НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В дифференциальном исчислении рассматривались методы вычисления производной заданной функции. Теперь мы займемся обратной задачей: по данной функции f(x) требуется найти такую функцию, для которой f(x) была бы производной.

Неопределённый интеграл.

Множество всех первообразных F(x)+C функции $f(x)$ на некотором промежутке называется неопределённым интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

$\int$ - знак неопределённого интеграла

F(*x*)+C – множество всех первообразных

C – постоянная интегрирования

Процесс нахождения первообразной функции называется интегрированием, а раздел математики- интегральным исчислением.

Свойства неопределённого интеграла.

- 1^0. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2^0. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е

$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int d\,F(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

3^0. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int \big(f(x) \pm g(x) \big) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1^0.

$$\left(\int \big(f(x) \pm g(x) \big) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

$$\left(\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx \right)' = \left(\int f(x)\, dx \right)' \pm \left(\int g(x)\, dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

4^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx\,, \quad a \neq 0$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1^0:

$$\left(\int a \cdot f(x)\,dx\right)' = a \cdot f(x)$$

$$\left(a \cdot \int f(x)\,dx\right)' = a \cdot \left(\int f(x)\,dx\right)' = a \cdot f(x)$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

1. $dx = \frac{1}{a} d(ax)$

2. $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$,

3. $xdx = \frac{1}{2} dx^2$,

4. $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$.

Основные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Метод интегрирования по частям

- Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции имеющие непрерывные производные. Тогда

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

- Интегрируя это равенство, получим :

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int vdu$$

- Полученная формула называется
- **формулой интегрирования по частям** .
- Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U u dv

Затем, после нахождения их , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Замечания.

1) при нахождении интеграла формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз, постепенно «улучшая» остающийся интеграл;

2) формула интегрирования по частям – единственная возможность найти интегралы вида

$$\int P_n(x)\cdot\varphi(x)dx\,,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $\varphi(x)$ – показательная, логарифмическая, тригонометрическая или обратная тригонометрическая функция;

3) с помощью формулы интегрирования по частям находятся также циклические интегралы:

$$\int a^{\alpha x}\cdot\cos\beta x dx\,,\quad \int a^{\alpha x}\cdot\sin\beta x dx\,.$$

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Пример

Найти $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x}=t,\ x=t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2}2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$= \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2)+C.$$

Интегрирование рациональных функций

- Дробно – рациональная функция
- Простейшие рациональные дроби
- Разложение рациональной дроби на простейшие дроби
- Интегрирование простейших дробей
- Общее правило интегрирования рациональных дробей

Дробно – рациональная функция

Дробно – рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

многочлен степени m

многочлен степени n

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$, в противном случае дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Дробно – рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду: $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-5x+9 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-2x^3} & \boxed{x^3+2x^2+4x+3} \\
\qquad -2x^3-5x+9 & \\
\qquad\;\; \underline{2x^3-4x^2} & \\
\qquad\qquad -4x^2-5x+9 & \\
\qquad\qquad\;\; \underline{4x^2-8x} & \\
\qquad\qquad\qquad -3x+9 & \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{3x-6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{15} &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-5x+9}{\boxed{x-2}} = \boxed{x^3+2x^2+4x+3} + \frac{\boxed{15}}{\boxed{x-2}}$$

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{A}{x-a}$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{A}{(x-a)^k} \qquad (k \geq 2;\ k \in N)$$

$$(\mathrm{III})\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (p^2-4q<0)$$

$$(\mathrm{IV})\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad (p^2-4q<0;\quad k \geq 2;\ k \in N)$$

Называются ***простейшими рациональными дробями*** $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$ типов.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Теорема: Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x)=\boxed{(x-x_1)}\cdot\boxed{(x-x_2)^k}\cdot\ldots\cdot\boxed{(x^2+p_1x+q_1)}\cdot$$

$$\cdot\boxed{(x^2+p_2x+q_2)^s}$$

можно представить, притом единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\boxed{\frac{A}{x-x_1}}+\boxed{\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}}$$

$$+\boxed{\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1}}+\boxed{\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+}$$

$$\boxed{+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_2x+q_2)^s}}$$

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3}$$

$$\frac{x^3+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{7x^2+8x+9}{(x-4)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов *A, B, C, D*… применяют два метода: ***метод сравнивания коэффициентов и метод частных значений переменной***. Первый метод рассмотрим на примере.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Представить дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\boxed{\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}}$$

$$\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю

$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C=2x^2-3x-3$$

Приравняем числители получившейся и исходной дробей

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{c} A+B=2 \\ -2A+C-B=-3 \\ 5A-C=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \\ C=-2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях х

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

I $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a| + C}$$

II $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) =$$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

III $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

Интегрирование простейших дробей

$$\int \frac{3x+1}{[x^2+2x]+10}dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9}dx =$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+9}dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} -$$

$$- \frac{2}{3} arctg \frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{2}{3} arctg \frac{t}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{2}{3} arctg \frac{x+1}{3} + C}$$

Общее правило интегрирования рациональных дробей

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами
- Найти неопределенные коэффициенты методом сравнения коэффициентов или методом частных значений переменной.
- Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

Приведем дробь к правильному виду.

