

Домашнее задание по теме: «Дифференцирование фкп»

1. Выяснить, какие из функций являются аналитическими хотя бы в одной точке. Найти производные в тех точках, в которых они существуют.

а) $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$; б) $w = \operatorname{ch} z$; в) $w = |z| \cdot \bar{z}$; г) $w = \sin(z^2 + i)$.

2. Могут ли являться действительной или мнимой частями аналитической функции $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ следующие функции

а) $u = x^2$; б) $v = \ln(x^2 + y^2)$.

3. Указать, какие пары гармонических функций сопряжены

а) $u = 3(x^2 - y^2)$, $v = 3x^2 y - y^3$; б) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

4. Найти все гармонические функции указанного вида:

а) $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ б) $u(x, y) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

5. Восстановить аналитическую в окрестности z_0 функцию $f(z)$ по действительной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и $f(z_0)$:

а) $u(x, y) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2$; в) $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$;

б) $v(x, y) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$; г) $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$.

Ответы: 1) а) не аналитическая ни в одной точке, $w'(0) = 0$;

б) аналитическая на $\mathbb{C}$;

в) не имеет производной ни в одной точке;

г) аналитическая на $\mathbb{C}$;

2) а) нет; б) да; 3) а) нет; б) да;

4) а) $u = C_1 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_2$; б) $u = C_1 \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + C_2$;

5) а) $v = 2e^x \sin y$, $f(z) = 2e^z$;

б) $u = x^2 - 3y - y^2$, $f(z) = z^2 + 3zi$;

в) $v = 2 \cos x \operatorname{sh} y + y$, $f(z) = 2 \sin z - \bar{z}$;

г) $u = 2xy + 2 \sin x \cdot \operatorname{sh} y + 2$, $f(z) = 2 + 2i \cdot \cos z - i \cdot z^2$.