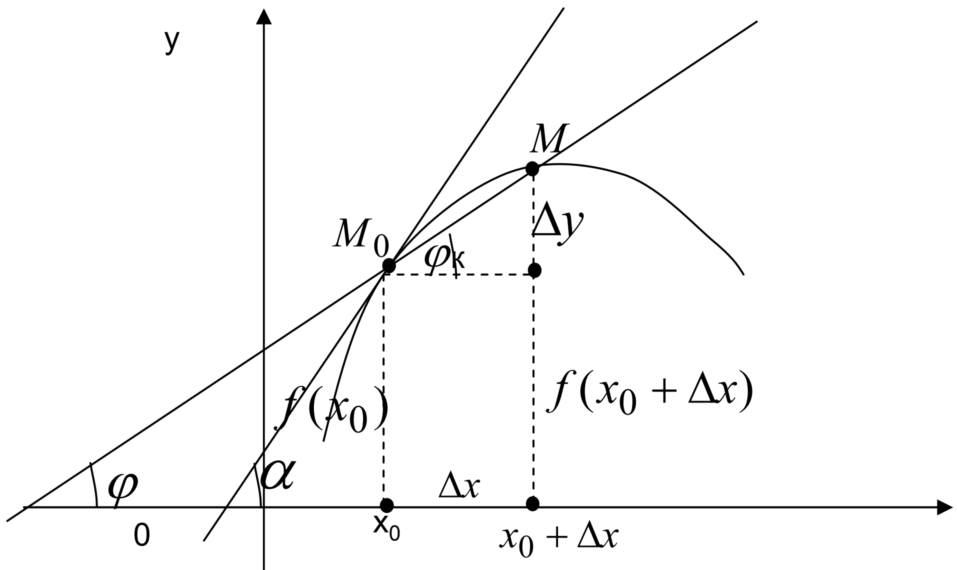
# Элементы дифференциального исчисления

Лекция 4

# Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Производные
2. Таблица производных
3. Дифференциал
4. Производные и дифференциалы высших порядков
5. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях
6. Применение производных к исследованию функций
7. Общая схема исследования функции и построение графика

# Производная. Задача о касательной




***Определение.*** Если существует предельное положение секущей $M_0M$ при стремлении $M \to M_0$ вдоль по кривой, то оно называется касательной к графику функции в точке $M_0$ .

# Производная. Задача о касательной

Обозначим угол наклона касательной к графику функции в точке $M_0$ $\alpha$.

Очевидно, $\varphi \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$, а $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $tg\alpha$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда угловой коэффициент касательной равен $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$k = tg\alpha$$

# Производная. Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a, b)$ и пусть точка $x_0 \in (a, b)$.

Рассмотрим далее точку $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

В обеих точках вычислим значения функции и разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Эту разность будем называть ***приращением функции*** в фиксированной точке $x_0$ .

# Производная. Определение

Если существует конечный (или бесконечный)

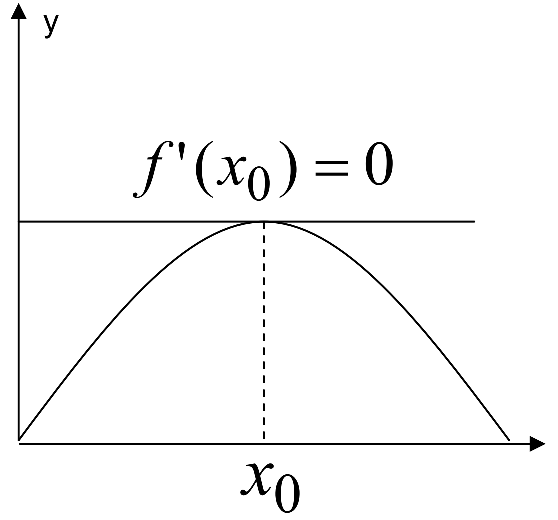
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

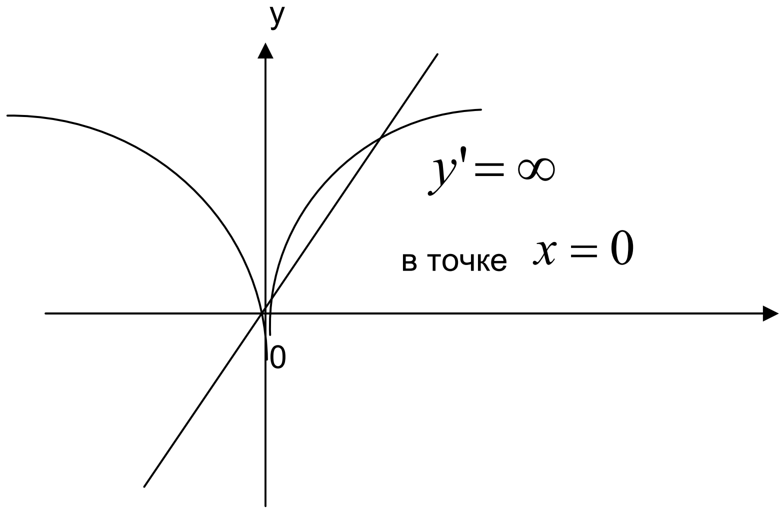
то он называется конечной (или бесконечной) производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается символами $y'$ или $f'(x_0)$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

# Примеры

Ясно, что угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания. Приведем примеры.