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^3 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x \\
\cline{2-2}
-\;\underline{x^5 + 2x^4 + x^3} & x^2 - 2x + 5 \\
-2x^4 + x^3 + 4x + 4 & \\
-\;\underline{-2x^4 - 4x^3 - 2x^2} & \\
5x^3 + 2x^2 + 4x + 4 & \\
-\;\underline{5x^3 + 10x^2 + 5x} & \\
-8x^2 - x + 4 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 - 2x + 5 + \frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Пример

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{-8x^2-x+4}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Представим дробь в виде суммы простейших дробей

Разложим знаменатель правильной дроби на множители

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=-8x^2-x+4$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right| \begin{array}{c} A=4 \\ -C=-3 \\ 4A+2B+C=-5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-12 \\ C=3 \end{cases}$$

Найдем неопределенные коэффициенты методом частных значений переменной

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{4}{x}-\frac{12}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Пример

$$I=\int x^2-2x+5+\frac{4}{x}-\frac{12}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx+4\int\frac{dx}{x}-12\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\boxed{\frac{x^3}{3}-x^2+5x+4\ln|x|-12\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+C}$$

Интегрирование иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов,содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей.Их можно найти следующим образом: **под радикалом выделить полный квадрат**

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$

При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Пример. Найти интеграл: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$

Решение: Так как

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right), \text{то}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{4} = t \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C$$

Пример.Найти интеграл : $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx.$

Решение: Выделим полный квадрат :

$$6-2x-x^2 = -(x^2+2x-6) = -((x+1)^2-7) = 7-(x+1)^2,$$

Сделаем подстановку: $\begin{bmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}$ Тогда:

$$I = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}} dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(7-t^2) + 3\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$

$$= -\sqrt{7-t^2} + 3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = -\sqrt{6-2x-x^2} + 3\cdot\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} + C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, где \quad a \neq b$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right].$$

Пример. Найти интеграл: $\int \sin 3x \cos 7x\,dx$

Решение: Воспользуемся формулой

$$\left[\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right]\right]$$

Получим: $\frac{1}{2}\left[\sin(3-7)x + \sin(3+7)x\right]$

Тогда

$$\int \sin 3x\cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin(-4x) + \sin 10x)\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 10x - \sin 4x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 4x\right) + C = \frac{\cos 10x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$$

Пример. Найти интеграл: $\int \cos 6x \cdot \cos x\,dx$

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]$$

Получим:

$$\cos 6x \cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(6-1)x + \cos(6+1)x\right]$$

Тогда

$$\int \cos 6x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 7x)\,dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 7x}{14} + C$$

Пример. Найти интеграл: $\int \sin 2x \cdot \sin \frac{2x}{3} dx$.

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

Получим: $\sin 2x \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos(2-\frac{2}{3})x - \cos(2+\frac{2}{3})x\right]$

Тогда $\int \sin 2x \sin \frac{2x}{3} dx = \frac{1}{2}\int (\cos \frac{4x}{3} - \cos \frac{8x}{3}) dx =$

$$= \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\sin \frac{4x}{3} - \frac{3}{8}\sin \frac{8x}{3} + C) = \frac{3}{8}\sin \frac{4x}{3} - \frac{3}{16}\sin \frac{8x}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{16}(2\sin \frac{4x}{3} - \sin \frac{8x}{3}) + C$$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) Подстановка $\sin x = t,$ если $n -$ целое положительное **нечетное** число;

2) Подстановка $\cos x = t,$ если $m -$ целое положительное **нечетное** число;

3) Формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

Если m и $n -$ целые **неотрицательные четные** числа;

4)Подстановка $tgx = t,$ если $m+n-$ есть **четное отрицательное целое** число.

Пример. Найти интеграл: $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx.$

Решение: Применим подстановку $\sin x = t.$ Т.к.n=5 (1 случай).

Тогда $\begin{bmatrix} x = \arcsin t \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (\sqrt{1-t^2})^4 dt = \int t^4 (1-t^2)^2 dt =$$

Получим:

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Пример. Найти интеграл: $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$

Решение: воспользуемся формулой:

$$1)\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$2)\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x cox 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Пример. Найти интеграл:

$$I=\int\frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\int\cos^{-1}x\cdot\sin^{-3}xdx.$$

Решение: Здесь $m+n=-4.$ (4 случай)

Обозначим $tgx=t.$ Тогда $\begin{bmatrix} x=arctgt \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix}$

Получим:

$$I=\int\frac{dt/1+t^2}{1/\sqrt{1+t^2}\cdot t^3/(\sqrt{1+t^2})^3}=\int\frac{dt/1+t^2}{t^3/(\sqrt{1+t^2})^2}=\int\frac{dt/1+t^2}{t^3/1+t^2}=$$

$$=\int\frac{1+t^2}{t^3}dt=\int t^{-3}dt+\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}ctg^2x+\ln|tgx|+C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными

$\sin x$ и $\cos x$,над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление)

Принято обозначать $R(\sin x;\cos x),$ *где* $R-$ знак рациональной функции.

Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$

Сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$,которая называется **универсальной**

Действительно,

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Поэтому $\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$

Где $R_1(t)$ – рациональная функция от t .Обычно этот способ весьма громоздкий, зато всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ *нечётна относительно* $\sin x$

Т.е $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$,то подстановка $\cos x=t$ рационализирует интеграл;

2)Если функция $R(\sin x;\cos x)$*нечётна относительно* $\cos x$

Т.е. $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$,то делается подстановка $\sin x=t$

3)Если функция $R(\sin x;\cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$

то интеграл $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$

рационализируется подстановкой $tgx=t$.Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(tgx)dx$

Пример: Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$

Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arg tg \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \arg tg \frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$