The background of the image is a spiral-bound notebook with a light beige, textured paper. The spiral binding is visible on the left side. The text is centered on the page.

Исследование функций и построение графиков

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a dark brown cover. The spiral binding is on the left side. A horizontal line is drawn across the page, and the text is centered below it.

Теоретический материал

Содержание

- 1) Область определения функции
- 2) Свойства функции (четность, нечетность, периодичность)
- 4) Точки пересечения функции с осями координат
- 5) Непрерывность функции. Характер точек разрыва
- 6) Асимптоты
- 7) Экстремумы функции. Исследование функции на монотонность
- 8) Выпуклость функции. Точки перегиба

Область определения функции

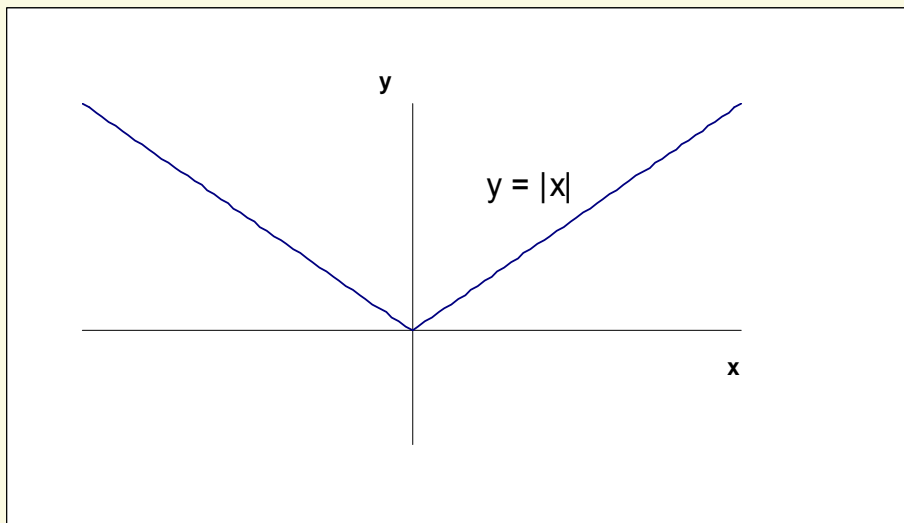
Определение. Областью определения функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена.

Примеры.

$$y = \ln(x + 1) \quad D_f = (-1, +\infty)$$

$$y = \frac{2}{(x - 3)^2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Четные и нечетные функции

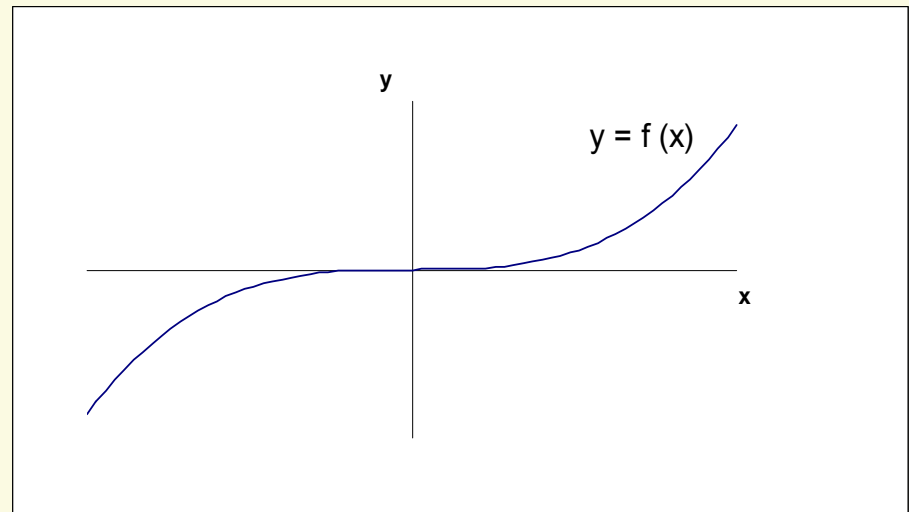


Функция $y=f(x)$
называется четной,
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$$

