УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Доказать тождество:

а) $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})\cdot(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{z}}) = \begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}$;

б) $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})^2 = \begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}$.

2. Доказать, что $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\cdot(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}$

3. Даны ненулевой вектор $\bar{\mathbf{a}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}}) = p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = p\bar{\mathbf{a}}/|\bar{\mathbf{a}}|^2$.

4. Даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Представить вектор $\bar{\mathbf{b}}$ в виде суммы двух векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$, так, чтобы вектор $\bar{\mathbf{x}}$ был коллинеарен вектору $\bar{\mathbf{a}}$, а вектор $\bar{\mathbf{y}}$ был ортогонален вектору $\bar{\mathbf{a}}$.

5. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Найти вектор $\bar{\mathbf{x}}$, компланарный векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ и удовлетворяющий условиям $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{x}}) = 1$, $(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

6. Даны три некомпланарных вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$. Найти вектор $\bar{\mathbf{x}}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{x}}) = \alpha$, $(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{x}}) = \beta$, $(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{x}}) = \gamma$.
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{\alpha[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}] + \beta[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}] + \gamma[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]}{(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})}$.

7. Даны неколлинеарные векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = p[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]/|[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]|^2$.

8. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, удовлетворяющие условию $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]+[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]=\bar{\mathbf{0}}$, компланарны.

9. Векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ удовлетворяют условию $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$. Доказать, что $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$.

10. Доказать, что если три вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ попарно неколлинеарные и $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$, то они удовлетворяют соотношению $\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{c}}=\bar{\mathbf{0}}$. (Подсказка: покажите сначала, что векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны).

11. Даны произвольные векторы $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{n}}$. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}=[\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{n}}]$, $\bar{\mathbf{b}}=[\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{n}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}=[\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{n}}]$ компланарны.

12. Доказать, что если векторы $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$, $[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]$, $[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$ компланарны, то они коллинеарны.

13^0. Три вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ связаны соотношением $\bar{\mathbf{a}}=[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]$, $\bar{\mathbf{b}}=[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$, $\bar{\mathbf{c}}=[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]$. Найти длины векторов и углы между ними.
Ответ: векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

14. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по модулю площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

15. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2. z_3 удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=0 \\ x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2=0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

16. Даны три некомпланарных вектора $\overline{\mathbf{OA}}=\bar{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{OB}}=\bar{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{OC}}=\bar{\mathbf{c}}$, отложенных от одной точки O. Выразить через $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ вектор $\overline{\mathbf{OH}}$, где H – ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.

Ответ: $\overline{\mathbf{OH}}=\dfrac{(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})}{([\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]+[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}])^2}\cdot\left([\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]+[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]\right)$.

17. Решить уравнение $[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]x+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]y+[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]z+\bar{\mathbf{d}}=\bar{\mathbf{0}}$.

Ответ: $x=-(\bar{\mathbf{d}},\bar{\mathbf{a}})/(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$, $y=-(\bar{\mathbf{d}},\bar{\mathbf{b}})/(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$, $z=-(\bar{\mathbf{d}},\bar{\mathbf{c}})/(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$.

18. Доказать тождество $([\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}],[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{d}}])=\begin{vmatrix}(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{d}})\\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{d}})\end{vmatrix}$.

19. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равна

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})\\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}})\end{vmatrix}}.$$

20. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ равен

$$V=\sqrt{\begin{vmatrix}(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}})\\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})\\ (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}})\end{vmatrix}}.$$