

Вариант 1

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{6-6i}{-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-32}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$|z| + z = 2 + i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \{z: 0 < \arg(z-1-3i) \leq \pi, |z-1-3i| > 2\};$$

б) Запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x=1$, $x=2$ выше прямой $y=1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \frac{1}{i^{30}}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z \operatorname{Re} z^2$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = \ln(z-1)$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = 2(x^2 - y^2) - 3x, \quad f(1) = -i.$$

9. Вычислите $\int_l \operatorname{Im} z dz$, если l – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 2i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^3(z-2i)^2}$, если

$$а) C = \{z: |z|=1\}; \quad б) C = \{z: |z-2i|=1\}; \quad в) C = \{z: |z|=3\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1+e^z)$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1-e^{2zi}}{(z+\pi)^2}, \quad z_0 = -\pi; \quad б) f(z) = (z+1)^2 \cos \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -1;$$

$$в) f(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, \quad z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \left(\operatorname{ctgz} - \frac{1}{z} \right);$$

$$б) \operatorname{res}_{z=\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}}{\left(z - \frac{i\pi}{2} \right)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z+i) \exp \frac{1}{z} \right);$$

$$г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{3z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(1+in)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1+i)^n}$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

по степеням z . Укажите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)^2}; \quad б) \oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1) \cdot e^{\frac{1}{z}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\sin x}; \quad в) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt} dx}{(z^2+1)}, \quad t > 0.$$

Вариант 2

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = -6.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[4]{(-2 + 2i)^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z = \frac{4}{3}i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : \frac{\pi}{2} < \arg(z-i) \leq \pi, \quad |z-i| < 2 \right\};$$

$$b) D = \{ z : \operatorname{Re}(z+1) > 0, \quad 0 < \operatorname{Im}(z+1) < 3 \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \operatorname{ch}(1+i); \quad b) \operatorname{Arcsin}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если

$$w = (z+i) \operatorname{ch} z.$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 2i$ при отображении

$$w = e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = x^2 - y^2, \quad f(-i) = -1.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz$, где Γ – ломаная с вершинами в точках 0; 1;

1 + i.

10. Вычислите $\int_C \frac{z dz}{z^2 - 1}$, если

$$a) C = \left\{ z : |z-1| = \frac{1}{2} \right\}; \quad b) C = \{ z : |z+2| = 2 \};$$

$$в) C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите по формулам Тейлора три первых члена разложения функции $f(z) = e^z \sin z$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{(z+i)}}{z+i}, \quad z_0 = -i; \quad b) f(z) = \frac{\cos z - 1}{\sin^2 z - z^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$в) f(z) = z \cos \frac{1}{z-2i}, \quad z_0 = 2i.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{z - \sin z}{z^3};$$

$$b) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{(z+1)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{1}{z};$$

$$з) \operatorname{res}_{z=i} \sin \frac{z}{z-i}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{z} \right)^n.$$

15. Разложите функцию в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

в кольце $1 < |z| < 2$.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}, \text{ приняв центр ряда в точке } z_0 = 2.$$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z-6|=5} \frac{z^2}{\sin z} dz;$$

$$b) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} (z+2)e^{\frac{2}{z}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5} \sin x + 3};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}.$$

Вариант 3

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \sqrt{3} + 3i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-2+2i}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}, \quad z \cdot \bar{z} < 4 \right\};$$

$$b) D = \{ z : \operatorname{Re}(z-2i) > 1, \quad 0 < \operatorname{Im}(z-2i) < \pi \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \sin \frac{2}{1-i};$$

$$b) \operatorname{Ln}(2i-2).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = z^2 + 2z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = 0$.

