Числовые и функциональные ряды

Разбор практических заданий. Функциональные и степенные ряды

ПРИМЕР 1. Найти область сходимости ряда :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x)) = (0; +\infty).$

2) Применим признак Коши для исследования ряда модулей.

Имеем: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ln^n x|} = \lim_{n\to\infty} |\ln x| = |\ln x|.$

Получаем:

а) ряд сходится абсолютно, если $|\ln x| < 1,$

$$\Rightarrow\ -1 < \ln x < 1,$$

$$\Rightarrow\ e^{-1} < x < e;$$

б) ряд расходится, если $|\ln x| > 1$
(в силу нарушения необходимого условия сходимости);

в) информации о поведении ряда нет, если

$$|\ln x| = 1,$$

$$\Rightarrow\ x = e^{-1} \quad \text{или} \quad x = e.$$

3) Рассмотрим ряд при $x = e^{-1}$ и $x = e$.

$x = e^{-1}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n (e^{-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (-1)^n \neq 0.$$

$x = e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n e = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} 1^n = 1 \neq 0.$$

Ответ: ряд сходится, если $x \in (e^{-1}; e)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$.

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x)) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{x^{n+1}} : \frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot x^n}{x^{n+1}\cdot n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Получаем:

а) ряд сходится абсолютно, если $\dfrac{1}{|x|} < 1$,

$$\Rightarrow \ |x| > 1,$$

$$\Rightarrow \ x \in (-\infty;\, -1) \cup (1;\, +\infty) \ ;$$

б) ряд расходится, если $\dfrac{1}{|x|} > 1$

(в силу нарушения необходимого условия сходимости);

в) информации о поведении ряда нет, если

$$\frac{1}{|x|}=1,$$

$$\Rightarrow\ x=\pm 1.$$

3) Рассмотрим ряд при $x=\pm 1$.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty\neq 0.$$

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\infty\neq 0.$$

Ответ: ряд сходится, если $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$.

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x)) = \mathbb{R}$.

2) Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x}} : \frac{nx}{e^{nx}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x\cdot e^{nx}}{e^{(n+1)x}\cdot nx}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}.$$

Получаем:

а) ряд сходится абсолютно, если $\frac{1}{e^x} < 1$,

$$\Rightarrow\ e^x > 1,$$

$$\Rightarrow\ x > 0,$$

$$\Rightarrow\ x\in(0;\ +\infty);$$

б) ряд расходится, если $\frac{1}{e^x} > 1$

(в силу нарушения необходимого условия сходимости);

в) информации о поведении ряда нет, если $\frac{1}{e^x} = 1,$

$\Rightarrow\ x = 0.$

3) Рассмотрим ряд при $x = 0.$

$x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 0}{e^{n \cdot 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ – сходится (по определению).

Ответ: ряд сходится, если $x \in [0; +\infty).$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$.

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x)) = \mathbb{R}$.

2) Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{|x|} = \frac{1}{2} < 1.$$

$\Rightarrow$ ряд сходится $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ответ: ряд сходится на всей числовой прямой.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$.

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x)) = \mathbb{R}$.

2) Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} : \frac{\sin nx}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n+1)x\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot\sin nx}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\left|\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}\right| - \nexists$$

$\Rightarrow$ признак Даламбера ($\Rightarrow$ и признак Коши) информации о сходимости ряда не дает.

3) Рассмотрим ряд модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^2}$.

Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический, $\alpha=2>1$).

Имеем: $\frac{|\sin nx|}{n^2}<\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^2}$ сходится по 1-му признаку сравнения.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ответ: ряд сходится на всей числовой прямой.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}.$

РЕШЕНИЕ

1) $D(u_n(x))=\mathbb{R}.$

2) Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}}:\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot(1+x^{2n})}{(1+x^{2n+2})\cdot x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}\right|=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{1}\right|=|x|, & \text{если } |x|<1,\\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}}{x^{2n+2}}\right|=\dfrac{1}{|x|}, & \text{если } |x|>1,\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ сходится абсолютно $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}.$

3) Рассмотрим ряд при $x = \pm 1$.

$x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{1+1^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$x = –1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(-1)^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ – расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2} \neq 0.$$

Ответ: ряд сходится, если $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

ПРИМЕР 2. Найти область сходимости ряда :

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}.$$

РЕШЕНИЕ

1) Найдем интервал сходимости ряда.

а) Центр интервала сходимости: $x_0 = 2$,

б) Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} : \frac{1}{(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Имеем: $x_0 - R = 2 - 1 = 1$, $x_0 + R = 2 + 1 = 3$.

$\Rightarrow$ ряд сходится абсолютно в интервале $(1; 3)$.

2) Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

$x = 3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд).

