§ 1. Комплексные числа

$i=\sqrt{-1}$ – ***мнимая единица*** $i^2=-1$

$z=a+bi$ – ***комплексное число***,

где a и b – действительные числа.

$a=\operatorname{Re} z$ – ***действительная часть*** комплексного числа

$b=\operatorname{Im} z$ – ***мнимая часть*** комплексного числа

Числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются ***комплексно сопряженными***.

Если $a=0$, то число называют ***чисто мнимым***.

Если $b=0$, то число является действительным

$\Rightarrow$ множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Множество комплексных чисел обозначается ***C***.

Действия над комплексными числами

Пусть $z_1 = a_1 + b_2 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i.$

1. *Сложение и вычитание*.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

2. *Умножение.*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{= -1} =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i$$

3. *Деление.*

$$z_1 : z_2 = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 a_2 i - a_1 b_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 - b_2^2 i^2} =$$

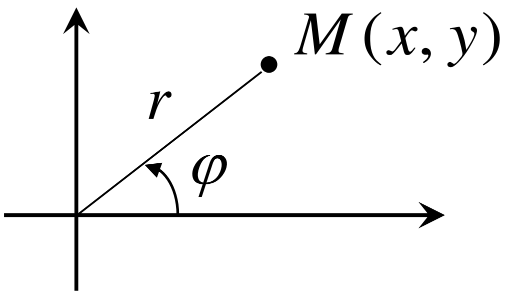
$$= \frac{a_1 a_2 + a_2 b_2 + (b_1 a_2 - b_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Различные формы записи комплексных чисел

1. ***Алгебраическая форма записи:*** $z = x + yi$

2. ***Тригонометрическая форма записи.***

Представим число $z = x + yi$ в виде точки $M(x,y)$ на плоскости:



Введём полярную систему координат:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Модуль комплексного числа: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Аргумент комплексного числа: $Argz = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$

Главное значение аргумента: $argz$ $\quad -\pi < argz \le \pi$

$(0 \le argz < 2\pi)$

Для $z = 0$ аргумент не определён.

Как найти аргумент комплексного числа?

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} \;\Rightarrow\; tg\,\varphi = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \cancel{\varphi = arctg\,\frac{y}{x}}$$

$\pi + arctg\,\frac{y}{x}$	$arctg\,\frac{y}{x}$
$-\pi + arctg\,\frac{y}{x}$	$arctg\,\frac{y}{x}$

$$\boxed{\arg z = \begin{cases} arctg\,\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0 \\ \pi + arctg\,\frac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\, y > 0 \\ -\pi + arctg\,\frac{y}{x}, & \text{если } x < 0,\, y < 0 \end{cases}}$$

3. *Показательная форма записи.*

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Rightarrow\; z = re^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме записи

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

1. *Умножение.*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ ***формула Муавра***

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме записи

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

2. ***Деление.***

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть n – натуральное число.

Определение. Комплексное число w называется ***корнем n-ой степени*** из числа z, если $z = w^n$.

$$w = \sqrt[n]{z}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$

$w = \rho e^{i\psi}$

Но $z = w^n \Rightarrow re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\psi} \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z \end{cases} \Rightarrow$

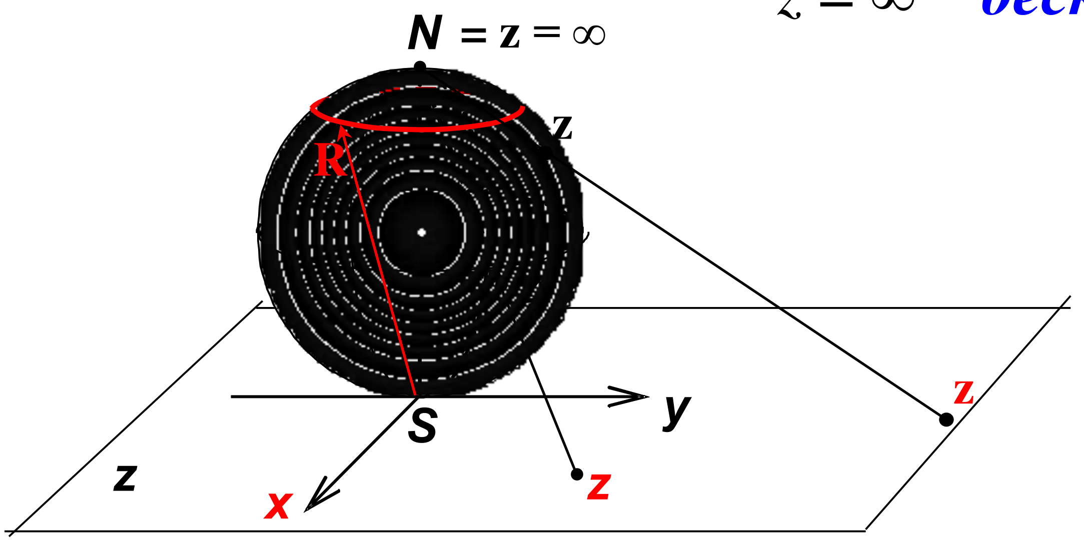
$$\rho = \sqrt[n]{r}$$
$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in Z \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Для любого $z \neq 0$ корень n-ой степени из числа z имеет ровно n различных корней.

Сфера Римана и z = ∞

$z=\infty$ – ***бесконечно удалённая точка***



Комплексная плоскость с присоединенной бесконечно удаленной точкой называется ***расширенной комплексной плоскостью***.

