при последовательном резонансе на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой намного большей U_m , что широко используется в различных электронно-усилительных устройствах.

В цепях переменного тока содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность наблюдается другой тип резонанса. Он называется резонансом токов.



Резонансные кривые при таком включении реактивных элементов имеют вид, представленный на рисунке.



Явление резкого увеличения амплитуды тока во внешней цепи, при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом токов**, или **параллельным резонансом**. (Используется в резонансных усилителях, приемниках).

Соответствие между механическими и электрическими величинами.

Механические величины Электрические величины.

Координата	x	Заряд	q
Скорость	v	Сила тока	i
Масса	m	Индуктивность	L
Жесткость пружины	k	Величина обратная емкости	$1/C$
Потенциальная энергия	$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$	Энергия электрич. поля	$W_{\text{э}} = \frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2}$