Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение (ДУ) — это уравнение, которое связывает независимые переменные, искомую функцию и производные искомой функции.

Дифференциальное уравнение для отыскания одной независимой переменной называется ***обыкновенным***.

Порядок ДУ определяется порядком старшей производной, входящей в уравнение.

Нахождение решения ДУ называется его ***интегрированием***, потому что в большинстве случаев это действительно так.

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную.

ДУ может быть задано в трех формах:

явная	$y' = f(x, y)$
неявная	$F(x, y, y') = 0$
дифференциальная	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.

- **Общим решением** любого дифференциального уравнения называется функция вида $y = \varphi(x; C)$.
- Если вместо произвольной постоянной С подставим какое-либо число, то получим **частное решение.**
- Если переменной х и переменной у задать фиксированные значения$x = x_0; y = y_0$

, то говорят, что заданы начальные условия:

$y(x_0) = y_0$.

- **Решить задачу Коши** – это значит найти частное решение , удовлетворяющее заданным начальным условиям, причем это решение будет единственным.

Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Для того, чтобы проинтегрировать данное дифференциальное уравнение, приведём его к уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Интегрируя левую часть равенства по y, а правую по x, найдём общий интеграл уравнения:

$$F(y) = \Phi(x) + \mathrm{C}$$

Здесь $F(y)$ и $\Phi(x)$ − первообразные функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$: $\Phi(x) = \int f_1(x)dx$, $F(y) = \int \frac{1}{f_2(y)}\, dy$

Пример 1

Найти частное решение уравнения $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$.

Решение. Произведём разделение переменных, для этого обе части уравнения умножим на произведение $\sqrt{x}\sqrt{y}$: $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx$ или $y^{\frac{1}{2}}dy = 3x^{\frac{1}{2}}dx$. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int y^{\frac{1}{2}}dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx; \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Умножив обе части уравнения на $\frac{3}{2}$ и положив $\frac{3}{2}C = C_{1,}$ получим

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C_1.$$

Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется **однородной функцией** к-го порядка (к-той степени), если при умножении каждого аргумента на произвольное число λ функция умножается на $\lambda^к$, т.е. имеет место равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **однородным**, если $f(x,y)$ – однородная функция.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $u = \frac{y}{x}$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция.

Пусть дано однородное дифференциальное уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Введём новую функцию $\frac{y}{x} = u \quad \Longrightarrow \quad y = u \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y' = u' \cdot x + u$.

Если подставить полученные величины в заданное уравнение, то оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = f(u) \quad \Longrightarrow \quad x\,\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

Разделим переменные и проинтегрируем затем полученное равенство:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

Вычислив неопределённые интегралы, найдём общий интеграл заданного уравнения

$$F(u) = \ln x + \ln C \quad \Longrightarrow \quad F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Cx$$

Пример 2

Решить уравнение $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$.

Решение. Уравнение $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$ однородное первой степени. Подстановка $y=tx$. Найдем дифференциал функции: $dy=tdx+xdt$. Подставим значения y и dy в уравнение:

$(2\sqrt{xtx}-x)(tdx+xdt)+txdx=0$. Произведём в уравнении упрощения:

$2x\sqrt{t}tdx+2x^2\sqrt{t}dt-txdx-x^2dt+txdx=0;$

$t(2\sqrt{t}-1)xdx+x^2(2\sqrt{t}-1)dt=0$. Разделим переменные в уравнении:

$\dfrac{xdx}{x^2}+\dfrac{(2\sqrt{t}-1)dt}{t(2\sqrt{t}-1)}=0,\ \dfrac{dx}{x}+\dfrac{dt}{t}=0$. Интегрируем уравнение:

$\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{dt}{t}=\ln C, \ln x+\ln t=\ln C$ или $xy=C$, или $y=\dfrac{C}{x}$.

Линейные ДУ 1-го порядка
$y' + P(x)y = Q(x)$

Метод подстановки

- 1. Его решение будем искать в виде произведения двух функций.
- $y = U \cdot V$, где $U = U(x), V = V(x)$.
- 2. Найдем производную $\boldsymbol{y' = U'V + UV'}$
- 3. Подставим y и $\boldsymbol{y'}$ в данное уравнение: $U'V + UV' + P(x)UV = Q(x)$
- 4. Сгруппируем слагаемые с U

$$U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x)$$

- 5. Функцию V выберем произвольно из условия

$$V' + P(x)V = 0$$

- 6. Решим уравнение $V' + P(x)V = 0$ – оно с разделяющимися переменными. Найдем V.
- 7. Решим оставшееся уравнения из п.4 при условии п.5

$U'V = Q(x)$– оно с разделяющимися переменными. Найдем U.