Изображается сферой Римана.

Окрестностью бесконечно удаленной точки $z=\infty$ называется внешность круга с центром в точке 0 радиуса R, то есть множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z|>R$.

ε-окрестность $\boxed{R=\dfrac{1}{\varepsilon}}$

§ 2. Понятие функции комплексного переменного

Пусть D – произвольное множество в комплексной плоскости.

Определение. Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие некоторое комплексное число w, то говорят, что на D определена ***однозначная функция*** комплексного переменного z.

Если же каждому $z \in D$ соответствует несколько значений w, то говорят, что на D определена ***многозначная функция*** комплексного переменного z.

$$w = f(z)$$

Примеры.

1. $f(z) = |z|$ – однозначная функция.
2. $f(z) = Arg\, z$ – многозначная функция.

Пусть задана функция $w = f(z)$.

Если $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, то

$$u = u(x,y)\ ,\quad v = v(x,y)\ .$$

Тогда $f(x + iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций действительных переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой частью функции*** $f(z)$.

Обозначают: $\mathrm{Re}\, f(z)$ и $\mathrm{Im}\, f(z)$.

Пример.

$$f(z) = z^2$$

Основные элементарные функции комплексного переменного

Пусть $z = x + iy$.

1. ***Показательная.***

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Если z – действительное число, то

$$y = 0 \;\Rightarrow\; w = e^z = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x \;\Rightarrow$$

показательная функция комплексного переменного совпадает с показательной функцией действительного переменного.

Если z – чисто мнимое число, то

$$x = 0 \;\Rightarrow\; w = e^{iy} = e^0(\cos y + i\sin y) = \cos y + i\sin y \;\Rightarrow$$

получили формулу Эйлера.

Свойства показательной функции.

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
3. $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{zn}$ (n – натуральное число)
4. $e^{z} \neq 0$ для всех z

~~5. $e^{z} > 0$~~ ***Неверно!***

5. $w = e^{z}$ – *периодическая функция с периодом* $T = 2\pi i$

Примеры.

1. e^{2}
2. $e^{1+\pi/3i}$

2. Логарифмическая функция.

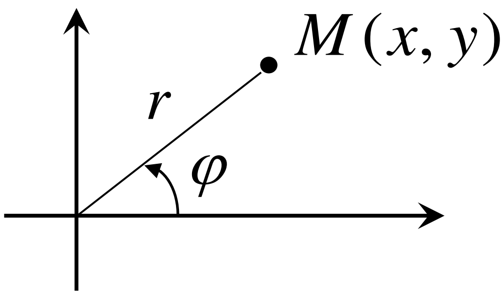
$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

Логарифмическая функция обратна показательной $\Rightarrow$

w – ***логарифм*** числа z, если $e^{w} = z$.

$$w = Ln\, z \qquad z \neq 0 \quad (\text{так как } e^{w} \neq 0)$$

Пусть $w = u + iv \Rightarrow z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}(\cos v + i\sin v)$



Введём полярную систему координат:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Модуль комплексного числа: $|z| = r$

Аргумент комплексного числа: $Arg z = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &|z| = e^{u} \Rightarrow u = \ln|z| \\ &v = Arg\, z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg z$$

$$Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg z = \ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k) \quad k \in Z$$

Логарифмическая функция имеет бесконечно много значений, то есть многозначная функция.

При k = 0 получаем однозначную функцию, называемую ***главным значением логарифма***: $\ln z = \ln|z| + i\, arg\, z$

Примеры.

1. $Ln\, e$
2. $Ln(-1)$

Свойства логарифмической функции.

1. $Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$
2. $Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Ln(z_1) - Ln(z_2)$
3. $Ln\, z^n = n \cdot Ln\, z$
4. $Ln \sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n} \cdot Ln\, z$

3. *Степенная функция.*

Пусть a – комплексное число. Как задать $w = z^a$?

1. $a = n$ – натуральное число

$$w = z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$ формула Муавра

2. $a = 1/n$, где n – натуральное число

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

3. $a = m/n$, где m и n – натуральные числа

$$w = z^{m/n} = (z^{1/n})^m = \sqrt[n]{|z|^m}\left(\cos\frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n} + i \sin\frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

4. a – произвольное комплексное число

$e^{Ln\, z} = z \quad \Rightarrow \quad z^a = e^{Ln\, z^a} \Rightarrow$ по свойству логарифма

$$w = z^a = e^{a Ln\, z}$$

Пример.

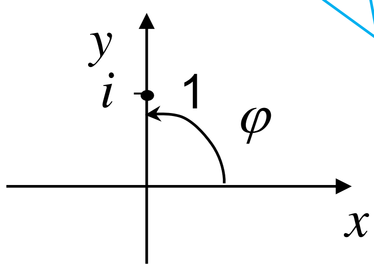
$$w = i^i$$

$$z^a = e^{a \cdot \mathrm{Ln}\, z}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

$$i^i = e^{i \cdot \mathrm{Ln}\, i} = e^{i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = \boxed{e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}}$$

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}\, i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$



$$|i| = 1$$

$$\mathrm{Arg}\, i = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

Другой вариант решения

$$z = r\, e^{\varphi i}$$

$$i^i = \left(e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}\right)^i = e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cdot i} = \boxed{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}}$$

$$i = 1 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$$

4. *Тригонометрические функции.*

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Пусть z – действительное число.

$$e^{iz} = e^0(\cos z + i\sin z) = \cos z + i\sin z$$
$$e^{-iz} = e^0(\cos(-z) + i\sin(-z)) = \cos z - i\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Свойства тригонометрических функций.