9. Вычислите $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где C – ломаная с вершинами в точках $0; 1; 1+2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z-2)}$, если

$$a) C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\};$$

$$b) C = \left\{ z : |z-2| = \frac{1}{2} \right\};$$

$$в) C = \{ z : |z| = 3 \}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определить характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{2(z+2)}}{(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$b) f(z) = \frac{\cos(z-1) - 1}{\sin^2(z-1) - (z-1)^2}, \quad z_0 = 1;$$

$$в) f(z) = z \cos \frac{1}{z+3}, \quad z_0 = -3.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} z;$$

$$b) \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{2}{z};$$

$$z) \operatorname{res}_{z=1} z^2 \cdot e^{1-z}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ по степеням $(z-1)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -i$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z-3|=3} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z^2-4)} dz;$$

$$b) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} z \cos^2 \frac{2}{z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2};$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{5} \sin x + 9};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

Вариант 4

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{i}\right)^2}.$$

3. Решите уравнение

$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}, |z| < 3 \right\},$$

$$b) D = \{ z : \operatorname{Im}(z+i) \geq 2, 0 < \operatorname{Re}(z+i) < \pi \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi}{4}i\right);$$

$$b) \operatorname{Arccos}(-i).$$

6. Выделите $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если $w = e^{iz}$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -i$ при отображении $w = -iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$.

9. Вычислите $\int_l e^{\bar{z}} dz$, где l – ломаная с вершинами в точках $0, i, 1+i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\cos z dz}{z(z - \frac{\pi}{2})^3}$, если

$$a) C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\};$$

$$b) C = \{ z : |z-2| = 1 \};$$

$$в) C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = e^z$ в ряд Тейлора по степеням $\left(z - \frac{1}{2}\right)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{z-1}}{z-1}, z_0 = 1; \quad б) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}, z_0 = 0;$$

$$в) f(z) = \sin \frac{z}{z-2}, z_0 = 2.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z} \right);$$

$$б) \operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=1} z \exp \frac{2}{z-1};$$

$$г) \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2)^2 \sin \frac{1}{z}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n.$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z}.$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = i$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=4} \operatorname{ctg} z dz;$$

$$б) \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} z^2 \cos \frac{1}{z-1} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7} \sin x + 4};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x dx}{x^2+1}.$$

Вариант 5

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt{(1-i\sqrt{3})^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\bar{z} = z^3.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : \frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \leq \frac{2}{3}\pi, \quad 1 \leq |z-i| < 2 \right\};$$

$$b) D = \{z : \operatorname{Re}(z+2i) > 0, \quad \operatorname{Im}(z+2i) < 0\}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \ln\left(\frac{-1}{1+i}\right);$$

$$b) \operatorname{Arccos}(-2i+1).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1-z}{1+z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad f(1+i) = -1+2i.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где Γ – отрезок, соединяющий

точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\sin^2 z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$, если

$$a) C = \{z : |z-2|=1\};$$

$$b) C = \{z : |z|=1\};$$

$$в) C = \{z : |z|=2\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \cos z$ по степеням $\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - \cos(z+2i)}{(z+2i)^4}, \quad z_0 = -2i;$$

$$б) f(z) = \sin \frac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3;$$

$$в) f(z) = \frac{e^{z+i} - 1}{z+i}, \quad z_0 = -i.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=1} \frac{z-1 - \sin(z-1)}{(z-1)^3};$$

$$б) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^2(z+1)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z-4)\cos \frac{3}{z};$$

$$г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\cos \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{n+i} \right)^n.$$

15. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ в проколото-той окрестности точки $z_0 = 3$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = -1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=1} \frac{z}{16z^4+1} dz;$$

$$б) \oint_{|z|=2} \frac{1}{\sin^2 z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$$

$$б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x + 5};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Вариант 6

1. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2}.$$

2. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

3. Решите уравнение

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{2}, \quad |z+1-i| < \sqrt{2} \right\};$$

$$b) D = \{z : \operatorname{Re}(z) > 1, \quad 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right); \quad b) \operatorname{Ln} \frac{1}{2i-2}.$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1}{i(z-1)}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2e^x \sin y$, $f(0) = 2$.