- 8. Подставим найденные U и V в искомую функцию y.

Пример 3

Найти общее решение уравнения $y' - y\,tg\,x = \sin x$.

Решение. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение принимает вид $u'v + uv' - uv\,tg\,x = \sin x$ или $u'v + u(v' - u\,tg\,x) = \sin x$ (*)

Решая уравнение $v' - v\,tg\,x = 0$, получим простейшее частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = v\,tg\,x; \quad \frac{dv}{v} = tg\,x\,dx; \quad \ln|v| = -\ln|\cos x|, \text{ откуда } v = \frac{1}{\cos x}.$$

Подставляя v в уравнение (*), получим уравнение: $u' \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \sin x$, из которого находим u: $\dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \sin x; \quad du = \sin x \cos x\,dx$, откуда

$$u = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Итак, искомое общее решение: $y = uv = \left(\dfrac{\sin^2 x}{2} + C\right)\dfrac{1}{\cos x}$.

Уравнения Бернулли
$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

- При помощи подстановки сведем уравнение Бернулли к линейному.
- Подстановка $\mathrm{z} = \boldsymbol{y}^{\mathbf{1}-\boldsymbol{n}}$

УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Уравнения вида $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ или $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$.

Следовательно: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$.

Тогда само дифференциальное уравнение эквивалентно $dU(x,y) = 0$, значит, сама функция $U(x,y)$ должна сохранять постоянное значение $U(x,y) = C$.

КРИТЕРИЙ уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Действительно, выражение полного дифференциала функции двух переменных имеет вид:

$$dU = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy.$$

Сравним с левой частью уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, то можно записать, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Продифференцировав первое равенство по переменной y, а второе – по переменной x, получим $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Из теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка получим равенство производных $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример 4

Найти общее решение уравнения

$(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$

Решение.

1) Проверяем условие: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2y + 3) = 3x^2 + 2$ $\quad\quad$ $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2x + 3y^2) = 3x^2 + 2$

2) Находим функцию $U(x, y)$. Для этого интегрируем по x функцию $P(x, y)$. Переменная y при этом считается постоянной

$$U(x, y) = \int (3x^2y + 2y + 3)dx = y\int 3x^2dx + 2y\int dx + 3\int dx =$$

$$= x^3y + 2xy + 3x + \varphi(y)$$

3) $\frac{\partial U}{\partial y} = \left(x^3y + 2xy + 3x + \varphi(y)\right)'_y = (x^3y)'_y + (2xy)'_y +$

$+ (3x)'_y + \varphi'_y(y) = x^3 + 2x + \varphi'_y(y)$, т.к. $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$

$$x^3 + 2x + \varphi'_y(y) = x^3 + 2x + 3y^2$$

$$\varphi'_y(y) = 3y^2$$

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3$$

$$U(x, y) = C$$

$$x^3y + 2xy + 3x + y^3 = C$$

Ответ: $x^3y + 2xy + 3x + y^3 = C$

Дифференциальные уравнения высших порядков

- Дифференциальные уравнения, порядок которых больше единицы, называются уравнениями **высших порядков**.

УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

П/№	Тип дифференциального уравнения	Интегрирование подстановкой	Примеры
1.	$y'' = f(x)$ /правая часть не содержит y и y'/	Интегрируется дважды	$y'' = \sin^2 x$; $y'' = 3^x + \cos x$; $y'' = tg^2 x$
2.	$y'' = f(y; y')$ /правая часть не содержит x/	$p = p(y)$; $y'' = p' * p = \frac{dp}{dy} * p$	$y'^2 + 2yy'' = 0$; $1 + y'^2 = 2yy'$; $yy'' = y^2 + y'^2$; $yy'' + y = y'^2$
3.	$y'' = f(x; y')$ /правая часть не содержит y/	$y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$	$xy'' = y'^2$; $y''(e^x + 1) + y' = 0$; $2xy' + y'' = y'^2 - 1$; $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$

Пример 5

Пусть задано уравнение $y'' = 2\cos 2x$

Решение. Запишем цепочку равенств:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\cos 2x \qquad \Longrightarrow \qquad d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\cos 2xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int 2\cos 2xdx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \sin 2x + C_1$$

Последнее уравнение проинтегрируем ещё раз

$$dy = (\sin 2x + C_1)dx \qquad \Longrightarrow \qquad y = \int (\sin 2x + C_1)\,dx$$

$$y = -\frac{\cos 2x}{2} + C_1 x + C_2$$

Таким образом, мы получили общее решение заданного уравнения 2-го рпорядка.