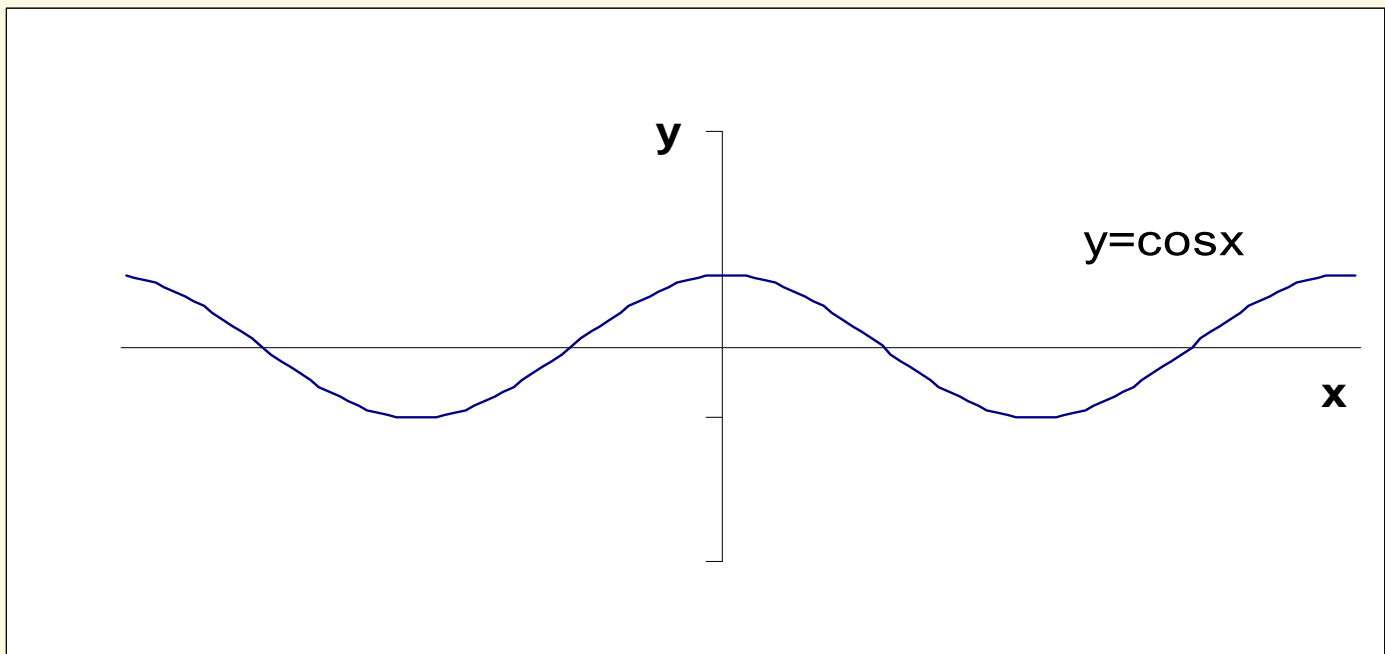
Функция $y=f(x)$
называется нечетной,
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$$



Периодические функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T , что если x принадлежит D_f , то $x \pm T$ также принадлежит D_f и $f(x+T)=f(x)$.



Точки пересечения с осями координат

При исследовании функции необходимо найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $y=0$, а ординаты точек пересечения графика функции с осью Oy находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $x=0$.

Непрерывность

Характер точек разрыва

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если функция определена в точке x_0 и предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0 .

$$x_0 \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются *непрерывными функциями*.

Примеры непрерывных функций: $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=e^x$, $y=P_n(x)$ (многочлен степени n).

Точки разрыва функции

Определение. Точкой разрыва функции называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.

Пример. Функция

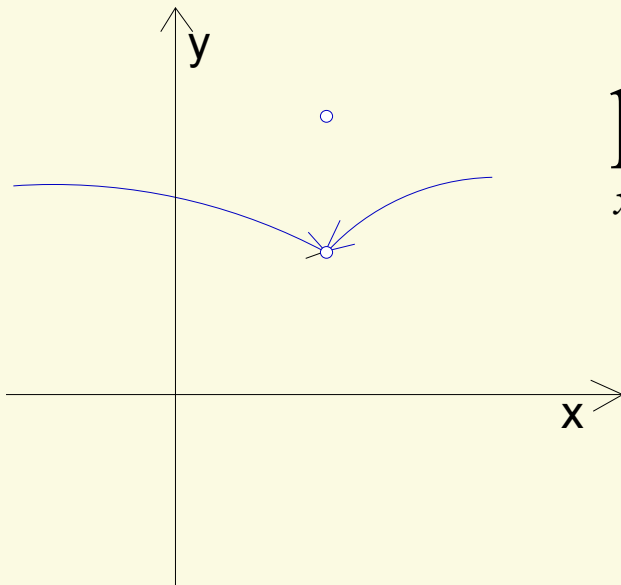
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