1. Тригонометрические функции комплексного переменного в случае, когда комплексное число является действительным, совпадают с тригонометрическими функциями действительного переменного.
2. Синус является нечётной функцией, а косинус – чётной. Тангенс и котангенс – нечётные функции.
3. Все известные из тригонометрии формулы сохраняются и для функций комплексного переменного.

4. Синус и косинус – периодические функции с периодом $T = 2\pi$.
Тангенс и котангенс – периодические с периодом $T = \pi$.

$$\cancel{|\cos z| \le 1}$$
$$\cancel{|\sin z| \le 1}$$

Неверно!

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty \qquad \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty$$

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

5. *Гиперболические функции.*

$$\boxed{sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}} \quad \boxed{ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}} \quad \boxed{th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}} \quad \boxed{cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}}$$

*Г*иперболические функции также периодические: гиперболические синус и косинус имеют период $T = 2\pi i$, а тангенс и котангенс – период $T = \pi i$.

Существует связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\boxed{sh\, iz = i \cdot \sin z} \quad \boxed{ch\, iz = \cos z} \quad \boxed{th\, iz = i \cdot tg\, z} \quad \boxed{cth\, iz = -i \cdot ctg\, z}$$

6. *Обратные тригонометрические функции.*

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

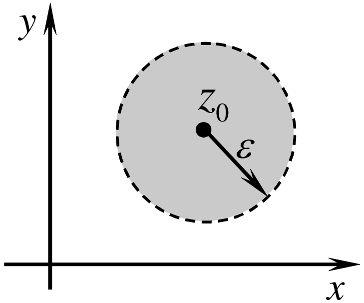
$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{iz - 1}{iz + 1}\right)$$

Все обратные тригонометрические функции – многозначные.

§ 3. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции комплексного переменного

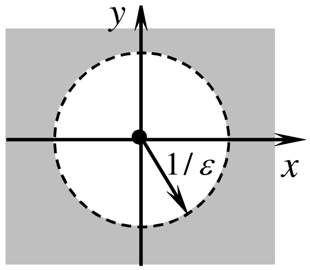
ε-окрестность числа z_0 – это внутренность круга с центром в точке z_0 радиуса ε

$$|z - z_0| < \varepsilon$$



ε-окрестность бесконечно удаленной точки $z = \infty$ – это внешность круга с центром в точке 0 радиуса 1/ε

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$



Определение. Комплексное число w_0 называется ***пределом функции $f(z)$*** в точке z_0, если для любого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для любого $z \neq z_0$ из δ-окрестности z_0 число $f(z)$ принадлежит ε-окрестности w_0.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \text{ существует } \Leftrightarrow \text{ существуют } \lim_{z\to z_0} u(x,y) = u_0 \text{ и } \lim_{z\to z_0} v(x,y) = v_0}$$

Свойства пределов.

1. $\lim\limits_{z\to z_0}(c\cdot f(z)) = c\cdot\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
2. $\lim\limits_{z\to z_0}(f_1(z)+f_2(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) + \lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$
3. $\lim\limits_{z\to z_0}(f_1(z)\cdot f_2(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$
4. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и некоторой её окрестности.

Определение. Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если справедливо равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Определение. Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

Теорема. Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0\,,y_0)$.

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и некоторой её окрестности.

Определение. ***Производной функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

(если он существует и конечен).

Определение. Функция $w = f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z, если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно Δz части и бесконечно малой более высокого порядка чем Δz, то есть

$$\Delta w = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

где A – комплексное число, α – бесконечно малая при $\Delta z \to 0$.

Слагаемое $A \cdot \Delta z$ называют ***дифференциалом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z и обозначают: $dw(z)$ или $df(z)$.

Теорема (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z \Leftrightarrow \exists f'(z)$.
При этом для её дифференциала в точке z справедливо равенство $df(z) = f'(z) \cdot \Delta z$.

Функция $w = f(z)$ дифференцируемая в точке z:

$$\Delta w = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

где A – комплексное число, α – бесконечно малая при $\Delta z \to 0$.

$$A = f'(z), \qquad A \cdot \Delta z = df(z)$$

Пусть $w = z$. Найдём $dw = dz$.

$$dz = \Delta z \;\Rightarrow\; df(z) = f'(z) \cdot \Delta z = f'(z) \cdot dz \;\Rightarrow\; \boxed{f'(z) = \frac{df(z)}{dz}}$$

Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует её непрерывность в этой точке. Обратное утверждение ***неверно***.

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции).

Если функция $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки z, причём в этой точке действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, то $w = f(z)$ дифференцируема в z $\Leftrightarrow$ выполняются равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Пример.

$f(z) = z^2$

$f'(z) = ?$

Свойства производных.

1. $(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z)$

2. $(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z)$

3. $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$

4. $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^{\,2}(z)}$

5. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z_0, а $f(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = \varphi(z_0)$, то

$$(f(\varphi(z)))' = f'_\varphi \cdot \varphi'_z$$

6. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причём $(f^{-1}(w))' \neq 0$, то

$$f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'}$$

$f^{-1}(w)$ – функция, обратная к $f(z)$

Теорема (о дифференцируемости основных элементарных функций комплексного переменного).

Функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = z^n$ (где n – натуральное число) дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости.

Функции $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{th} z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $z = \pi/2 + \pi k$ и $z = (\pi/2 + \pi k)\cdot i$ соответственно ($k \in \mathbf{Z}$).

Функции $w = \operatorname{ctg} z$ и $w = \operatorname{cth} z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $z = \pi k$ и $z = \pi k i$ соответственно ($k \in \mathbf{Z}$).

Для функций $w = \operatorname{Ln} z$ и $w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z.

Определение. Функция $f(z)$ называется ***аналитической в точке*** z_0, если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки z_0.

Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Замечание. Условия дифференцируемости и аналитичности в области совпадают. Но в точке условие аналитичности более сильное, чем условие дифференцируемости.

Функция аналитична в некоторой области $\Leftrightarrow$

её действительная и мнимая части дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Определение. Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками этой функции.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$ ***уравнение Лапласа***

Функции $f(x,y,z)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа называются ***гармоническими***.

Частный случай уравнения Лапласа: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ аналитична в некоторой области $\Rightarrow$ её действительная и мнимая части $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad\Rightarrow$$

$\boxed{u(x,y) \text{ – гармоническая функция}}$

Аналогично показывается, что функция $v(x,y)$ также является гармонической.

Если функция аналитична в некоторой области, то её действительная и мнимая части являются гармоническими функциями.

Пример. Выяснить, существует ли аналитическая функция, у которой действительная часть $u(x,y)=x^3-3xy^2+2.$

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \;\Rightarrow\; |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

$|\Delta z|$ – расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$

$|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$

Величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

$|f'(z)| > 1 \;\Rightarrow\;$ растяжение

$|f'(z)| < 1 \;\Rightarrow\;$ сжатие

картинки

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \Rightarrow \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w) - \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta z) = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$$

Величина $\arg f'(z_0)$ определяет угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

$\alpha_2' = \alpha_1' + \arg f'(z_0) \Longrightarrow$ углы сохраняются

картинки

Функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

$|f'(z_0)|$ – коэффициент растяжения
$\arg f'(z_0)$ – угол поворота

не зависят от выбора кривой, проходящей через точку z_0

Определение. Отображение $w = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется ***конформным*** (то есть отображением, сохраняющим форму).

$$\boxed{\text{Отображение } w = f(z) \text{ конформно в некоторой области} \Leftrightarrow \text{функция } w = f(z) \text{ аналитична в этой области и } f'(z) \neq 0 \text{ во всех точках этой области.}}$$

Пример.

Выяснить геометрическую картину отображения $w = 2z$.

§ 3. Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть L – некоторая гладкая кривая в комплексной плоскости.

Выберем на L направление:

а) a – начало, b – конец, если L не замкнутая;

б) против часовой стрелки, если L – замкнутая.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная на L.

1. Разобьем кривую L произвольным образом на n частей точками $z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_n = b$ в направлении от a к b.
2. На каждой дуге $(z_{k-1}\, z_k)$ выберем произвольную точку C_k и вычислим произведение $f(C_k)\cdot\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k\text{-}1}$.

картинки

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(C_k) \cdot \Delta z_k$$

интегральная сумма для функции $f(z)$ по кривой L

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} |\Delta z_k|$$

Определение. Если существует предел интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0$, не зависящий от разбиения кривой и выбора точек C_k , то его называют ***интегралом от функции*** $f(z)$ ***по кривой (по контуру)*** L.

Обозначают: $\int\limits_L f(z)dz, \quad \oint\limits_L f(z)dz$

Свойства интегралов.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot \Delta z_k$$

1. $\int\limits_L dz = b - a$

2. $\int\limits_L c\cdot f(z)dz = c\cdot \int\limits_L f(z)dz$, c – комплексное число

3. $\int\limits_L [f_1(z)+f_2(z)]dz = \int\limits_L f_1(z)dz + \int\limits_L f_2(z)dz$

4. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$

5. Если кривая AB разбита точкой K на две части AK и KB, то

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AK} f(z)dz + \int\limits_{KB} f(z)dz$$

6. Если во всех точках кривой L выполняется неравенство $|f(z)| < M$, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le M\cdot \ell$, где ℓ – длина кривой L.

Теорема 1 (существования интеграла).

Если L – гладкая кривая, а функция $f(z)$ – непрерывная и однозначная функция на L, то $f(z)$ интегрируема по кривой L и справедливо равенство

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительная и мнимая часть функции $f(z)$.

Замечание.

1. Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода.

2. Формулу из теоремы можно записать в более удобном для запоминания виде:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy)$$

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy)$$

Теорема 2.

Если гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \text{где } \alpha \le t \le \beta \quad (A \leftrightarrow \alpha,\ B \leftrightarrow \beta),$$

и функция $f(z)$ интегрируема по кривой AB, то справедливо равенство

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)dt\ ,$$

Замечание.

Часто в качестве параметра выбирается угол $\varphi = \arg z$.

Пример. $\int_L \overline{z} dz$

1. L – прямая от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$
2. L – дуга окружности $|z| = 1$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = 1$

Интегрирование аналитических функций

Вспомним:

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной (нет вырезанных кусочков) области $D \subset Oxy$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл $\int\limits_{\ell} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint\limits_{\ell} Pdx + Qdy = 0 \quad \forall \ell \subset D$

3) справедливо равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

4) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du = Pdx + Qdy .$$

Теорема (Коши, для односвязной области).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру (ℓ), целиком лежащему в D, равен нулю.