9. Вычислите $\int_l (z - |z|) dz$, где l – граница области

$$D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{\cos z}{z^2 + 4} dz$, если

$$a) C = \{z : |z-2i| = 2\}; \quad b) C = \{z : |z+2i| = 2\};$$

$$в) C = \{z : |z| = 3\}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции

$f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1-e^{(z-3)}}{(z-3)^3}, \quad z_0 = 3; \quad б) f(z) = z \cos \frac{1}{z+2i}, \quad z_0 = -2i;$$

$$в) f(z) = \frac{\cos(z+1)-1}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\cos z}{z - \frac{3\pi}{2}} \right); \quad б) \operatorname{res}_{z=-1} \left(e^{\frac{1}{z}} + \frac{z^5}{(z+1)^3} \right);$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z-1) \cos \frac{2}{z} \right); \quad г) \operatorname{res}_{z=2} \left(\sin \left(\frac{z}{z-2} \right) \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$ функцию $f(z) = \frac{1}{z-5}$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z-2|=2} \frac{\sin^2 z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz; \quad б) \oint_{|z|=1} \left(z \cos \frac{1}{z} - e^{\frac{2}{z}} \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{15 \sin x - 4}}; \quad в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

Вариант 7

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^3}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$2\operatorname{sh}z - i = 0.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z + 3i) \leq \pi, \quad |z + 3i| < 3 \right\};$$

$$b) D = \{ z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 3x \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{1+i}\right);$$

$$b) \operatorname{Arccos}(-2i).$$

6. Найдите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = i \cos z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = -2i \text{ при отображении } w = \frac{1}{z}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 2(\operatorname{sh}x \operatorname{sin}y + xy), \quad f(0) = 3.$$

9. Вычислите $\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, если $L = \{ z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0, \sqrt{1} = 1 \}$.

10. Вычислите $\int_C \frac{ze^z dz}{z^2 + 1}$, если

$$a) C = \{ z : |z - i| = 1 \};$$

$$b) C = \{ z : |z + i| = 1 \};$$

$$в) C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1 + \cos z)$ в ряд Тейлора по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{(z-3)}}{(z-3)^5}, \quad z_0 = 3;$$

$$b) f(z) = \frac{z + 2 - \sin(z+2)}{1 - \cos(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$в) f(z) = (z-1)\cos\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{z - \frac{z^3}{6} - \sin z}{z^5}; \quad б) \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{z-i}}{(z-i)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z-2)\exp\frac{1}{z}; \quad г) \operatorname{res}_{z=1} \cos\frac{z}{z-1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+2}\right)^n.$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z+2}\right)$$

по степеням $(z+2)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=4} \frac{1}{\sin z} dz; \quad б) \oint_{|z|=1} z^n \exp\left(\frac{2}{z}\right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x - 2}; \quad в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

Вариант 8

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}-i}}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : \frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{3\pi}{4}, \quad 1 < |z-i| \leq 3 \right\};$$

$$b) D = \{ z : 4 < \operatorname{Re}(z+i) \leq 6, \quad \operatorname{Im}(z+i) < 2x+1 \}.$$

5. Представьте в алгебраической форме число:

$$a) \operatorname{Arccos} i;$$

$$b) \operatorname{Ln} \left(\frac{1+i}{2} \right).$$

6. Найдите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ для функции $w = \sin z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = 1+i \text{ при отображении } w = \frac{1}{z^2}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 3x^2y - y^3 + y, f(0) = 1.$$

9. Вычислите $\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $l = \{ z : |z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0, \sqrt{1} = -1 \}$.

10. Вычислите $\oint_C \frac{z^2 e^z dz}{(z-1)^2(z+1)}$, где

$$a) C : |z-1| = \frac{1}{2}; \quad b) C : |z+1| = \frac{1}{2}; \quad c) C : |z| = 2.$$

11. Найдите по формулам Тейлора первые три члена разложения

функции $f(z) = \cos z$ по степеням $z + \frac{\pi}{4}$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = ze^{\frac{1}{z+i}}, \quad z_0 = -i; \quad б) f(z) = \frac{1 - \frac{(z-i)^2}{2} - \cos(z-i)}{(z-i)^4}, \quad z_0 = i;$$

$$в) f(z) = \frac{z}{(z+2)^3}, \quad z_0 = -2.$$

13. Найдите вычеты функций в указанных особых точках:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}; \quad б) \operatorname{res}_{z=2} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{z-2} \exp \frac{z}{z-2}; \quad г) \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{2z}{z^2+1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

15. Разложите в окрестности $z = \infty$ функцию $f(z) = \frac{1}{(z+3)^2}$.

