Числовые и функциональные ряды

Разбор практических заданий.
Числовые ряды

ПРИМЕР 1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ

По определению $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

В нашем случае $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Найдем более компактную формулу для S_n.

1) Имеем: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$,

$$\Rightarrow \quad 1 = A(n+1) + Bn,$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (A+B)n + A,$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} n^1: & A+B=0, \\ n^0: & A=1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=1, \quad B=-1. \qquad \Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

2) Рассмотрим последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

ПРИМЕР 2. Найти сумму ряда $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 4n + 3}$.

РЕШЕНИЕ

По определению $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

В нашем случае $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n = \frac{6}{8} + \frac{6}{15} + \ldots + \frac{6}{n^2 - 4n + 3}$.

Найдем более компактную формулу для S_n.

Имеем:

$$u_n = \frac{6}{n^2 - 4n + 3} = \frac{6}{(n-3)(n-1)} = \frac{A}{n-3} + \frac{B}{n-1} =$$

$$= \frac{A(n-1) + B(n-3)}{(n-3)(n-1)}.$$

$$\Rightarrow \quad 6 = A(n-1) + B(n-3) \quad \text{или} \quad 6 = (A+B)n + (-A-3B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^1: & A + B = 0, \\ n^0: & -A - 3B = 6. \end{cases} \quad \Rightarrow A = 3, \quad B = -3.$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \frac{3}{n-3} - \frac{3}{n-1}.$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \left(\frac{3}{2} - \cancel{\frac{3}{4}}\right) + \left(\frac{3}{3} - \cancel{\frac{3}{5}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{3}{n-4}} - \frac{3}{n-2}\right) + \left(\cancel{\frac{3}{n-3}} - \frac{3}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{n-2} - \frac{3}{n-1}.$$

Таким образом,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{n-2} - \frac{3}{n-1}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = 2{,}5.$$

ПРИМЕР 3. Исследовать ряды с помощью необходимого признака сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{4n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$.

РЕШЕНИЕ

а) Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0,$

$\Rightarrow$ необходимое условие сходимости нарушено,

$\Rightarrow$ ряд расходится.

б) Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)^2}{4n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2^n+1)\cdot 2^n\ln 2}{4} = +\infty \neq 0,$$

$\Rightarrow$ необходимое условие сходимости нарушено,

$\Rightarrow$ ряд расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$.

Имеем: $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+10} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

$\Rightarrow$ необходимое условие сходимости выполнено ,

$\Rightarrow$ информации о сходимости ряда признак не дает .

ПРИМЕР 4. Исследовать на сходимость с помощью первого признака сравнения ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (ряд геом. прогрессии, $q = \frac{1}{2} < 1$).

Имеем: $\frac{1}{2^n + 1} \le \frac{1}{2^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ сходится по первому признаку сравнения.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ (ряд геом. прогрессии, $q = \frac{2}{5} < 1$).

Имеем: $\frac{2^n}{5^n+1} \leq \frac{2^n}{5^n}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ – сходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$ сходится по первому признаку сравнения.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд).

Имеем: $\frac{1}{3n-1}\geq\frac{1}{3n}$,

$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ расходится по первому признаку сравнения.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический, $\alpha = 2 > 1$).

Имеем: $\frac{1}{(n+1)(n+5)} \le \frac{1}{n^2}$,

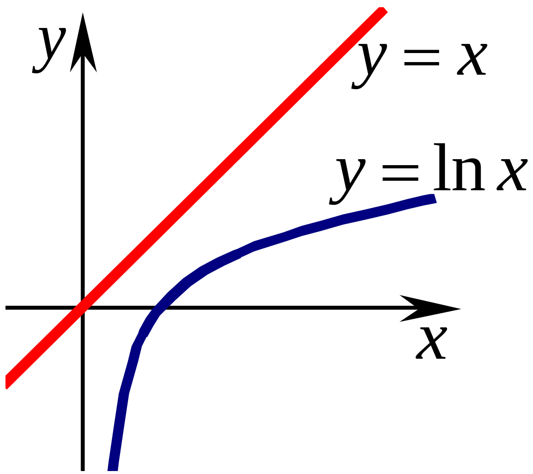
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$ сходится по 1-му признаку сравнения.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (гармонический ряд без 1-го члена).



Имеем: $\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ – расходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ расходится по 1-му признаку сравнения.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 2^n}{n^2+3}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический $\alpha = 2 > 1$).

Имеем: $\dfrac{\cos^2 2^n}{n^2+3} \le \dfrac{1}{n^2+3} \le \dfrac{1}{n^2}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – сходится.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 2^n}{n^2+3}$ сходится по первому признаку сравнения.