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Для данного ряда имеем:

а) ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

$\Rightarrow$ ряд не является абсолютно сходящимся;

б) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$;

в) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывает.

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены.

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, сходимость условная.

Ответ: ряд сходится, если $x \in [1; 3)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

РЕШЕНИЕ

1) Найдем интервал сходимости ряда.

а) Центр интервала сходимости: $x_0 = 0$,

б) Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Так как $R = \infty$, то ряд сходится абсолютно $\forall x$.

Ответ: ряд сходится на всей числовой прямой.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+2)^n$.

РЕШЕНИЕ

1) Найдем интервал сходимости ряда.

а) Центр интервала сходимости: $x_0 = -2$,

б) Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Т.к. $R = 0$, то интервал сходимости вырождается в точку – центр интервала сходимости

Ответ: ряд сходится только в точке $x_0 = -2$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 2^n}$.

РЕШЕНИЕ

1) Найдем интервал сходимости ряда.

Ряд содержит только четные степени $(x-1)$

$\Rightarrow$ для нахождения R применять готовые формулы нельзя.

Применим признак Даламбера для исследования ряда модулей. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{2(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} : \frac{|x-1|^{2n}}{n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{2(n+1)}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot|x-1|^{2n}} =$$

$$= \frac{|x-1|^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-1|^2}{2}.$$

Получаем:

а) ряд сходится, если $\dfrac{|x-1|^2}{2} < 1$

$$\Rightarrow \quad |x-1|^2 < 2,$$

$$\Rightarrow \quad |x-1| < \sqrt{2},$$

$$\Rightarrow \quad 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

б) ряд расходится, если $\quad \dfrac{|x-1|^2}{2} > 1$

(в силу нарушения необходимого условия сходимости);

в) информации о поведении ряда нет, если

$$\frac{|x-1|^2}{2} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

3) Рассмотрим ряд при $\quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 \pm \sqrt{2} - 1)^{2n}}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pm\sqrt{2})^{2n}}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

– сходится условно

Ответ: ряд сходится, если $\quad x \in [1-\sqrt{2};\, 1+\sqrt{2}].$

ПРИМЕР 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin x$.

РЕШЕНИЕ

1) Находим производные функции:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Вычисляем значения функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ \ldots\ .$$

В общем случае получаем:

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n)}(0) = 0 \ \ (n = 0,1,2,\ldots).$$

$\Rightarrow$ ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$ будет иметь вид:

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2) Найдем область сходимости полученного ряда.

Исследуем его ряд модулей с помощью признака Даламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2(n+1)+1}}{(2\cdot(n+1)+1)!}:\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot|x|^{2n+1}}=$$

$$=|x|^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1.$$

$\Rightarrow$ ряд Маклорена для $f(x) = \sin x$ сходится абсолютно $\forall x\in\mathbb{R}$.

3) Имеем: $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\leq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ по теореме 3, суммой полученного ряда будет именно функция $f(x) = \sin x$.

ПРИМЕР 4. Разложить $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ в ряд в ряд по степеням $x-2$.

РЕШЕНИЕ

1) Находим производные функции:

$$f'(x)=\frac{-4}{x^5},\qquad f''(x)=\frac{-4\cdot(-5)}{x^6},$$

$$f'''(x)=\frac{-4\cdot(-5)\cdot(-6)}{x^7}=\frac{(-1)^3\cdot 6!}{2\cdot 3\cdot x^7},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n+3)!}{2\cdot 3\cdot x^{n+4}}=\frac{(-1)^n(n+3)!}{6\cdot x^{n+4}}.$$

Вычисляем значения функции и ее производных при $x=2$:

$$f(2)=\frac{1}{2^4},\qquad f'(2)=-\frac{4}{2^5},\qquad f''(2)=\frac{4\cdot 5}{2^6},$$

$$f'''(2)=-\frac{6!}{6\cdot 2^7},\qquad f^{(4)}(2)=\frac{7!}{6\cdot 2^8},$$

В общем случае получаем: $f^{(n)}(2)=\dfrac{(-1)^n\cdot(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}}\quad (n=0,1,2,\dots).$

$\Rightarrow$ ряд Тейлора функции $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ в окрестности точки $x_0=2$ будет иметь вид:

$$\frac{1}{2^4}-\frac{4}{2^5}\cdot\frac{(x-2)}{1!}+\frac{4\cdot 5}{2^6}\cdot\frac{(x-2)^2}{2!}-\frac{6!}{6\cdot 2^7}\cdot\frac{(x-2)^3}{3!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}}\frac{(x-2)^n}{n!}.$$

2) Найдем область сходимости полученного ряда.