Ответ: $y = -\frac{\cos 2x}{2} + C_1 x + C_2$.

Пример 6

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''=\frac{y'}{x}+x^2 \qquad (1)$$

Решение. Сделаем подстановку $y' = p(x) \quad \Longrightarrow \quad y'' = p'(x)$

Тогда заданное уравнение примет вид:

$$p' = \frac{p}{x}+x^2 \quad \Longrightarrow \quad p' - \frac{p}{x} = x^2 \qquad (2)$$

Таким образом, уравнение 2-го порядка сведено к линейному уравнению 1-го порядка. Решим его методом Бернулли. Введём новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$, положив $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right)v + uv' = x^2 \qquad (3)$$

Найдём функцию $u(x)$ из условия

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{u}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad u = x$$

Подставляя $u = x$ в равенство (3), получим уравнение для функции v:

$$uv' = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Отсюда следует, что

$$p = uv = x\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{2}x^3 + Cx^2$$

Интегрируя последнее равенство, найдём общее решение заданного уравнения:

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{C}{2}x^2 + C_1$$

Ответ: $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{C}{2}x^2 + C_1$.

Пример 7

Найти решение задачи Коши

$$3y^{'}y^{''} = 2y, \qquad y(0) = 1, \qquad y^{'}(0) = 1 \qquad (1)$$

Решение. Сделаем подстановку

$$y^{'}(x) = p(y) \quad \Longrightarrow \quad y^{''} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{x} = p^{'} \cdot p \qquad (2)$$

Уравнение (1) примет вид:

$$3p \cdot p^{'} \cdot p = 2y \quad \Longrightarrow \quad 3p^2 \cdot p^{'} = 2y$$

В результате подстановки получили уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$3p^2 \cdot \frac{dp}{dy} = 2y \quad \Longrightarrow \quad 3p^2 dp = 2ydy \qquad (3)$$

Интегрируя обе части равенства (3), найдём функцию $p(y)$:

$$\int 3p^2 dp = \int 2ydy \quad \Longrightarrow \quad p^3 = y^2 + C_1 \quad \Longrightarrow \quad p = \sqrt[3]{y^2 + C_1}$$

Используя заданные начальные условия для уравнения (1), получим начальные условия для уравнения (3):

$$p(1) = 1$$

Используя начальное условие $p(1) = 1$, определим произвольную постоянную C_1 и частное решение уравнения (3):

$$1 = \sqrt[3]{1 + C_1} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \sqrt[3]{y^2} = y^{2/3}$$

Найденную функцию $p(y)$ подставим в равенство $y' = p(y)$. Получим:

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y^{2/3}} = dx \quad \Longrightarrow \quad y^{-2/3}dy = dx$$

Проинтегрировав последнее равенство найдём функцию y:

$$\int y^{-2/3}\,dy = \int dx \quad \Longrightarrow \quad 3\sqrt[3]{y} = x + C_2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{27}(x + C_2)^3$$

Чтобы определить произвольную постоянную C_2, используем начальные условия для исходного уравнения: $y(0) = 1$. Получим

$$1 = \frac{1}{27}(0 + C_2)^3 \quad \Longrightarrow \quad (C_2)^3 = 27 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 3$$

Тогда решение задачи Коши для заданного уравнения 2-го порядка будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{27}(x + 3)^3$$

Ответ: $y = \frac{1}{27}(x + 3)^3$.

Интегрирование дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, a_1 и a_2-постоянные, k_1 и k_2-корни характеристического уравнения: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

П./№	Характер корней и	Общее решение	Примеры
1.	$k_1 \neq k_2$; k_1, k_2 - вещественные	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, $c_1, c_2 - const$	$y'' - 7y' + 12y = 0$; $y'' - 8y' + 7y = 0$
2.	$k_1 = k_2 = k$ - вещественные	$y = (c_1 + xc_2)e^{kx}$, $c_1, c_2 - const$	$y'' - 6y' + 9y = 0$, $y'' - 24y' + 144 = 0$
3.	$k_{1,2} = a \pm ib$ - комплексные	$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx), c_1, c_2 - const$	$y'' + y' + y = 0; y'' + 100y = 0$