# Уравнение касательной

Касательную как прямую, проходящую через точку касания $M_0(x_0; y_0)$, задают уравнением $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$.
Например, уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке (1;2) имеет вид y-2=2(x-1) или 2x-y=0.

# Теоремы о производных

**Теорема 1**. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ функций $u(x)$ и $v(x)$, то существуют

$$\left(u(x)+v(x)\right)' = (u+v)' = u'+v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

# Теоремы о производных

**Следствие.**

$(cy)' = c'\,y + cy' = cy'$, так как $c' = 0$,

т.е. постоянный множитель выносится за знак производной.

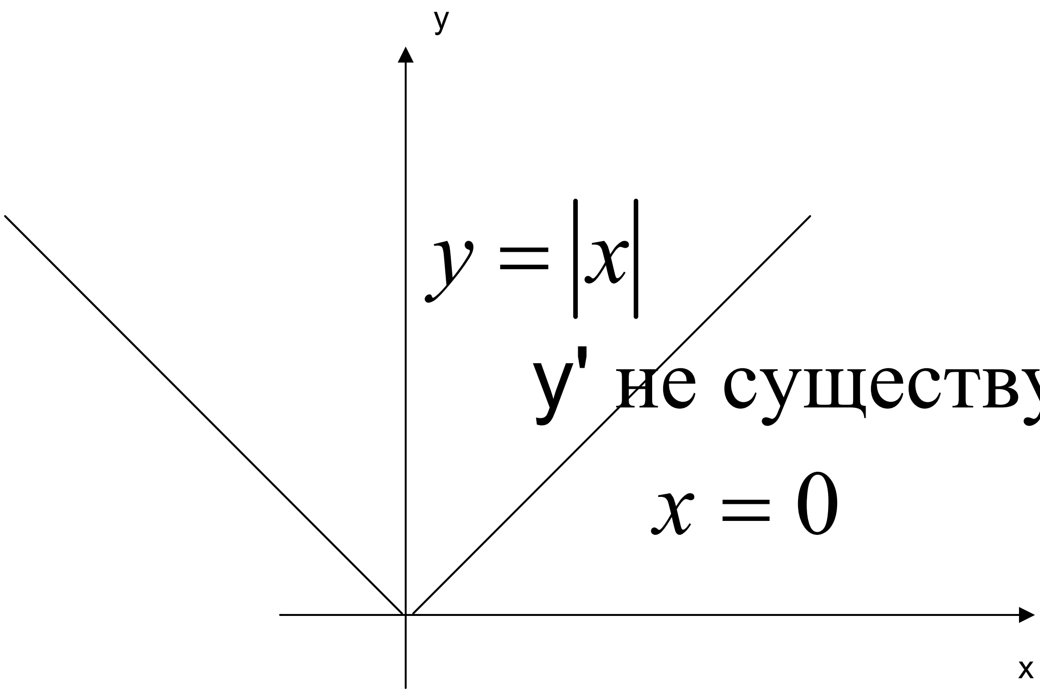
# Теоремы о производных

***Теорема 2.*** Если функция в точке $x_0$ имеет производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратное неверно. Возможен случай, когда непрерывная функция не имеет производной в точке непрерывности.

# Теоремы о производных

Например:




$$y = |x|$$

y' не существует в точке

$$x = 0$$

# Примеры

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1) $y = x^2$ имеет производную

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \; ;$$

# Примеры

$$2)\ \left(e^{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$e^{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x} \cdot 1 = e^{x}.$$

Таким же образом можно получить производные $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$, а по правилу вычисления производных сложных функций можно вычислить и другие производные.

# Производная обратной функции

**Теорема.** Пусть функция $x=f(y)$ монотонна и дифференцируема в некотором интервале $(a,b)$ и имеет в точке $y$ этого интервала не равную нулю производную $f'(y)$. Тогда в соответствующей точке $x$ обратная функция $y=f^{-1}(x)$ имеет производную

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

# Примеры

Для функции $y=\arcsin x$ обратной является функция $x=\sin y$ , которая в интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ монотонна и дифференцируема. Ее производная в этом интервале в нуль не обращается. Поэтому

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# Примеры

Итак, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Аналогично можно получить

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

# Теорема о производной сложной функции

Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную в точке $x_0$, причем $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Или: $y' = f'_u \cdot u'_x$ в произвольной точке $x$.

# Производная степенной функции

Справедливо тождество $x^n = e^{n\ln x}$.