разрывна в 0, так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, f(0) = 0$

Классификация точек разрыва

Точки устранимого разрыва

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке x_0 , то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

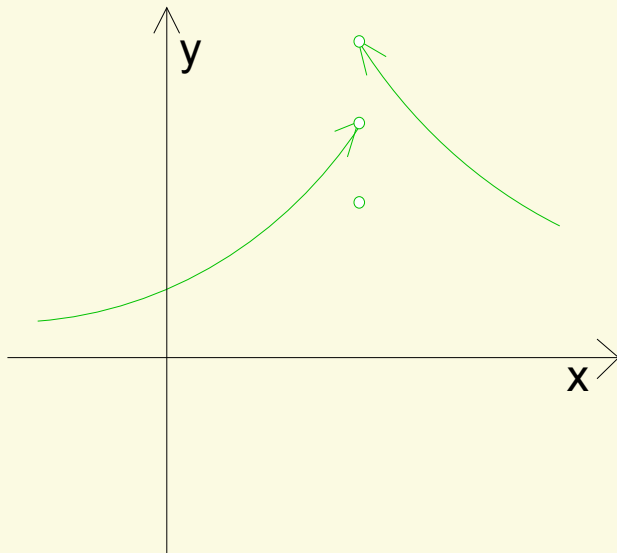


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Классификация точек разрыва

Точки скачка

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка x_0 называется *точкой скачка* (*точкой разрыва I рода*).

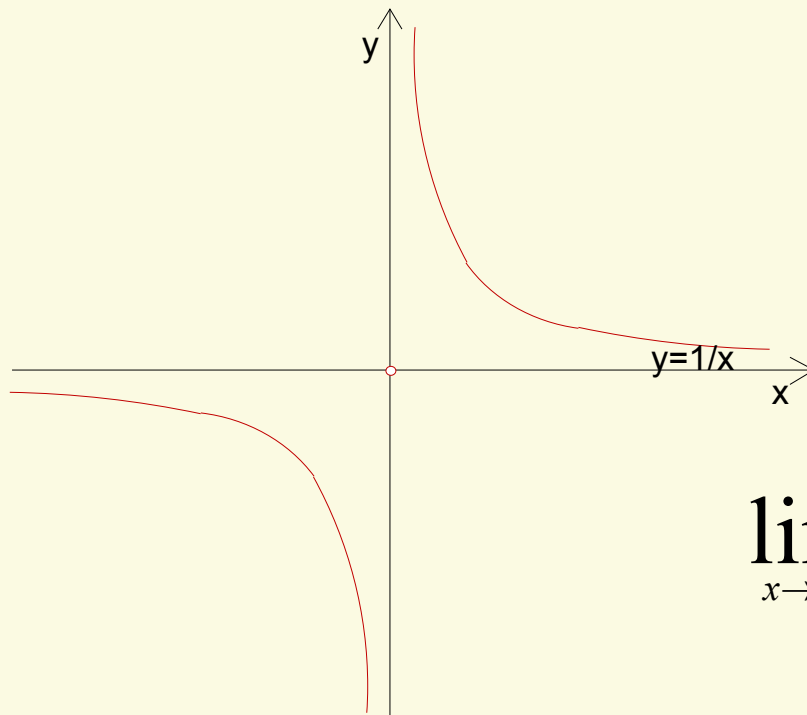


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Классификация точек разрыва

Точки разрыва II рода

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или бесконечен, то точка называется *точкой разрыва II рода*.