Замечания.

1) Порядком связности области называется число связных частей, на которые разбивается ее граница.

2) Утверждение, обратное теореме Коши, тоже справедливо.

Если $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $(\ell) \subset D$ выполняется условие

$$\oint\limits_{(\ell)} f(z)dz = 0,$$

то $f(z)$ аналитична в D (***теорема Морера***).

Теорема (о независимости интеграла от аналитической функции от формы кривой).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, то $\forall A, B\in D$ интеграл $$\int\limits_{AB} f(z)dz$$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B.

Пусть G – $(n+1)$-связная область, (ℓ), (ℓ_1),…,(ℓ_n) – ее границы.

(ℓ) – внешняя граница G,

(ℓ_1), …, (ℓ_n) – внутренние границы G .

Теорема (Коши для многосвязной области).

Пусть кривые (ℓ), (ℓ_1) ,…, (ℓ_n) – кусочно-гладкие, не пересекающиеся и ни одна из областей, ограниченных (ℓ_i) не содержит кривой (ℓ_j).

Если $f(z)$ аналитична в области G и на ее границах, то

$$\boxed{\oint\limits_{+(\ell)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{+(\ell_k)} f(z)dz\,.}$$

Первообразная аналитической функции. Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(z)$ называется ***первообразной функции*** $f(z)$ на множестве D, если $F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, $z_0, z \in D$.

Тогда интеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$

не зависит от формы кривой, соединяющей z_0 и z.

$\Rightarrow$ Если z_0 фиксировано, то $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ – функция от z.

Теорема (о существовании первообразной).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

Тогда $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ является первообразной функции $f(z)$ в D.

Теорема (о количестве первообразных).

Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(z)$ называют ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$ и обозначают

$$\int f(z)dz$$

Следствие.

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее неопределенный интеграл может быть записан в виде

$$\int f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz + C$$

где C – произвольная постоянная $(C \in \mathbb{C})$, а интеграл берется вдоль любой кривой в D, соединяющей точки z_0 и z .

Теорема (формула Ньютона – Лейбница для интеграла от аналитической функции).

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от $f(z)$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки z_1 и z_2, и справедлива формула:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

где $F(z)$ – некоторая первообразная функции $f(z)$.

Примеры.

1. $\int_L 3z^2 dz$, L – прямая от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$

2. $\oint_L \frac{dz}{z - z_0}$, L – окружность радиуса R с центром в точке z_0

Интегральная формула Коши

Теорема (интегральная формула Коши). Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей в себе свою границу L. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

где $z_0 \in D$ – любая точка внутри области D, а интегрирование производится в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).

Интеграл в правой части называется ***интегралом Коши***, а сама формула – ***интегральной формулой Коши***.

Замечание. Интегральная формула Коши позволяет находить значение аналитической функции в любой точке области, зная значение на её границе.

Следствие (теорема о производных высших порядков аналитической функции).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей в себе свою границу L. Тогда внутри этой области $f(z)$ имеет производные любого порядка, причем для них справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

где z_0 – любая точка внутри области D.

Замечание. Полученные формулы можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым областям.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0) \qquad \oint\limits_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

Примеры.

1. $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4}$ а) L – окружность $|z| = 1$;

б) L – окружность $|z-i| = 2$.

2. $\oint\limits_L \frac{\cos z dz}{z^3}$, L – окружность $|z| = 1$.

§ 4. Ряды в комплексной плоскости

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{u_n\}$.

Определение. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{\text{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют ***комплексным числовым рядом***.

Если $u_n = a_n + ib_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Построим последовательность

$$S_1 = u_1\,, \quad S_2 = u_1 + u_2\,, \quad \ldots\,, \quad S_{\text{n}} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n\,, \quad \ldots$$

Числа $S_1, S_2, \ldots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum u_n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$$

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{ S_{\text{n}} \}$. При этом, число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называют ***суммой ряда*** $\sum u_n$.

Если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ \ (\lim_{n\to\infty} S_n - \nexists)$$

то говорят, что ряд $\sum u_n$ ***расходится*** и не имеет суммы.

Теорема.

Ряд $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ сходится к $S = S_1 + iS_2 \Leftrightarrow$ сходятся ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, причем S_1 – сумма ряда $\sum a_n$, S_2 – сумма ряда $\sum b_n$.

Замечания.

1) Исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами.

2) В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами.

Теорема (признак абсолютной сходимости)

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называют ***абсолютно сходящимся***, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.

Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют ***условно сходящимся***.

Степенные ряды

Степенным рядом (***рядом по степеням $z–z_0$***) в комплексной плоскости называется ряд вида

$$a_0 + a_1(z–z_0) + a_2(z–z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

где z_n, $z_0 \in \mathbb{C}$. Числа a_n называются ***коэффициентами степенного ряда***, $z = x + iy$ – комплексная переменная.

Частный случай степенного ряда – ***ряд по степеням z*** :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$$

Будем изучать ряд $\sum a_n z^n$. На общий случай результаты переносятся заменой $t = z - z_0$.

Степенной ряд $\sum a_n z^n$ всегда сходится в точке $z = 0$.

Теорема (Абеля).

1) Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z| < |z_1|$;

2) Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ расходится в точке z_2, то он расходится в любой точке z, удовлетворяющей условию

$$|z| > |z_2|.$$

Из теоремы Абеля $\Rightarrow$ $\exists\, R>0$ такое, что ряд $\sum a_n z^n$ сходится (абсолютно) при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называют ***радиусом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$.