Имеем: $x_0=2$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}\cdot n!}:\frac{(-1)^{n+1}(n+4)!}{6\cdot 2^{n+5}\cdot(n+1)!}\right|=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}\cdot n!}\cdot\frac{6\cdot 2^{n+5}\cdot(n+1)!}{(n+4)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{(n+3)!}{(n+3)!\cdot(n+4)}\cdot\frac{n!\cdot(n+1)}{n!} =$$

$$= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+4} = 2.$$

Имеем: $x_0 - R = 2 - 2 = 0,\qquad x_0 + R = 2 + 2 = 4.$

$\Rightarrow$ ряд сходится абсолютно в интервале $(0;\, 4)$.

На границе интервала сходимости имеем ряды:

$$x = 0: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}}\frac{(0-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 2^4},$$

$$x = 4: \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}}\cdot\frac{(4-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 2^4}.$$

Ряды расходятся, т.к. для них не выполнено необходимое условие сходимости.

Доказательство того, что суммой ряда на (0;4) является именно $f(x) = x^{-4}$, приводить не будем, ввиду его сложности.

Таким образом,

$$\frac{1}{x^4} = \frac{1}{2^4} - \frac{4}{2^5}\cdot\frac{(x-2)}{1!} + \frac{4\cdot 5}{2^6}\cdot\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{6!}{6\cdot 2^7}\cdot\frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots +$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)!}{6\cdot 2^{n+4}}\frac{(x-2)^n}{n!}, \qquad 0 < x < 4.$$

Ряды Маклорена некоторых элементарных функций

$$1)\ \ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$2)\ \ \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x$$

$$3)\ \ \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x$$

$$4)\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$5)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$6)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

$$-1 < x \le 1$$

7) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$

$-1 \le x \le 1$

8) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots +$

$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1$

9) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1$

10) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$

ПРИМЕР 5. Разложить функцию в ряд по степеням $x - x_0$, пользуясь готовыми разложениями:

1) $y = \sin x^2$, $x_0 = 0$.

Используем формулу:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Имеем:

$$\sin x^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

2) $y = \sin^2 x,\ \ x_0 = 0.$

Имеем:

$$y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^4}{4!}x^4 + \frac{2^6}{6!}x^6 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

3) $y = \ln(2+x)$, $x_0 = 0$.

Используем формулу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

$$-1 < x \le 1.$$

Имеем: $y = \ln(2+x) = \ln 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$

$$\Rightarrow \quad \ln(2+x) = \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} + \ldots \right) =$$

$$= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n \cdot n} + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \cdot n}.$$

Разложение справедливо, если

$$-1 < \frac{x}{2} \le 1,$$

$$\Rightarrow \; -2 < x \le 2.$$

4) $y = \ln(2 + x)$, $x_0 = 1$.

Используем формулу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

$$-1 < x \le 1.$$

Имеем: $y = \ln(2 + [x-1] + 1) = \ln(3 + [x-1]) = \ln 3 \cdot \left(1 + \frac{x-1}{3}\right),$

$$\Rightarrow \quad y = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x-1}{3}\right).$$

$$y = \ln 3 + \left(\frac{x-1}{3} - \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)^n}{n} + \ldots\right) =$$

$$= \ln 3 + \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{3^2 \cdot 2} + \frac{(x-1)^3}{3^3 \cdot 3} - \frac{(x-1)^4}{3^4 \cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n} + \ldots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n}.$$

Разложение справедливо, если

$$-1 < \frac{x-1}{3} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad -3 < x - 1 \le 3.$$

$$\Rightarrow \quad -2 < x \le 4.$$

5) $y = x\cdot\sqrt{4+x}, \quad x_0 = 0.$

Используем формулу:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \qquad -1<x<1.$$

Имеем: $y = x\cdot\sqrt{4+x} = x\cdot\sqrt{4\cdot\left(1+\frac{x}{4}\right)} = 2x\cdot\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/2}.$

$$\Rightarrow \quad y = 2x\cdot\left(1+\frac{1/2}{1!}\cdot\frac{x}{4}+\frac{1/2\cdot(-1/2)}{2!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{3!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)\cdot(-5/2)}{4!}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$= 2x \cdot \left(1 + \frac{1}{1! \cdot 2 \cdot 4} x - \frac{1}{2! \cdot 2^2 \cdot 4^2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3 \cdot 4^3} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! \cdot 2^4 \cdot 4^4} x^4 + \ldots \right) =$$

$$= 2x + \frac{1}{1! \cdot 4} x^2 - \frac{1}{2! \cdot 2 \cdot 4^2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^2 \cdot 4^3} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! \cdot 2^3 \cdot 4^4} x^5 + \ldots =$$

$$= 2x + \frac{1}{1! \cdot 4} x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-5)}{(n-1)! \cdot 2^{n-2} \cdot 4^{n-1}} x^n .$$