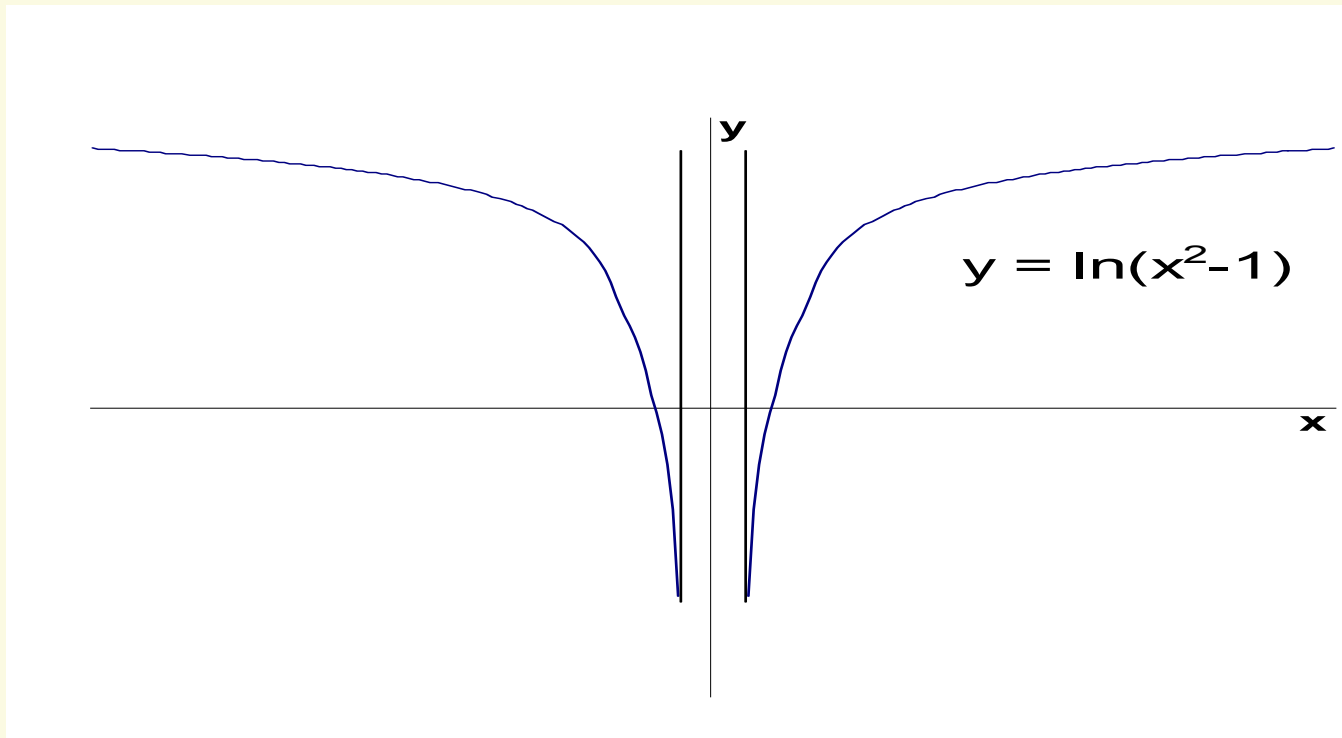
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Вертикальные асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty.$$



Наклонные асимптоты

Если существует прямая $y=kx+b$ такая, что

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, то эта прямая называется

асимптотой графика функции f при $x \rightarrow +\infty$.

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b .$$

Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) . Точка x_0 интервала (a, b) называется точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой проколотовой окрестности точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки минимума и точки максимума функции называются *точками экстремума* функции.

Необходимое условие экстремума. Пусть точка x_0 - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.

Исследование функции на МОНОТОННОСТЬ

Известно, что если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в (a, b) , то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) в (a, b) .

Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1|x$

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

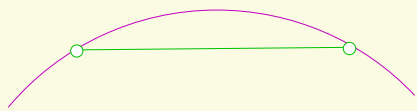
Критические точки функции $x = \pm 1$. $f'(x) > 0$ при $x < -1$ и при $x > 1$; $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$ и при $0 < x < 1$.

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция возрастает

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция убывает

Выпуклость функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется *выпуклой вверх (вниз)* в интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) из того, что $x_1 < x_2$, следует, что часть графика функции между точками $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.



a x_1 x_2 b

функция выпукла вверх



a x_1 x_2 b

функция выпукла вниз

Выпуклость функции.

Точки перегиба

Также говорят, что график функции $f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах (a, b) лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Если график функции в точке $(x_0, f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точка x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$.

Достаточные условия выпуклости функции и существования точек перегиба

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если на интервале (a,b) $f''(x) > 0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вниз, и если на интервале $f''(x) < 0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вверх.