Круг $|z| < R$ называют ***кругом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$.

Радиус сходимости находится по признаку Даламбера или признаку Коши.

Примеры.

Исследовать ряды на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n}$

Свойства степенных рядов.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости является аналитической функцией.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз.

Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Ряд Тейлора

Напомним: говорят, что функция $f(x)$ ***разложима в ряд***, если $\exists$ функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого является $f(x)$.

Определение. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0. ***Рядом Тейлора функции*** $f(z)$ в окрестности точки z_0 (по степеням $z - z_0$) называется степенной ряд вида

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Теорема (о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд).

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, то есть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

для любых z таких, что $|z - z_0| < R$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Из интегральной формулы Коши следует, что коэффициенты разложения в ряд Тейлора могут быть найдены по следующим формулам:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

где L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга $|z-z_0|<R$.

Замечание. Разложения в ряд Маклорена для функций

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \ln(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

На всей комплексной плоскости:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

На окружности $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Ряд Лорана

Теорема (о разложении функции в ряд Лорана).

Всякая функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть разложена в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \dfrac{f(t)\,dt}{(t - z_0)^{n+1}}$,

L – любая окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Этот ряд называется ***рядом Лорана*** функции $f(z)$ ***в точке z_0*** (по степеням $z - z_0$).

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0)^1 + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)^1} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)^1+c_2(z-z_0)^2+\ldots\ +\frac{c_{-1}}{(z-z_0)^1}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ – ***правильная часть ряда Лорана***.

$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – ***главная часть ряда Лорана***.

Замечания.

1) Правильная часть ряда Лорана сходится внутри круга $|z-z_0|<R$.
2) Главная часть ряда Лорана сходится во внешности круга $|z-z_0|>r$.

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$.
Рассмотрим главную часть ряда Лорана этой функции:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(t)(t-z_0)^{n-1}dt$$

Но функция $f(t)(t-z_0)^{n-1}$ – аналитическая для всех n $\Rightarrow$
интеграл от этой функции по замкнутому контуру равен 0 $\Rightarrow$
$c_{-n}=0$ для всех n $\Rightarrow$
главная часть ряда Лорана равна 0 $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow \text{ получили разложение в ряд Тейлора}$$

Если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z-z_0|<R$,
то её разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора

Разложение в ряд Лорана производится в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Замечания.

1) Допускается $r = 0$ (ряд сходится в проколотой окрестности точки z_0) и $R = +\infty$ (ряд сходится во внешности круга $|z - z_0| > r$).
2) Если $r \geq R$, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Коэффициенты ряда Лорана чаще всего находят используя уже готовые разложения.

Пример.

Разложить в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$ (то есть по степеням z).

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Рассмотрим ряд Лорана функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Обозначим $t = \dfrac{1}{z} \;\Rightarrow\; f(z) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Тогда разложение в ряд Лорана функции $f(1/t)$ в точке $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} t^n}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{t^n}}_{\text{главная часть}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n}$$

разложение в ***ряд Лорана*** функции $f(z)$ ***в точке $z = \infty$***

$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n}}$ ***правильная часть ряда Лорана***

$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n}$ ***главная часть ряда Лорана***

Замечание. По внешнему виду ряд Лорана для $z = \infty$ совпадает с рядом Лорана для $z = 0$.

§ 5. Изолированные особые точки

Нули аналитической функции

Определение. Точка z_0, принадлежащая области определения функции $f(z)$, называется ***нулём функции*** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

В области аналитичности функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 функция может быть представлена рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0)^1 + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

$c_0 = f(z_0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{если } z_0 \text{ нуль функции } f(z), \text{ то } c_0 = 0}$

Если не только $c_0 = 0$, но и $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots$$

При этом z_0 называется ***нулём кратности m*** или ***нулём m-го порядка***. Если $m = 1$, то z_0 называется ***простым нулём***.

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0, \;\; c_m \neq 0$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Теорема 1. Точка z_0 является нулём порядка m аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\boxed{f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= c_m (z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots = \\ &= (z - z_0)^m (c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)^m \varphi(z) \end{aligned}$$

$$c_m \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \varphi(z_0) = c_m \neq 0$$

Теорема 2. Точка z_0 является нулём порядка m аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\boxed{f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),}$$

где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$.

Примеры.

Указать порядок нуля $z_0 = 0$ функции $f(z)$:

а) $f(z) = z - \sin z$; *б*) $f(z) = z^2 \cdot \cos z$; *в*) $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Способы нахождения порядка нуля функции:

1. Нахождение производных (теорема 1).

2. Представление функции в виде $(z - z_0)^m \varphi(z)$ (теорема 2).

3. Разложение в ряд Тейлора.

Определение. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ называется ***нулём функции*** $f(z)$, если

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

При этом функцию $f(z)$ доопределяют равенством $f(z) = 0$.

Порядок нуля можно определить как порядок нуля функции $f(1/t)$ в точке $t = 0$, то есть сделав замену $z = 1/t$.

Если $t = 0$ – нуль кратности m, то $f(1/t) = c_{-m}t^{m} + c_{-(m+1)}t^{m+1} + \ldots$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{c_{-m}}{z^{m}} + \frac{c_{-(m+1)}}{z^{m+1}} + \ldots = \frac{\varphi(z)}{z^{m}}, \text{ где } \lim_{z\to\infty}\varphi(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Пример.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

3 способа

Изолированные особые точки

Определение. Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками этой функции.

