Домашнее задание по теме: «Линейные операторы – 2»

1. В базисе 1, x, x^2 пространства $\mathbb{R}^3[x]$ оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1(x)=3x^2+2x$, $f_2(x)=5x^2+3x+1$, $f_3(x)=7x^2+5x+3$.

   Ответ: $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15/4 & -4 & -5 \\ 9/4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Линейный оператор φ пространства L_3 имеет в некотором базисе $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ матрицу $\mathbf{A}$. Найти собственные подпространства этого оператора. Выяснить, диагонализируем ли линейный оператор, и если да – то найти его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: а) Да. $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=2$. $L_{\lambda=-1}=L(\mathbf{f_1})$, $L_{\lambda=2}=L(\mathbf{f_2},\mathbf{f_3})$,
где $\mathbf{f_1}=\{1,-1,-1\}$, $\mathbf{f_2}=\{1,1,0\}$, $\mathbf{f_3}=\{1,0,1\}$.

б) Нет. $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=3$. $L_{\lambda=-1}=L(\mathbf{f_1})$, $L_{\lambda=3}=L(\mathbf{f_2})$,
где $\mathbf{f_1}=\{2,-1,0\}$, $\mathbf{f_2}=\{1,-1,1\}$.

4. Докажите, что если x и y – собственные векторы линейного оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям, то $\alpha x+\beta y$ ($\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$) не является собственным вектором оператора φ.