ПРИМЕР 5. Исследовать на сходимость с помощью второго признака сравнения ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4\cdot 2^n - 3}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ (ряд геом. прогрессии, $q = \dfrac{1}{2} < 1$).

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ – сходится,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n - 3} : \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n} = \frac{1}{4} \neq \begin{cases} 0, \\ \infty. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4\cdot 2^n - 3}$ сходится по второму признаку сравнения.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (ряд геом. прогрессии, $q=\frac{2}{5}<1$).

Имеем: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ – сходится,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}:\frac{2^n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)\cdot 5^n}{(5^n+1)\cdot 2^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 5^n}{5^n\cdot 2^n}=1\neq\begin{cases}0,\\ \infty.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$ сходится по второму признаку сравнения.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонический ряд).

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится, $\frac{n+1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n}$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n}{n(n+2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1\neq\begin{cases}0,\\ \infty.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$ расходится по второму признаку сравнения.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n-1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (обобщенный гармонический, $\alpha=\dfrac{1}{2}\le 1$).

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}:\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{2n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}\neq\begin{cases}0,\\ \infty.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n-1}$ расходится по второму признаку сравнения.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ (ряд геом. прогрессии, $q = \frac{1}{2} < 1$).

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ – сходится, $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \frac{\pi}{2^n}$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1 \neq \begin{cases} 0, \\ \infty. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ сходится по второму признаку сравнения.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{4n}\right).$

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд).

Имеем: $\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – расходится, $tg\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\sim\dfrac{\pi}{4n}$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$ расходится по второму признаку сравнения.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$.

РЕШЕНИЕ

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический, $\alpha = 2 > 1$)

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{arctgn}{n^2+1} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot arctgn}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = \frac{\pi}{2} \neq \begin{cases} 0, \\ \infty. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$ сходится по второму признаку сравнения.

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^2-(\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-n+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (обобщенный гармонический, $\alpha=\frac{1}{2}\le 1$).

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\neq\begin{cases}0,\\ \infty.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково относительно сходимости,

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ расходится по 2-му признаку сравнения.

ПРИМЕР 6. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} : \frac{2^n}{n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^{10}}{2^n \cdot (n+1)^{10}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{n^{10}} = 2 > 1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$ расходится по признаку Даламбера.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}\cdot n!}{10^n\cdot(n+1)!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}=10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=10\cdot 0=0<1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$ сходится по признаку Даламбера.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2[n+1]+1)!} : \frac{1}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+3)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 < 1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ сходится по признаку Даламбера.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2[n+1])!}{(n+1)^2} : \frac{(2n)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (2n+2)!}{(n+1)^2 \cdot (2n)!} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = +\infty > 1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2}$ расходится по признаку Даламбера.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^2}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2[n+1])!}{(n+1)^2}:\frac{(2n)!}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(2n+2)!}{(n+1)^2\cdot(2n)!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=$$

$$=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{(2n)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2)=+\infty>1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^2}$ расходится по признаку Даламбера.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} tg\left(\alpha(x)\right)\sim\alpha(x) \\ npu \quad \alpha(x)\to 0 \end{matrix}\right\}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\pi}=\frac{1}{2}<1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ сходится по признаку Даламбера.

ПРИМЕР 7. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{5n^2}=\frac{2}{5}<1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$ сходится по признаку Коши.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$ сходится по признаку Коши.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1.$$

$\Rightarrow$ Исследуемый ряд расходится по признаку Коши.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right).$

РЕШЕНИЕ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\cdot\arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{2/n}\cdot\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{2/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = (\infty^0) = A;$$

$$\Rightarrow \quad \ln A = \ln(\lim_{n\to\infty} n^{2/n}) = \lim_{n\to\infty}(\ln n^{2/n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\ln n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{1} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad A = e^0 = 1.$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} n^{2/n} \cdot \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 0 = 0 < 1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится по признаку Коши.

ПРИМЕР 8. Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}$.

Имеем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln\left|\ln(x+1)\right|\Big|_{1}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left|\ln(x+1)\right| - \ln\left|\ln 2\right| = (+\infty - \ln\left|\ln 2\right|) = +\infty.$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$ расходится по интегральному признаку.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot \ln^2(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+1)\cdot \ln^2(x+1)}$.

Имеем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot \ln^2(x+1)} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \left. \frac{-1}{\ln(x+1)} \right|_{1}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{\ln 2} = \left(\frac{-1}{+\infty} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

$\Rightarrow$ интеграл сходится.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot \ln^2(n+1)}$ сходится по интегральному признаку.

ПРИМЕР 8. Исследовать на сходимость ряды. Определить тип сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n}{n^2+1}.$

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}.$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд).