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите функцию $f(z) = \exp \frac{z}{1-z}$ по степеням $(z-1)$.

Найдите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах

$$a) \int_{|z-\pi i|=4} \frac{e^z}{e^z+1} dz;$$

б)

$$\int_{|z|=1} \left(iz \cos \frac{1}{z} - e^{\frac{i}{z}} \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{6} \sin x - 5}; \quad в) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt} dz}{z^2+1}, \quad t > 0.$$

Вариант 9

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = -2\sqrt{3} + 2i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[4]{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{i}\right)^3}$$

3. Решите уравнение

$$\sin z = \frac{5}{3}.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$а) D = \{z: \operatorname{Re}(iz) > 0, |z| < 1\};$$

$$б) D = \{z: \operatorname{Im}(z-1) \geq 3, -3 < \operatorname{Re}(z-1) < 2\}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \operatorname{Arcsin}(i-1); б) \operatorname{Ln}(i+1)^i.$$

6. Выделите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, если $w = \frac{z-2}{z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -2i$ при отображении $w = \frac{1}{z^2}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = x^3 - 3xy^2 + 2x, \quad f(0) = 0.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $\Gamma = \{z: |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0, \sqrt{1}=1\}$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{ch} z^2 dz}{(i-z)z^2}$, где

$$а) C = \left\{z: |z| = \frac{1}{2}\right\};$$

$$б) C = \left\{z: |z-i| = \frac{1}{2}\right\};$$

$$в) C = \left\{z: |z| = \frac{3}{2}\right\}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = \sin(2z+1)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1-e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}, \quad z_0 = 0; \quad б) f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} \right); \quad б) \operatorname{res}_{z=1} \left(z \sin \frac{2}{z-1} \right);$$

$$в) \operatorname{res}_{z=2i} \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}; \quad г) \operatorname{res}_{z=\infty} \left(2z \cos \frac{1}{z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}. \text{ Укажите область сходимости ряда.}$$

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ в проколотой

окрестности точки $z_0 = i$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}, \text{ приняв центр ряда в точке } z_0 = 0.$$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1};$$

$$б) \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} z \sin \frac{4}{z-1} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 + 1};$$

$$б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 - 4\sqrt{2} \sin x};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Вариант 10

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1-i}{2}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{\sqrt{3}-i}}.$$

3. Решите уравнение

$$z^2 + |z| = 0.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{4} < \arg(z-2i+1) \leq \frac{3\pi}{4}, \quad |z-2i+1| < 2 \right\};$$

б) Запишите неравенствами область D : полукруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = 1+i$, расположенный ниже прямой $y = 1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \operatorname{Ln} \frac{1}{\sqrt{3}+i}; \quad \text{б) } i^i.$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1-z}{1+z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1$ при отображении $w = z^3 - 6z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = \cos x \cdot \operatorname{sh} y + 2y + 1, \quad f(0) = i$.

9. Вычислите $\int_l z^2 \operatorname{Im} z \, dz$, где l – ломаная с вершинами в точках

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 1+i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{sh} z \, dz}{(z^2+1)^2}$, если

$$\text{а) } C = \{z: |z-2i|=2\}; \text{б) } C = \{z: |z+2i|=2\}; \text{в) } C = \{z: |z|=2\}.$$

11. Найдите по формулам Тейлора три первых члена разложения функции $f(z) = \sin(2z+1)$ по степеням $\left(z + \frac{1}{2}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{z^5}{(z+1)^3}, \quad z_0 = -1; \quad \text{б) } f(z) = \frac{\cos z}{z - \frac{3\pi}{2}}, \quad z_0 = \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{в) } f(z) = \cos\left(\frac{z}{z+4}\right), \quad z_0 = -4.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z - 1}{z \sin z};$$

$$\text{б) } \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z-4) \cos \frac{1}{z^2};$$

$$\text{г) } \operatorname{res}_{z=-2i} \sin \frac{z}{z+2i}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3i}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z+3i}\right)^n.$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите функцию $f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$ по степеням z . Найдите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = i$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{а) } \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1} \, dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=2} z \exp\left(\frac{2}{z+1}\right) \, dz.$$

19. Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2+4)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7} \sin x}; \quad \text{в) } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\operatorname{ch} zt \, dz}{(z+1)(z+2)} \quad t > 0.$$

Вариант 11

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -8 + \frac{8}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[5]{(-\sqrt{3} + i)^4}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos z = \operatorname{ch} z.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z: 0 < \arg(z-1-i) \leq \frac{\pi}{2}, |z-1-i| < \sqrt{5} \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в начале координат, расположенный выше оси Ox .

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $(-2i)^i$;

б) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}i + 1)$.

6. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = 1 - \frac{i}{2} \text{ при отображении } w = \ln(2z - i).$$

7. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = |z| + iz$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 1$.

9. Вычислите $\int_l z \operatorname{Re} z^2 dz$, где l — полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

10. Вычислите $\int_C \frac{e^{z\pi} dz}{z^2(z^2 + 1)}$, если

а) $C: |z| = \frac{1}{2}$; б) $C: |z - i| = \frac{1}{2}$; в) $C: |z| = \frac{3}{2}$.

11. Найдите три члена разложения функции $f(z) = e^{\sin z}$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определить характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{(z-i)}}{(z-i)^4}$, $z_0 = i$; б) $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$;

в) $f(z) = \frac{\cos(z+1) - 1}{2(z+1)^2}$, $z_0 = -1$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{5z^2}{1 - \cos z}$;

б) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z \pi}{(z-1)^3}$;

в) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{1}{z}$;

г) $\operatorname{res}_{z=0} z^n e^{\frac{1}{z}}$.

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1-i}{2i} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-4i}{z-1-i} \right)^n.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = -1$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z|=1} \operatorname{tg} z \pi dz$;

б) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2) dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\sqrt{2} \sin x}$; в) $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{2z} dz}{(z^2 - 1)^2}$.

Вариант 12

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{2 + 2i}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{6} < \arg(z - 3i) \leq \pi, \quad |z - 3i| < 2 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в начале координат, расположенный слева от оси Oy .

5. Найдите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z^2 \operatorname{Im} z$.

6. Запишите в алгебраической форме:

а) $\sqrt[4]{i}$;

б) $\operatorname{Ln}(-1 + i)$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = 2i \text{ при отображении } w = \frac{z + 2}{z - i}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = e^{-2x} \cos 2y, \quad f(i\pi) = 1.$$

9. Вычислите $\int_l z \bar{z}^2 dz$, если l — отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{z \operatorname{sh} z dz}{4z^2 + \pi^2}$, если

а) $C = \{z : |z - i| = 1\}$; б) $C = \{z : |z + i| = 1\}$; в) $C = \{z : |z| = 4\}$.

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \sin(3z - 1)$ по степеням $(z + 1)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{(z+4)}}{(z+4)^6}$, $z_0 = -4$; б) $f(z) = (z-1) \cos \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$;

в) $f(z) = \frac{z^2 - \sin z^2}{z^6}$, $z_0 = 0$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}$;

б) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos(z-1)}{z^3}$;

в) $\operatorname{res}_{z=0} (z-1)^2 e^{\frac{1}{z}}$;

г) $\operatorname{res}_{z=\infty} \sin\left(\frac{2}{z-1}\right)$.

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^i}{z+1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in + \frac{1}{2}}}.$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \cos \frac{1}{z-3}$$

по степеням $(z - 3)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$;

б) $\oint_{|z|=\frac{3}{4}} \frac{dz}{(z^2 + \frac{1}{2})^2 (z-i)}$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 2\sqrt{3} \sin x}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Вариант 13

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -1 + i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[6]{\frac{-64}{i}}.$$

3. Представьте в алгебраической форме числа:

$$a) (1-i)^{2i}; b) \operatorname{Ln}(-2i).$$

4. a) Постройте на комплексной плоскости множество точек

$$D = \left\{ z : \frac{-\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}, 1 < |z-i| < 2 \right\};$$

b) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = -1$, расположенный выше оси Ox .

