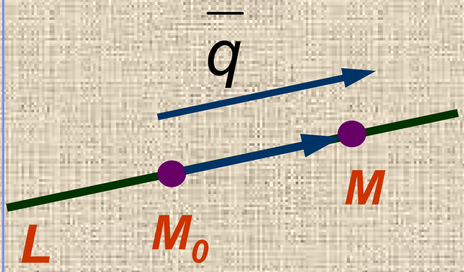
Прямая в пространстве

- Каноническое уравнение прямой
- Параметрическое уравнение прямой
- Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей
- Угол между двумя прямыми
- Угол между прямой и плоскостью
- Условие принадлежности двух прямых одной плоскости
- Точка пересечения прямой и плоскости

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая *L* проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\overline{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\overline{q} = \{m; n; p\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

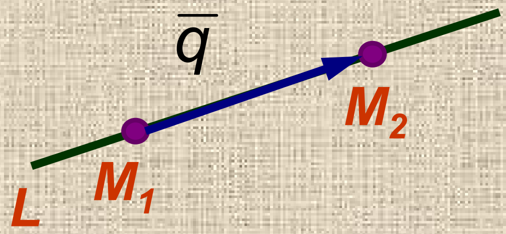
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

Каноническое уравнение прямой

$\overline{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t \end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}}$$

Параметрическое уравнение прямой

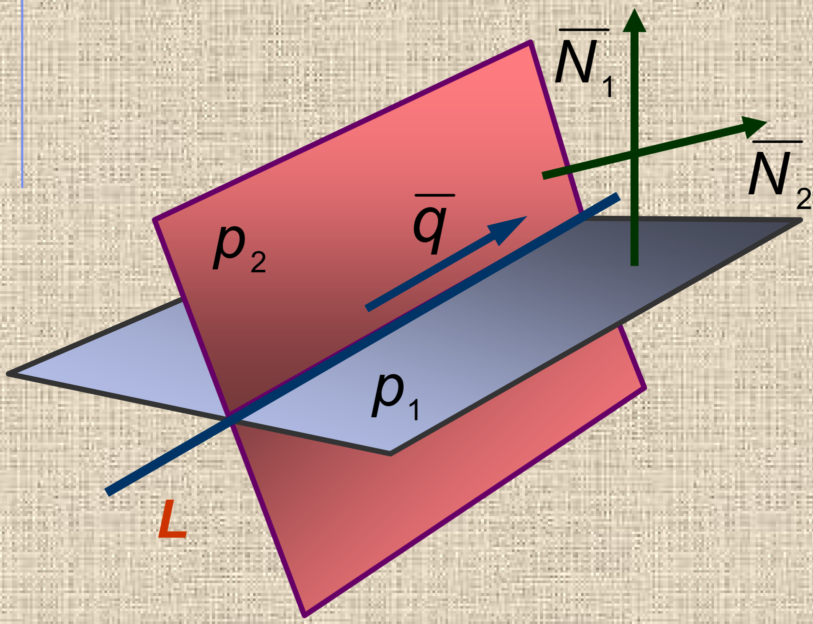
Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей

Пусть две непараллельные плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Эти плоскости определяют единственную прямую в пространстве:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей

$$\left.\begin{array}{l} \overline{q} \perp \overline{N}_1 \\ \overline{q} \perp \overline{N}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{q} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$$

Пример

Написать каноническое уравнение прямой: $\begin{cases} 2x+3y-z+2=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

Найдем точку, принадлежащую прямой, то есть удовлетворяющую системе уравнений.

