Домашнее задание по теме: «Применение степенных рядов 2»

1) Разлагая функции в ряд, найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

   Ответ: $-\dfrac{1}{12}$.

2) Разлагая функции в ряд, найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a>0)$.

   Ответ: $\ln^2 a$.

3) (4111) Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения уравнения $y' = x^2 - y^2$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(0)=0$.

   Ответ: $y = \dfrac{2}{3!}x^3 - \dfrac{80}{7!}x^7 + \ldots$

4) (4221) Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x\sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=0$, $y'(1)=\dfrac{\pi}{2}$. (Ограничиться шестью первыми членами)

   Ответ: $y = \dfrac{\pi}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3!}(x-1)^3 - \dfrac{1}{4!}(x-1)^4 - \dfrac{6}{5!}(x-1)^5 + \ldots$

5) (4247) Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

   Ответ: $y = 1 + \dfrac{2}{4!}x^4 - \dfrac{2}{5!}x^5 + \dfrac{2}{6!}x^6 - \dfrac{2}{7!}x^7 + \dfrac{62}{8!}x^8 + \ldots$

6) (4248) Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1 = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

   Ответ: $y = \dfrac{x^2}{2} + \left[\dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{3x^6}{6!} + \dfrac{5x^8}{8!} + \ldots + \dfrac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots\right]$