5. Найдите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ для функции $w = z\bar{z}^2$.

6. Найдите все решения уравнения

$$\cos z = i \sin z + i.$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке

$$z_0 = \frac{i\pi}{2} \text{ при отображении } w = \operatorname{ch} z.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = e^y \cos x, f(0) = i.$$

9. Вычислите $\int_l z^2 \operatorname{Im} z dz$, где l – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 0, z_2 = 1 - 2i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z(z+i)(z-2i)}$, где

$$a) C: |z| = \frac{1}{2}; b) C: |z+i| = \frac{1}{2}; \quad c) C: |z| = 3.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{sh}(1-z)$ по степеням $\left(z - 1 - \frac{i\pi}{2}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = (z-i)e^{\frac{1}{z-i}}, z_0 = i; \quad b) f(z) = \frac{\sin(z-i)}{(z-i)^5}, z_0 = i;$$

$$в) f(z) = \frac{1-e^{z+2}}{(z+2)}, z_0 = -2.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin(z-1)}{z-1};$$

$$б) \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=1} \left(z \cos \frac{2}{z-1} \right);$$

$$г) \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{2z+1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z+i}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+i)^n}.$$

15. Разложите функцию $f(z) = e^z \cos z$ по степеням z . Найдите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{1+3z}$$

в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1};$$

$$б) \int_{|z|=\frac{1}{2}} (z-1)^2 \cos \frac{1}{z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$$

$$б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sqrt{5} \sin x};$$

$$в) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zt} dz}{(z^2-1)^2}, t < 0.$$

Вариант 14

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt{(-1+i\sqrt{3})^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z + \cos z = 1.$$

4. Представьте в алгебраической форме

а) $\operatorname{Arctg} 2i$;

б) $i^{-\frac{i}{\pi}}$.

5. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек

$$D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg(z+1) \leq \frac{5\pi}{4}, |z+1| > 3 \right\};$$

б) запишите неравенствами область:

полукруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = -1$, расположенный левее прямой $x = -1$.

6. Выделите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, если $w = e^{\bar{z}}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = e^z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = e^x \sin y + 2y, f(0) = 2.$$

9. Вычислите $\int_l \bar{z}^2 dz$, где l – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^2(z-i)(z+2i)}$, где

а) $C: |z| = \frac{1}{2}$; б) $C: |z-i| = \frac{1}{2}$; в) $C: |z| = 3$.

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \cos(2z+1)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций

а) $f(z) = \sin \frac{z}{z-2}$, $z_0 = 2$; б) $f(z) = \frac{1 - \cos(z+i)}{(z+i)^2}$, $z_0 = -i$;

в) $f(z) = \frac{z}{z^5 - 3z^4}$, $z_0 = \infty$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1-e^z}{z^2-4z}$; б) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\cos z \pi}{(z-1)^3}$;

в) $\operatorname{res}_{z=0} (z+1)e^{\frac{2}{z}}$; г) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z}$.

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (2^{n^3} + 1)^{-1} (z-a)^{2n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$$

в окрестности точки $z = 0$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} z \pi dz$; б) $\oint_{|z-3i|=4} \frac{dz}{e^z + 1}$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 \sin x + 5}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2 + 9}$.

Вариант 15

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{1}{1+i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{2-2i}}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z - \cos z = 1.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z: \pi < \arg(z+3) \leq \frac{3}{2}\pi, \quad 1 \leq |z+3| \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $y = 1$ и $y = 3$ правее оси Oy .