Пологая z равному любому числу, например, z = 0, получим:

$$\begin{cases} 2x+3y+2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow$$

Точка $M_0(11; -8; 0)$ – принадлежит прямой

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\overline{q} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$$

$$\boxed{\frac{x-11}{4} = \frac{y+8}{-3} = \frac{z}{-1}}$$

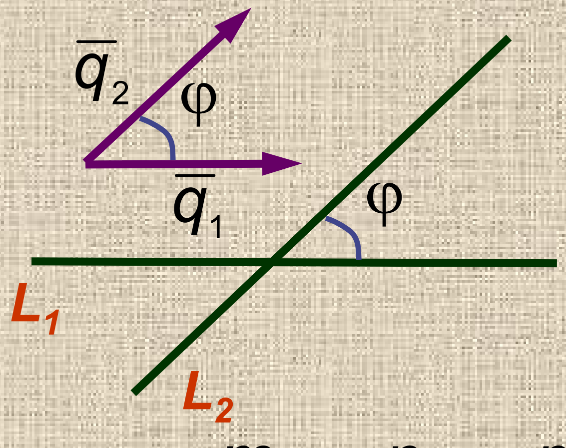
Угол между прямыми

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Углом между этими прямыми называется угол между направляющими векторами к этим прямым.

$$\overline{q}_1=\{m_1; n_1; p_1\} \qquad \overline{q}_2=\{m_2; n_2; p_2\}$$



$$\cos\varphi=\frac{|\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}=$$

$$=\frac{|m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad L_1\perp L_2 \Leftrightarrow m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$$

Угол между прямой и плоскостью

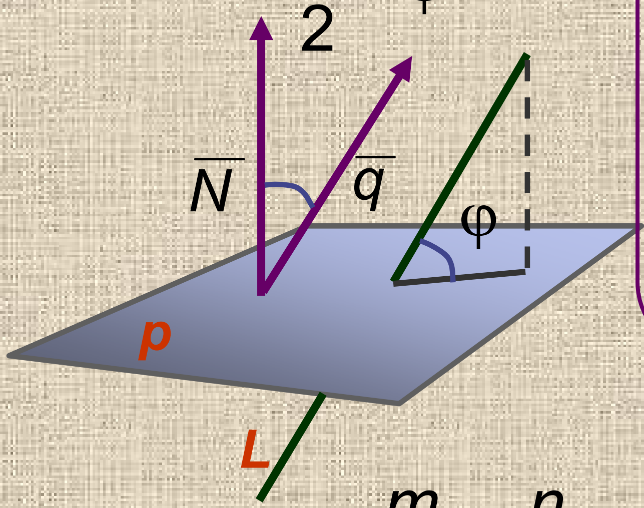
Пусть прямая **L** задана каноническим уравнением:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

Плоскость **p** задана общим уравнением: $Ax+By+Cz+D=0$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.

$$\frac{\pi}{2}-\varphi$$



$$\cos(\overline{q},\overline{N})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\left|\overline{q}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|}=$$

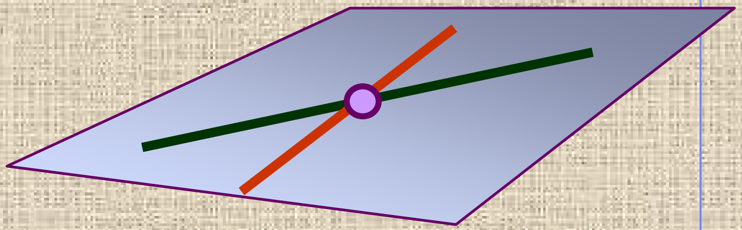
$$=\frac{\left|m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$L\perp p\;\Leftrightarrow\;\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

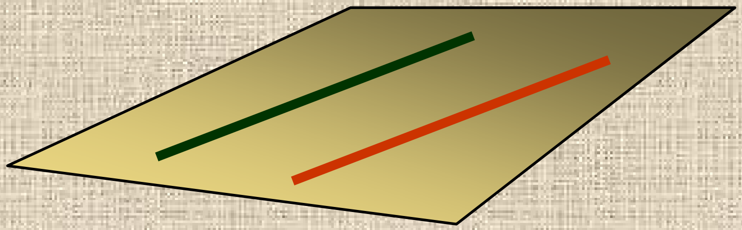
$$L\parallel p\;\Leftrightarrow\;m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