Определение. Точка z_0 называется ***изолированной особой точкой функции*** $f(z)$, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции $f(z)$.

Если z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое число $R > 0$, что в кольце $0 < | z - z_0 | < R$ функция $f(z)$ будет аналитической $\Rightarrow$ разлагается в ряд Лорана

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}$$

правильная часть ***главная часть***

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}$$

правильная часть ***главная часть***

Определение. Если ряд Лорана не содержит главной части, то есть в ряде нет членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$.

Определение. Если ряд Лорана в главной части содержит конечное число членов, то есть в ряде конечное число членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$.

Определение. Если ряд Лорана в главной части содержит бесконечное число членов, то есть в ряде бесконечное число членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$.

1. Устранимые особые точки

z_0 – устранимая особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

во всех точках круга $|z - z_0| < R$, кроме точки z_0.

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0} \Rightarrow$$

1. Устранимую особую точку z_0 можно «устранить», доопределив функцию $f(z)$ в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$, при этом функция $f(z)$ становится аналитической во всём круге $|z - z_0| < R$, а точка z_0 – правильной точкой.
2. В достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является ограниченной.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Пример.

Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их тип, если

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

2. Полюсы

z_0 – полюс $\Rightarrow$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)^1}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

где $c_{-m}\neq 0$.

В этом случае полюс z_0 называется ***полюсом m-го порядка*** функции $f(z)$; если $m=1$, то полюс z_0 называется ***простым***.

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left((z-z_0)^m\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\right.$$

$$\left.+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\ldots+c_{-m}\right)\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$ где $\varphi(z)$ – аналитическая функция, причём $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty}$$

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Вопрос: как определить порядок полюса?

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция, причём $\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0.$

Способ 1.

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \left[\begin{array}{l} \infty, \text{ если } k < m \\ \varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0, \text{ если } k = m \end{array}\right.$$

Найти такое число m, что

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \text{ – конечное число, не равное } 0}$$

Пример.

Определить тип особенности функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

Вопрос: как определить порядок полюса?

$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция, причём $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0.$

Способ 2.

$\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)},\ \ \varphi(z_0)\neq 0\ \Rightarrow\ z_0$ – нуль порядка m функции $1/f(z)$

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда она является нулём кратности m функции $1/f(z)$, аналитической в точке z_0.

Пример.

Исследовать особенности функции $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z+2i)(z-i)^3}$.

3. Существенно особые точки

Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то можно доказать, что

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) \text{ не существует: ни конечный, ни бесконечный.}}$$

Замечание. Чтобы показать, что изолированная особая точка z_0 является существенно особой, обычно находят разложение функции в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$.

Пример.

Определить тип особенности функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если

$f(z) = e^{1/z}$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Бесконечно удаленная особая точка

Определение. Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$, то точка $z = \infty$ называется ***изолированной особой точкой функции*** $f(z)$.

Чтобы определить тип особенности бесконечно удаленной изолированной особой точки, необходимо выполнить преобразование $z = 1/t$. При этом точка $z = \infty$ отображается в точку $t = 0$.

В зависимости от того, будет ли точка $t = 0$ устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(1/t)$, аналогичный тип особенности имеет и точка $z = \infty$.

1. $z=\infty$ – ***устранимая*** особая точка $\Rightarrow$

$$f(1/t)=c_0+c_{-1}t^1+c_{-2}t^2+\ldots \quad \Rightarrow \quad f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots$$

ряд Лорана не содержит главной части

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=c_0$ – конечное число

2. $z=\infty$ – ***полюс порядка m*** $\Rightarrow$

$$f(1/t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{-n}t^n+\frac{c_1}{t^1}+\frac{c_2}{t^2}+\ldots+\frac{c_m}{t^m} \Rightarrow$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+c_1z^1+c_2z^2+\ldots+c_mz^m$$

ряд Лорана в главной части содержит конечное число членов

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

Вопрос: как определить порядок полюса?

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+c_1z^1+c_2z^2+\ldots+c_mz^m=$$

$$=z^m\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^{n+m}}+\frac{c_1}{z^{m-1}}+\frac{c_2}{z^{m-2}}+\ldots+c_m\right)=z^m\varphi(z),\quad \lim_{z\to\infty}\varphi(z)=c_m\neq 0$$

Способ 1.

Найти такое число m, что $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^m}$ – конечное число, не равное 0.

Способ 2.

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z^m\varphi(z)},\quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{\varphi(z)}\neq 0 \quad\Rightarrow$$

$z=\infty$ – нуль порядка m функции $1/f(z)$

Определить, нулём какого порядка является точка $z=\infty$ для функции $1/f(z)$.

3. $z=\infty$ – ***существенно*** особая точка $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}t^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{t^n} \quad \Rightarrow$$

бесконечно много членов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

бесконечно много членов

главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует: ни конечный, ни бесконечный

Пример.

Определить тип особой точки z = ∞ для функции

а) $f(z)=\dfrac{z+3i}{2-z}$; *б*) $f(z)=\dfrac{z^2}{i-z}$.

§ 6. Вычет функции

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$,

L – некоторый замкнутый контур, лежащий внутри круга и обходящий точку z_0 в положительном направлении.

Тогда по теореме Коши для односвязной области

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$.