Тогда

$$y' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n\ln x)' =$$

$$= \frac{n}{x} e^{n\ln x} = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}, \; (x^n)' = nx^{n-1}.$$

# Производные гиперболических функций

Гиперболическими называют функции

$$shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2};\ chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2};$$

$$thx = \frac{shx}{chx};\ cthx = \frac{chx}{shx}.$$

# Производные гиперболических функций

Поэтому

$$(shx)' = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = chx.$$

$$(chx)' = shx;$$

$$(thx)' = (\frac{shx}{chx})' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x};$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x.}$$

# Таблица производных

$$1.\ c' = 0,$$

$$2.\ (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$$

$$3.\ \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$$

$$4.\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$$

$$5.\ \left(a^u\right)' = a^u \ln a \ u',$$

$$6.\ \left(e^u\right)' = e^u \cdot u',$$

$$7.\ (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$$

$$8.\ (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$9.\ (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$10.\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$11.\ (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$$

$$12.\ (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$$

ВГУЭС

# Таблица производных

13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u',$

$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}u',$

$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'.$

14. $(shu)' = chu \cdot u'.$

$(chu)' = shu \cdot u';$

$(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u}u';$

$(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u.}u'$

# Дифференцируемая функция

**Определение.** Если функция $f(x)$ в точке $x$ имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

# Дифференциал функции

**Рассмотрим пример**. Найдем приращение функции $y = x^2$ в точке $x_0$.

Известно, что $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$.

В нашем примере

$f\left(x_0\right) = x_0{}^2, f\left(x_0 + \Delta x\right) = \left(x_0 + \Delta x\right)^2$, а приращение.

$$\Delta y = \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - x_0{}^2 = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0{}^2$$

Итак, $\Delta y = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$, где, как известно, $2x_0$ является производной функции $x^2$ в точке $x_0$.

# Определение дифференциала

Пусть приращение функции в точке может быть представлено в виде

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ , где $\Delta x$ - приращение аргумента, *A*-величина, не зависящая от $\Delta x$ , $o(\Delta x)$ -бесконечно малая более высокого порядка ,

чем $\Delta x$ при $\Delta x \to 0.$

# Определение дифференциала

Тогда главная линейная относительно $\Delta x$ часть приращения функции называется дифференциалом функции в точке и обозначается $dy$ .

Итак, по определению $dy = A\Delta x$ .

***Теорема***. Для того чтобы в точке *x* функция имела дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела производную.

# Дифференциал функции

Приращение аргумента $\Delta x$ в этом случае принято обозначать $dx$ и тогда $dy = f'(x_0)dx$, где $dx = \Delta x$. В произвольной точке $x$ $dy = f'(x)dx$.

***Замечание.*** Из последней формулы получается еще одно обозначение производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

# Дифференциал функции

**Пример.**

$$d(\sin x) = \cos x\,dx;$$

$$d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx; \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx;$$

$$d\left(x^2\right) = 2x\,dx; \qquad d(x+a) = dx$$

# Дифференциал функции

Как и для производной, для дифференциала функции имеют место формулы:

1. $d(u+v) = du + dv;$
2. $d(uv) = vdu + udv$ ;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \left(v \neq 0\right)$ ;
4. $d(cu) = cdu$ .

# Инвариантность дифференциала

По правилу дифференцирования сложной функции

$$dy = y'_u u'_x dx = y'_u (u'_x dx) = y' du.$$

Здесь форма дифференциала остается неизменной, но под дифференциалом аргумента понимается не приращение этого  аргумента, а его дифференциал.

# Производные высших порядков

Введем теперь понятие производной второго порядка функции $f(x)$. Производную от первой производной функции $f(x)$, т.е. $(y')'$ будем называть производной второго порядка (тогда $y'$ - производная первого порядка) и будем ее обозначать $y''$ или $f''(x)$. Далее $(y'')' = y''' = f'''(x)$- это производная третьего порядка, … а $\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)}$ - это производная n-го порядка.

# Дифференциалы высшего порядка

Дифференциал от дифференциала данной функции называется ее дифференциалом второго порядка и обозначается $d^2y = d^2f(x)$ . По определению

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

Итак, $d^2y = f''(x)dx^2$, $d^3y = f'''(x)dx^3$ и т.д.

# Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция *y* от *x* задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta).$$

И пусть эти функции дифференцируемы. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Если существует вторая производная, то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

# Пример

Найти производную функции

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Имеем

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

# Производные неявных функций

Пусть значения x и y связаны уравнением $F(x,y)=0$. Если функция $y=f(x)$, определенная на некотором промежутке, при подстановке ее вместо $y$ в уравнение $F(x,y)=0$ обращает это уравнение в тождество, то говорят, что это уравнение задает функцию $y=f(x)$ неявно.

# Пример

Продифференцируем функцию

$$y = x + \ln y$$ .

Имеем $y' = 1 + \frac{1}{y} y'$ Отсюда

$$y'(1 - \frac{1}{y}) = 1, \quad y' = \frac{y}{y-1}.$$

# Продолжение

Найдем вторую производную.

Так как $y' = \dfrac{y}{y-1}$, то

$$y'' = \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = \frac{y'(y-1-y)}{(y-1)^2} =$$

$$= -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}.$$

# Логарифмическое дифференцирование

Найти производную функции $y = (\cos x)^x$.

Прологарифмируем обе части:

$\ln y = x\cos x.$ Теперь берем производную

$$\frac{y'}{y} = \cos x - x\sin x, \; y' = y(\cos x - x\sin x).$$

Окончательно

$$y' = (\cos x)^x (\cos x - x\sin x).$$