Домашнее задание по теме: «Разложение фкп в ряд Лорана»

Разложить функции в ряд Лорана в окрестности z_0:

1. $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$, $z_0=0$; **Ответ:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n+3)!}$;

2. $\dfrac{e^z}{z^3}$, $z_0=0$; **Ответ:** $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+3)!}$;

3. $\dfrac{1}{z}\cdot\sin^2\dfrac{2}{z}$, $z_0=0$; **Ответ:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{4n-1}}{(2n)!\cdot z^{2n+1}}$;

4. $z\cdot e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0=-i$. **Ответ:** $(z+i)+(1-i)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{i}{n!}\right)\dfrac{1}{(z+i)^n}$.

Разложить функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

5. $\dfrac{1}{(z+2)\cdot(1+z^2)}$, $|z|<1$; **Ответ:** $\dfrac{1}{5}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+2\sin\dfrac{n\pi}{2}+\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\cdot z^n$;

6. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1<|z|<2$; **Ответ:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot z^n$;

7. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1<|z+2|<4$; **Ответ:** не разлагается;

8. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2<|z-1|<+\infty$; **Ответ:** $\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{5\cdot 2^{n-2}}{(z-1)^n}$;

9. $\dfrac{z}{(z^2-4)\cdot(z^2-1)}$, $1<|z|<2$; **Ответ:** $-\dfrac{1}{6}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n-1}}{2^{2n-1}}-\dfrac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^{2n-1}}$;

10. $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $4<|z+2|<+\infty$. **Ответ:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 2^{2n-2}}{(z+2)^{n+3}}$.