Пример 8

Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' - 6y = 0.$

Решение. Запишем характеристическое уравнение: для этого заменим функцию *y* и ее производные *y*′ и *y*″ соответствующими степенями, получим $k^2 - 5k - 6 = 0,$

откуда $k_1 = -1,\ k_2 = 6.$

Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}.$

Пример 9

Найти общее решение ДУ $y^{n} - 6y' + 9y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение примет вид

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)^2 = 0 \ ,$$

т.е. уравнение имеет один действительный корень $k = 3$ кратности 2. Значит, частными решениями дифференциального уравнения в этом случае будут

$$y_1 = e^{3x} \qquad y_2 = xe^{3x} \ .$$

Им соответствует общее решение

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x) \ .$$

Пример 10

Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 0$

Решение. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 + 9 = 0,$$

имеющее два мнимых сопряженных корня

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

т.е. получаем общее решение

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Интегрирование методом подбора дифференциального уравнения

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), a_1, a_2 - const$, k_1 и k_2 -корни уравнения $k + a_1 k + a_2 = 0, y = \bar{y} + y^*$,

$\bar{y}$ -общее решение однородного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, y^*$ -частное решение неоднородного уравнения

п/№	Характер корней k_1 и k_2	Правая часть $f(x)$	Частное решение y^*
1.	$k_1 \neq k_2$ - вещественные	$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ $P_n(x) -$ полином степени- n, $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$	$y^* = e^{\alpha x} * Q_n(x)$ $Q_n -$ Полином степени n с неопределенными коэфициентами
2.		$\alpha = k_1, \alpha \neq k_2$	$y^* = xe^{\alpha x} * Q_n(x)$
3.	$k_1 = k_2 = k$ - вещественный	$\alpha \neq k$	$y^* = e^{\alpha x} * Q_n(x)$
4.		$\alpha = k$	$y^* = x^2 e^{\alpha x} * Q_n(x)$
5.	$k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$ $k_1, k_2 -$ вещественные	$f(x) = e^{\alpha x}\{P(x)\cos\beta x + Qm(x)\sin\beta x\}$ $P_n(x), Q_m(x) -$ полиномы степеней n и m.	$y^* e^{\alpha x}\{U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x\}$, $s = \max(m, n); U_s u V_s -$ полиномы степени с неопределенными коэффициентами
6.	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексные		$y^* = xe^{\alpha x}\{U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x\}$

Алгоритм решения

1. Запишем соответствующее однородное уравнение.
2. Составим соответствующее характеристическое уравнение.
3. Решим характеристическое уравнение.
4. Составим фундаментальную систему решений (ФСР).
5. Запишем общее решение однородного уравнения.
6. Составим искомое частное решение с неопределенными коэффициентами.
7. Подставим частное решение в данное уравнение.
8. Методом неопределенных коэффициентов найдем эти коэффициенты.
9. Напишем частное решение.
10. Запишем общее решение ДУ по теореме (о структуре общего решения) в виде: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$).

Пример 11

Найти общее решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 5y' + 6y = 12xe^{x}$$

Решим сначала однородное уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$. Запишем характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k_1 = -2, \qquad k_2 = -3$$

Запишем фундаментальную систему решений и общее решение однородного уравнения:

$$y_1(x) = e^{-2x},$$

$$y_2(x) = e^{-3x} \qquad \Longrightarrow \qquad y_0(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$$

Найдём теперь частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим правую часть уравнения и запишем её характеристику:

$$f(x) = 12xe^{x}, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = 1$$

Так как $\gamma \neq k_1 \neq k_2$, поэтому частное решение нужно искать в виде:

$$y^*(x) = e^x(Ax + B)$$

Чтобы найти коэффициенты A и B, вычислим производные функции $y^*(x)$ и подставим их в заданное уравнение:

$$(y^*)' = e^x(Ax + B) + Ae^x, \qquad (y^*)'' = e^x(Ax + B) + 2Ae^x,$$

$$y'' + 5y' + 6y = 12xe^x$$

$$e^x(Ax + B) + 2Ae^x + 5(e^x(Ax + B) + Ae^x) + 6e^x(Ax + B) = 12xe^x$$

Разделив обе части уравнения на $e^x \neq 0$ и приведя подобные члены, получим равенство двух многочленов:

$$12Ax + (7A + 12B) = 12x$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, запишем систему для определения коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 7A + 12B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \qquad A = 1, \qquad B = -\frac{7}{12}$$

Тогда $y^*(x) = e^x\left(x - \frac{7}{12}\right)$. Соответственно, общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + e^x\left(x - \frac{7}{12}\right).$$