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{2}\right); \quad б) i^{2i}.$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = (z-1)^2 \operatorname{Im} z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = 2z^2 + 3e^{-iz}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 3 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3i.$$

9. Вычислите $\int_l z \operatorname{Re} z^2 dz$, где l – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{(e^z - 1) dz}{z^3(z-1)}$, если

$$a) C = \left\{ z: |z| = \frac{1}{2} \right\}; \quad б) C = \left\{ z: |z-1| = \frac{1}{2} \right\}; \quad в) C = \left\{ z: |z| = \frac{3}{2} \right\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{(z-i)}}{(z-i)^6}, \quad z_0 = i; \quad б) f(z) = \frac{\cos(z+2i)-1}{(z+2i)^2}, \quad z_0 = -2i;$$

$$в) f(z) = \frac{z-\pi}{(e^{iz}+1)^3}, \quad z_0 = \pi.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{z+1 - \sin(z+1)}{(z+1)^5};$$

$$б) \operatorname{res}_{z=-\pi} \frac{e^{2iz}-1}{z+\pi};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^3+1}{z} \exp\left(\frac{1}{z}\right);$$

$$г) \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\sin^2 z}{z^3}.$$

14. Разложите функцию $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ в окрестности точки $z = \infty$

в ряд Лорана. Укажите область сходимости ряда.

15. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{5}\right)^n.$$

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z+\pi)^3} dz;$$

$$б) \oint_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) dx}{(x^2+4)(x^2+9)};$$

$$б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \sqrt{15} \cos x};$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2+4}.$$

Вариант 16

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме

число
$$z = \frac{2}{1-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[5]{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. Решите уравнение $\sin z - \cos z = 2.$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z-1+i) \leq 0, \quad |z-1+i| > 4 \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 0, x = 2$ ниже оси Ox .

5. Запишите в алгебраической форме:

$$a) \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^{20}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w, \operatorname{Re} w$, если $w = e^{\bar{z}^2}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ при отображении $w = \operatorname{ch} z - z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, f(1) = i$.

9. Вычислите $\int_l \bar{z} dz$, где l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 2, z_2 = i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(z-i\pi)^2}$, где

$$a) C = \{z : |z|=1\}; \quad б) C = \{z : |z-3i|=1\}; \quad в) C = \{z : |z|=4\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \operatorname{ch}(1-z)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(z-1-\frac{i\pi}{2}\right)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = \frac{1 - e^{(z-3)}}{(z-3)^3}, \quad z_0 = 3; \quad б) f(z) = z \cos \frac{1}{z+2i}, \quad z_0 = -2i;$$

$$в) f(z) = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{e^{iz} - i}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

13. Найдите вычеты:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z - z}{z^3}; \quad б) \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^5};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=2} \left(z^3 \cos \frac{1}{z-2} \right); \quad г) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z-1)e^{\frac{1}{z}} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 3$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}; \quad б) \oint_{|z+3|=1} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{z+3}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6+\sqrt{35} \sin x}; \quad в) \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0.$$

Вариант 17

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число $z = \frac{6-6i}{-i}$.

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа $\sqrt[5]{-32}$.

3. Найдите все решения уравнения

$$|z| + z = 2 + i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек: $D = \{z : 0 < \arg(z-1-3i) \leq \pi, |z-1-3i| > 2\}$;

б) Запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 1, x = 2$ выше прямой $y = 1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \frac{1}{i^{30}}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z \operatorname{Re} z^2$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = \ln(z-1)$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = 2(x^2 - y^2) - 3x, f(1) = -i$.

9. Вычислите $\int_l \operatorname{Im} z dz$, если l – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 2, z_2 = 2i.$$

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^3(z-2i)^2}$, если

$$а) C = \{z : |z|=1\}; \quad б) C = \{z : |z-2i|=1\}; \\ в) C = \{z : |z|=3\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1+e^z)$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1-e^{2zi}}{(z+\pi)^2}, z_0 = -\pi; \quad б) f(z) = (z+1)^2 \cos \frac{1}{z+1},$$

$$z_0 = -1; \quad в) f(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \left(\operatorname{ctgz} - \frac{1}{z} \right); \quad б) \operatorname{res}_{z=\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}}{\left(z - \frac{i\pi}{2} \right)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z+i) \exp \frac{1}{z} \right); \quad г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{3z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(1+in)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1+i)^n}$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

по степеням z . Укажите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2-z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)^2}; \quad б) \oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\sin x}; \quad в) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt} dx}{(z^2+1)}, t > 0.$$