Имеем: $\dfrac{n}{n^2+1}\sim\dfrac{1}{n},\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – расходится.

$\Rightarrow$ Ряды ведут себя одинаково относительно сходимости.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$ расходится по 2-му признаку сравнения.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n}{n^2+1}$ не является абсолютно сходящимся.

2) Проверяем условия признака Лейбница:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot u_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0;$

б) $\dfrac{1}{2} > \dfrac{2}{5} > \dfrac{3}{10} > \ldots$

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n+1/n}, \quad \left\{\frac{1}{n+1/n}\right\}$$ – монотонно убывает.

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n}{n^2+1}$ сходится, сходимость условная.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n+1}$.

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (ряд геометрической прогрессии).

Имеем: $\frac{1}{2^n+1}\sim\frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходится.

$\Rightarrow$ Ряды ведут себя одинаково относительно сходимости.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ сходится по 2-му признаку сравнения.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n+1}$ абсолютно сходится.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$.

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$.

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \neq 0$.

$\Rightarrow$ необходимое условие сходимости нарушено,

$\Rightarrow$ ряд модулей расходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$ не является абсолютно сходящимся.

2) По свойству пределов, если $\lim\limits_{x\to x_0}\left| f(x)\right| \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n \neq 0$.

$\Rightarrow$ необходимое условие сходимости для знакочередующегося ряда тоже нарушено,

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$ расходится.

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\ln^2 n}{n}.$

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}.$

Рассмотрим $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}dx.$

Имеем:

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\limits_{2}^{+\infty}\ln^2 x d(\ln x)=\left.\frac{\ln^3 x}{3}\right|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln^3 x-\ln^3 2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(+\infty-\ln^3 2)=+\infty.$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится,

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ расходится по интегральному признаку.

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\ln^2 n}{n}$ не является абсолютно сходящимся.

2) Проверяем условия признака Лейбница:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln n}{n} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0;$

б) $\dfrac{\ln^2 2}{2} < \dfrac{\ln^2 3}{3} < \dfrac{\ln^2 4}{4}$ $\left(\dfrac{\ln^2 2}{2} \approx 0{,}24, \quad \dfrac{\ln^2 3}{3} \approx 0{,}40, \quad \dfrac{\ln^2 4}{4} \approx 0{,}48\right)$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}, \quad x \in [2;\, +\infty).$

Имеем: $f'(x) = \dfrac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}.$

Критические точки функции $f(x)$ на $[2;\, +\infty)$:

$$2 - \ln x = 0 \;\Rightarrow\; x = e^2 \approx 7{,}39.$$

Если $x \in [2;\, e^2)$, то $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.

Если $x \in (e^2;\, +\infty)$, то $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает.

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\ln^2 n}{n} \right\}$$ монотонно убывает, начиная с номера $N = 8$.

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены.

$\Rightarrow$ Ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln^2 n}{n}$ сходится, сходимость условная.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 < 1.$$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по признаку Даламбера.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ абсолютно сходится.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{n^2}}{n!}.$

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}.$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}:\frac{2^{n^2}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}\cdot n!}{2^{n^2}\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+2n+1}\cdot n!}{2^{n^2}\cdot n!\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{(n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^{2n+1}\cdot\ln 2}{1}=+\infty>1.$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$ расходится по признаку Даламбера.

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{n^2}}{n!}$ не является абсолютно сходящимся.

2) Известно, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Но тогда, по свойству пределов, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n \neq 0$.

$\Rightarrow$ Необходимое условие сходимости нарушено.

$\Rightarrow$ Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!}$ расходится.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n}{n^2}.$

РЕШЕНИЕ

Ряд – знакопеременный.

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin 2n|}{n^2}.$

Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический, $\alpha = 2 > 1$).

Имеем: $\dfrac{|\sin 2n|}{n^2} < \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – сходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin 2n|}{n^2}$ сходится по 1-му признаку сравнения.

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n}{n^2}$ абсолютно сходится.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\left(\dfrac{5n^2+2n}{2n^2+1}\right)^n.$

РЕШЕНИЕ

Ряд – знакопеременный.

1) Рассмотрим ряд модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n^2+2n}{2n^2+1}\right)^n.$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+2n}{2n^2+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n}{2n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{2n^2}=\frac{5}{2}>1.$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n^2+2n}{2n^2+1}\right)^n$ расходится по признаку Коши.

$\Rightarrow$ исследуемый ряд не является абсолютно сходящимся.

2) Известно, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n} > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$.

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{5}{2} > 1$.

Но тогда, по свойству пределов, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

$\Rightarrow$ Необходимое условие сходимости нарушено.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\left(\dfrac{5n^2+2n}{2n^2+1}\right)^n$ расходится.