Разложение справедливо, если

$$-1 < \frac{x}{4} < 1,$$

$$\Rightarrow \quad -4 < x < 4.$$

6) $y = \dfrac{x^{10}}{1-x}, \qquad x_0 = 0.$

Используем формулу:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Имеем:

$$y = \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \frac{1}{1-x} = x^{10} \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots\right) =$$

$$= x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + \ldots + x^{n+10} + \ldots = \sum_{n=10}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

7) $y=\dfrac{x^2+1}{x+2},\quad x_0=0.$

Используем формулу:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ -1<x<1.$$

Имеем:

$$y=\frac{x^2+1}{x+2}=x-2+\frac{5}{x+2}=x-2+\frac{5}{2\cdot\left(x/2+1\right)}=x-2+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x/2+1}.$$

$$\Rightarrow\quad y=x-2+\frac{5}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=x-2+\frac{5}{2}-\frac{5}{2^2}x+\frac{5}{2^3}x^2-\frac{5}{2^4}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{5}{2^{n+1}}x^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5}{2^3}x^2-\frac{5}{2^4}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{5}{2^{n+1}}x^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{2^{n+1}}x^n.$$

Разложение справедливо, если

$$-1<\frac{x}{2}<1,$$

$$\Rightarrow\ -2<x<2.$$

8) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1 & x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

Используем формулу:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Имеем: $$y = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Приложения степенных рядов

ПРИМЕР 6. Вычислить $\int_0^1 \cos x^2 dx$ с точностью ε = 0,00001.

РЕШЕНИЕ

Разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням x. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\Rightarrow \quad \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!},$$

Интегрируя этот ряд почленно в пределах от 0 до 1, находим:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} dx - \int_0^1 \frac{x^{12}}{6!} dx + \ldots + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5\cdot 2!}\Bigg|_0^1 + \frac{x^9}{9\cdot 4!}\Bigg|_0^1 - \frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\Bigg|_0^1 + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\Bigg|_0^1 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{13\cdot 6!} + \frac{1}{17\cdot 8!} - \frac{1}{21\cdot 10!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} + \ldots =$$

$$\approx 1 - 0{,}1 + 0{,}004630 - 0{,}000107 + 0{,}000001 - \ldots .$$

Ряд – знакочередующийся.

$\Rightarrow |\, S - S_n \,|$ меньше модуля первого из отброшенных членов.

$\Rightarrow$ заданная точность будет достигнута, если сложить четыре первых членов ряда ($|\, u_5 \,| \approx 0{,}000001 < \varepsilon$).

Таким образом, получаем:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 1 - 0{,}1 + 0{,}004630 - 0{,}000107 =$$

$$= 0{,}904523 \approx 0{,}90452.$$

ПРИМЕР 7. Вычислить $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}dx}{x^3}$ с точностью ε = 0,0001.

РЕШЕНИЕ

Разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням x.

Имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{-x}}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{1!\cdot x^2} + \frac{1}{2!\cdot x} - \frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-3}}{n!} + \ldots.$$

Интегрируя этот ряд почленно в пределах от 0,1 до 0,2, находим:

$$\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx = \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{x^3} - \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{2x} - \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{6} + \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{xdx}{24} - \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{x^2dx}{120} + \ldots =$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{0,1}^{0,2}+\frac{1}{x}\Bigg|_{0,1}^{0,2}+\frac{1}{2}\ln|x|\Bigg|_{0,1}^{0,2}-\frac{x}{6}\Bigg|_{0,1}^{0,2}+\frac{x^2}{2\cdot 24}\Bigg|_{0,1}^{0,2}-\frac{x^3}{3\cdot 120}\Bigg|_{0,1}^{0,2}+\ldots=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0,04}-\frac{1}{0,01}\right)+\left(\frac{1}{0,2}-\frac{1}{0,1}\right)+\frac{1}{2}(\ln 0,2-\ln 0,1)-$$

$$-\frac{0,2-0,1}{6}+\frac{0,04-0,01}{48}-\frac{0,008-0,001}{360}+\ldots\approx$$

$$\approx 37,5-5+0,34657-0,01666+0,00625-0,00002+\ldots.$$

Ряд – знакочередующийся.

$\Rightarrow |\, S-S_n \,|$ меньше модуля первого из отброшенных членов.

$\Rightarrow$ заданная точность будет достигнута, если сложить пять первых членов ряда ($|\, u_6 \,| \approx 0,00002 < \varepsilon$)

Таким образом, получаем:

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}dx}{x^3} \approx 37,5 - 5 + 0,34657 - 0,01666 + 0,00625 =$$

$$= 32,83053 \approx 32,8305.$$