

## Домашнее задание по теме: «Матрицы и действия над ними»

1) Решить систему матричных уравнений: 
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Ответ:**  $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2) Найти  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$  **Ответ:**  $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$

3) Найти  $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k.$  **Ответ:**  $\begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}.$

4) Вычислить  $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5,$  используя равенство

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**  $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}.$

5) Найти  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n.$  **Ответ:**  $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$

6) Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

**Ответ:**  $\pm E, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$  где  $a^2 = 1 - bc.$

Как изменится произведение  $AB$  матриц  $A$  и  $B$ , если:

- 7) переставить  $i$ -ю и  $j$ -ю строки матрицы  $A$ ?
- 8) переставить  $i$ -й и  $j$ -й столбцы матрицы  $B$ ?
- 9) к  $i$ -й строке матрицы  $A$  прибавить ее  $j$ -ю строку, умноженную на число  $c$ ?
- 10) к  $i$ -му столбцу матрицы  $B$  прибавить ее  $j$ -й столбец, умноженный на число  $c$ ?

**Ответ:** 7)  $i$ -я и  $j$ -я строки матрицы  $AB$  поменяются местами.

- 8)  $i$ -й и  $j$ -й столбцы матрицы  $AB$  поменяются местами.
- 9) к  $i$ -й строке матрицы  $AB$  прибавится  $j$ -я строка, умноженная на число  $c$ .
- 10) к  $i$ -му столбцу матрицы  $AB$  прибавится  $j$ -й столбец, умноженный на число  $c$ .
- 11) Доказать, что если матрица  $B$  перестановочна с матрицей  $A$ , то она перестановочна и с матрицей  $A - \lambda E$  (где  $\lambda$  – любое отличное от нуля число).
- 12) Следом квадратной матрицы  $A$  (обозначают  $trA$ ) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.
- $$trA = a_{11} + a_{22} \dots + a_{nn}.$$
- Доказать, что  $trAB = trBA$ .