Домашнее задание по теме: «Линейные пространства и подпространства»

1. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $\mathbb{R}^n$ следующие подмножества:

   а) $M_1=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_9)|\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_8=0\}$; в) $M_3=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1=\alpha_n\}$;

   б) $M_2=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_9)|\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_8\}$; г) $M_4=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_i\in\mathbb{Z},\ \forall i\}$;

   Ответы: а) да; б) да; в) да; г) нет.

2. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $M(3\times 3,\mathbb{R})$ следующие подмножества:

   а) $S(3)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{pmatrix}\right\}$ б) $S_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b & c\\ b & 1 & e\\ c & e & 1\end{pmatrix}\right\}$

   в) $KS(3)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b & c\\ -b & 0 & e\\ -c & -e & 0\end{pmatrix}\right\}$ г) $S_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b & c\\ -b & 1 & e\\ -c & -e & 1\end{pmatrix}\right\}$

   Ответы: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

3. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.
4. Доказать, что если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.
5. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}^4$ линейно зависимой: $a_1=(4,-5,2,6)$, $a_2=(2,-2,1,3)$, $a_3=(1,-3,3,9)$, $a_4=(4,-1,5,6)$.

   Ответ: линейно независимая ($D=-45$)

6. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}[x]$ линейно зависимой: $f_1(x)=x^3+2x^2+3x+4$, $f_2(x)=2x^3+3x^2+4x+5$, $f_3(x)=3x^3+4x^2+5x+6$, $f_4(x)=4x^3+5x^2+6x+7$.

   Ответ: линейно зависимая.

7. Проверить, что векторы

   $f_1(x)=2x^2+2x-1$, $f_2(x)=2x^2-x+2$, $f_3(x)=-x^2+2x+2$,

   образуют базис пространства $\mathbb{R}^3[x]$ и найти координаты вектора $g(x)=x^2+x+1$ в этом базисе. **Ответ**: $\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

8. Проверить, что векторы $e_1=(1,5)$, $e_2=(2,7)$ и $f_1=(3,9)$, $f_2=(3,3)$ образуют базисы пространства $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора x в базисе f_1, f_2, если известно, что в базисе e_1, e_2 он имеет координаты $\{4;-2\}$.

   Ответ: $\{1;-1\}$, $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} -1 & -5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.