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если в левой и правой полуокрестностях некоторой точки x_0 $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то точка x_0 – точка перегиба функции.

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a dark brown cover. The spiral binding is on the left side. A thin horizontal line is drawn across the page, just above the text.

Практический материал

Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ и построим её график.

- 1). Поскольку знаменатель положителен при всех x , область определения функции - вся ось Ox .
- 2). Функция $f(x)$ - нечётная, поскольку при смене знака x числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

- 3). Поскольку область определения этой элементарной функции -- вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4). Найдём наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ в виде

$y = kx + b$. Имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x \rightarrow -\infty$, так и при $x \rightarrow +\infty$ служит прямая $y = 1x + 0 = x$.

5). Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем:

$f(0) = 0$, причём $x=0$ - единственное решение уравнения $f(x) = 0$. Значит, график $y = f(x)$ пересекает сразу и ось Ox , и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$.

6) Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Очевидно, что $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$; единственная точка, в которой $f'(x) = 0$ - это $x=0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на всей оси Ox , а в стационарной точке $x=0$ имеет горизонтальную касательную.

7) Найдём вторую производную:

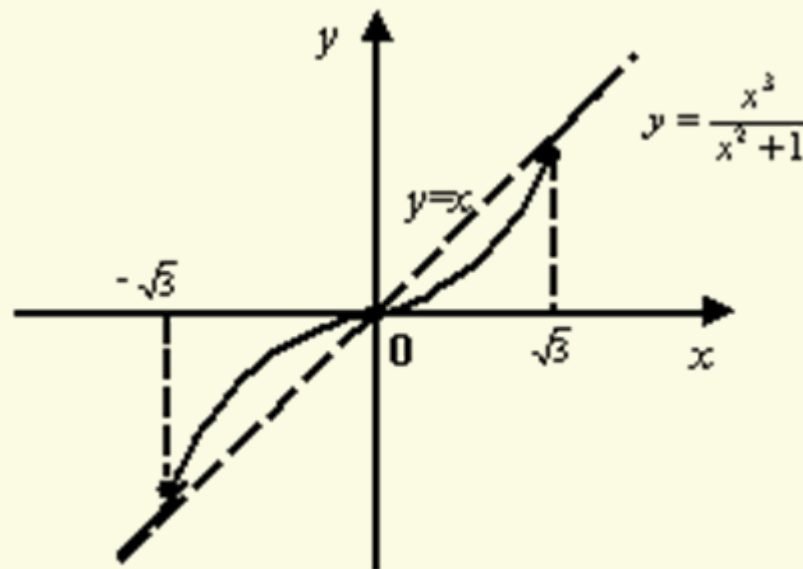
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех x .

Числитель имеет корни $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$, при этом $f''(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ - на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ выполняется обратное неравенство $f''(x) < 0$, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых $f''(x) = 0$, то есть точки $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$, являются точками перегиба.

8). Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$



Исследуем функцию $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построим её график.

- 1). Ясно, что $D(f) = R$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом x . Область значений $E(f)$ найдём после того, как отыщем локальные экстремумы функции.
- 2). Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.
- 3). Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.
Коэффициент k найдём по формуле $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$:
при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^x = +\infty,$$

так что при $x \rightarrow +\infty$ асимптоты нет, причём функция $f(x)$
стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

При $x \rightarrow -\infty$ имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Теперь найдём значение b по формуле $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$.

Имеем:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Таким образом, $k=0$ и $b=0$, так что при $x \rightarrow -\infty$ асимптота имеет уравнение $y=0$, то есть совпадает с осью Ox .

5). Точка пересечения с осью Oy равна $f(0)=0$. Заодно нашли одну точку пересечения с осью Ox . Чтобы найти все точки пересечения графика с осью Ox , решаем уравнение $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$. Поскольку $e^x \neq 0$, решаем уравнение $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$, откуда получаем два корня: $x=0$ и $x=2$. Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, и $(2; +\infty)$.

Знак функции определяется множителем $x^2 - 2x$, поскольку $e^x > 0$ при всех x . Значит, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ и при $x \in (2; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (0; 2)$.