Задача: вычислить $\oint_L f(z)dz.$

z_0 – изолированная особая точка $\Rightarrow$

$f(z)$ – аналитическая внутри кольца $0<|z-z_0|<R \Rightarrow$

разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \oint_L (z-z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}$$

$$\boxed{\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)}$$

$$\oint_L (z-z_0)^n dz = 0 \qquad \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i$$

$$\boxed{\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)}$$

$$n > 1 \quad \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint_L f(z)dz = c_{-1} \cdot 2\pi i \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz$$

Определение. ***Вычетом функции*** $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz,$$

где L – любой замкнутый контур, лежащий внутри области аналитичности функции $f(z)$, обходящий точку z_0 в положительном направлении и не содержащий в себе других особых точек.

Обозначение:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \qquad \operatorname{Res} f(z_0) \qquad \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \qquad \operatorname{res} f(z_0)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\,dz = c_{-1}$$

Пример.

Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если $f(z) = z^3 e^{2/z}$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Способы вычисления вычетов

1. $z_0 -$ ***устранимая*** особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = 0}$$

2. $z_0 -$ ***простой полюс*** $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + c_0 \underbrace{(z - z_0)}_{0} + c_1 \underbrace{(z - z_0)^2}_{0} + c_2 \underbrace{(z - z_0)^3}_{0} + \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = c_{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)}$$

Частный случай простого полюса:

$$\boxed{f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}}$$

$\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – функции, аналитические в z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$

$\psi(z)$ имеет в z_0 простой ноль $\Rightarrow$ $\psi(z_0) = 0, \;\; \psi'(z_0) \neq 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z - z_0}{\psi(z)} =$$

$$= \varphi(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z - z_0}{\psi(z) - \psi(z_0)} = \varphi(z_0)\frac{1}{\psi'(z_0)}$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

3. z_0 – ***полюс порядка m*** $\Rightarrow$

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)^1+\ldots$$

$$(z-z_0)^m f(z)=$$

$$=\cancelto{0}{c_{-m}}+c_{-m+1}\cancelto{0}{(z-z_0)}+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\ldots$$

Продифференцируем полученное равенство $(m-1)$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)=c_{-1}(m-1)!+c_0 m!\cancelto{0}{(z-z_0)}+\ldots \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{z\Rightarrow z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)=c_{-1}(m-1)! \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\Rightarrow z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big)}$$

5. z_0 – ***существенно*** особая точка

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}}$$

коэффициент c_{-1} находится из разложения в ряд Лорана

Вычет функции в бесконечно удалённой точке

Пусть $z = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$ $\Rightarrow$

существует такое число $R > 0$, что вне круга $|z| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической $\Rightarrow$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

L – некоторый замкнутый контур, лежащий вне круга $|z| < R$

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} \oint_L \frac{dz}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \oint_L z^n dz = c_{-1} \oint_L \frac{dz}{z} = c_{-1} 2\pi i \Rightarrow$$

$$\oint_{L^-} f(z)dz = -c_{-1} 2\pi i \quad \Rightarrow \quad -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z)dz$$

Определение. ***Вычетом функции*** $f(z)$ в изолированной особой точке $z = \infty$ называется число, равное

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z)dz.$$

Замечание. Обход контура L происходит по часовой стрелке, то есть точка $z=\infty$ остаётся слева.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz = -c_{-1}$$

1. $z=\infty$ – ***устранимая*** особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(z) = -\frac{c_{-1}}{z^2} - \frac{2c_{-2}}{z^3} + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$z^2 f'(z) = -c_{-1} - \underbrace{\frac{2c_{-2}}{z^1}}_{\to 0} - \ldots \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = -c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)}$$

2. $z=\infty$ – ***полюс порядка m***

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}[z^{m+2}\cdot f^{(m+1)}(z)]}$$

3. $z = \infty$ – ***существенно*** особая точка

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}}$$

коэффициент c_{-1} находится из разложения в ряд Лорана

Замечание. Вычисление вычета относительно $z = \infty$ можно свести к вычислению вычета относительно $t = 0$, если сделать замену $z = 1/t$.

Основная теорема о вычетах

Теорема (основная теорема о вычетах).

Пусть а) функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots z_n$;

б) L – замкнутый контур в D, внутри которого содержатся точки $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Тогда

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots z_n$. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$ относительно ее особых точек, включая вычет относительно ∞, равна нулю:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

Применение вычетов при вычислении интегралов

1. Вычисление контурных интегралов

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Пример 1. Найти $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2 (z-3)(z-6)}$

Пример 2. Найти $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^{15} dz}{z^8+2}$

2. Вычисление интегралов типа $\boxed{\int\limits_{a}^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)dx}$

Имеем: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Замена: $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx$

Получим: $$\int\limits_{a}^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

Пример 3. Найти $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+3\sin x}$$

3. Вычисление интегралов типа $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}\,dx}$

(где $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$).

Теорема. Пусть $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$, где $P_n(x)$, $P_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$.

Тогда
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$
где z_1, z_2, … , z_m – особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $(\mathrm{Im} z_k > 0)$.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$

4. Вычисление интегралов типа

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx} \qquad \boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx}$$

Теорема.

Пусть 1) $f(z)$ аналитична на вещественной оси;

2) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$;

3) $f(z)$ стремится к 0 при $|z| \to \infty$.

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z).$$

Следствие.

Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Тогда
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z}\cdot f(z)\right),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$) .

Пример 5. Найти $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+2x+10}$