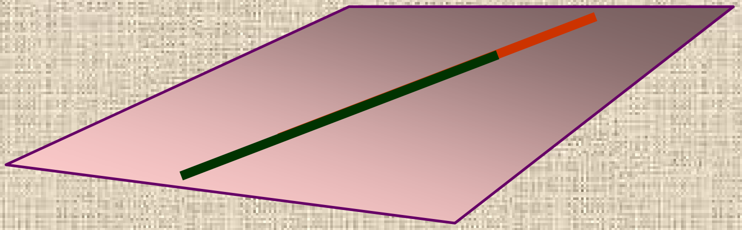
Две прямые в пространстве могут пересекаться,



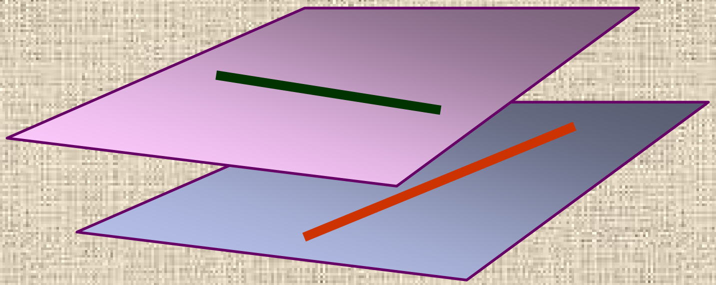
быть параллельными,



совпадать,



и скрещиваться.



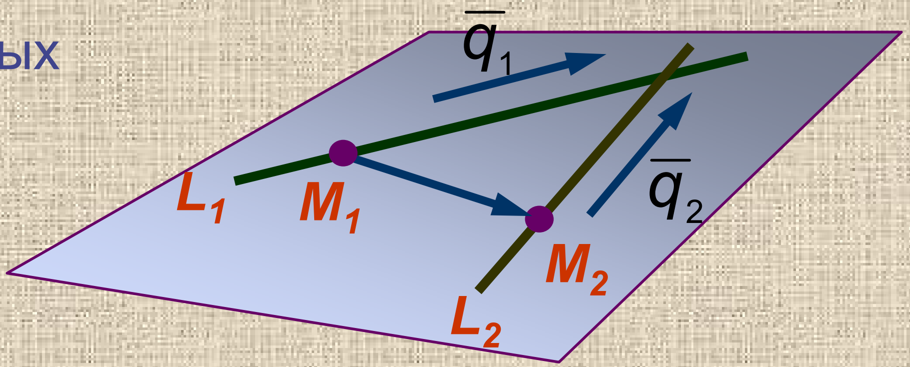
В первых трех случаях прямые лежат в одной плоскости.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:



$$\overline{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$$

$$\overline{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$

были компланарны.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

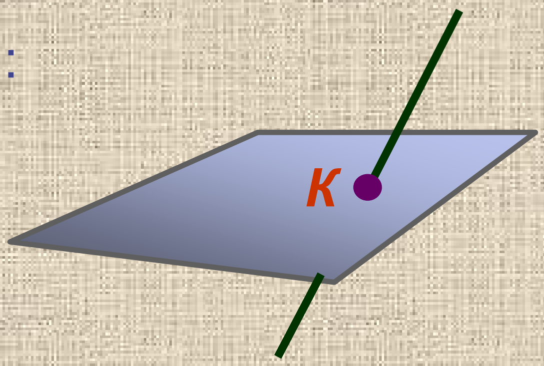
Точка пересечения прямой и плоскости

При вычислении координат точки пересечения прямой и плоскости

$$L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad p: \quad Ax+By+Cz+D=0$$

следует совместно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$



При этом необходимо:

- Записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Точка пересечения прямой и плоскости

- Подставить в уравнение плоскости вместо ***x; y; z***:

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

- Решить полученное уравнение относительно ***t***:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

- Подставить t_0 в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x_K = mt_0 + x_0 \\ y_K = nt_0 + y_0 \\ z_K = pt_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow \quad K(x_K; y_K; z_K)$$

Пример

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1} \qquad y+5z+6=0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t \\ z=t+2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t+5(t+2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad 10t+16=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=-1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3\cdot(-1.6)+1 \\ y=5\cdot(-1.6) \\ z=-1.6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3.8 \\ y=-8 \\ z=0.4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-3.8;-8;0.4)}$$