б) Вычислим производную:

$$f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x.$$

Интервалы возрастания задаются неравенством $f'(x) > 0$, то есть, с учётом того, что $e^x > 0$, неравенством $x^2 - 2x > 0$. Решением этого неравенства служит множество $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. На этих двух интервалах функция возрастает. Легко видеть, что на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, следовательно, это интервал убывания функции. В точке $-\sqrt{2}$ возрастание сменяется убыванием, значит, точка $-\sqrt{2}$ - точка локального максимума.

Значение функции в этой точке равно

$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1.17.$$

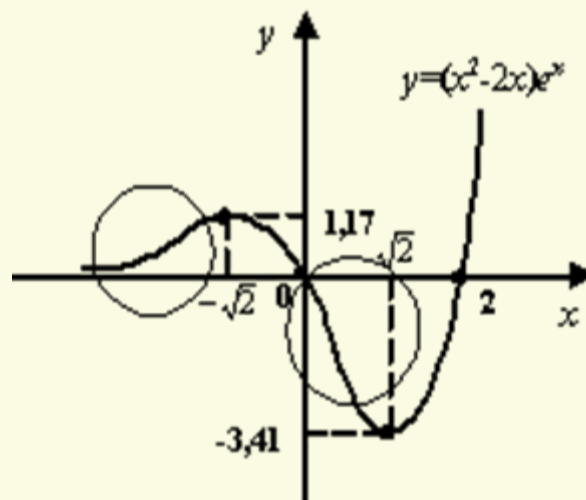
В точке $\sqrt{2}$ убывание сменяется возрастанием, значит, точка $\sqrt{2}$ -- точка локального минимума функции.

Значение функции в точке минимума таково:

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3.41.$$

Теперь мы можем примерно представить, как идёт график функции:

Эскиз графика
функции $f(x)$



Становится очевидно, что область значений функции --
это

$$\mathcal{E}(f) = [f_{\min}; +\infty) \approx [-3.41; +\infty).$$

7) По эскизу графика видно, что где-то в местах, обведённых кружочками, должно смениться направление выпуклости, то есть должны быть точки перегиба. Для исследования этого найдём вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x.$$

Решим неравенство $f''(x) > 0$, эквивалентное неравенству $x^2 + 2x - 2 > 0$. Решением этого квадратного неравенства служит объединение интервалов $(-\infty; -1 - \sqrt{3}) \approx (-\infty; -2.7)$ и $(-1 + \sqrt{3}; +\infty) \approx (0.7; +\infty)$. На этих интервалах функция выпукла.

Ясно, что на интервале $(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \approx (-2.7; 0.7)$ функция будет вогнутой. Тем самым точки $x_1 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$ и $x_2 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$ -- это точки перегиба. Значения функции в точках перегиба такие:

$$f(x_1) = (6 + 4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0.84;$$

$$f(x_2) = (6 - 4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1.93.$$

8). Осталось построить окончательный чертёж:

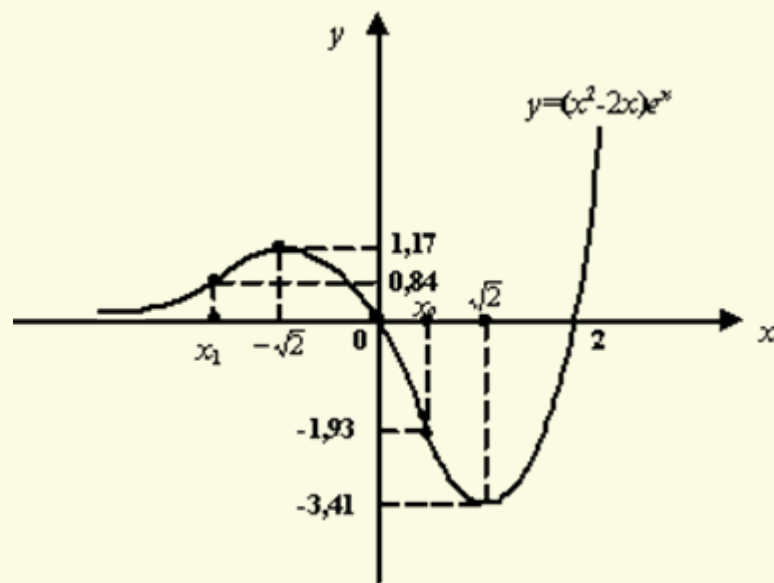


График функции $(x^2 - 2x)e^x$.