«Линейные уравнения и уравнения Бернулли»

1) $y' - yctgx = \dfrac{1}{\sin x}$. **Ответ**: $y = \sin x(C - \operatorname{ctg} x)$.

2) $\cos x y' - y\sin x = xe^{-x^2}$. **Ответ**: $y = \dfrac{1}{\cos x}\left(C - \dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)$.

3) $xy' + y = 2y^2 \ln x$. **Ответ**: $y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) + Cx}$.

4) $x^2(x-1)y' - y^2 - xy(x-2) = 0$. **Ответ**: $y = \dfrac{x^2}{1 + C(x-1)}$.

5) $3e^x tgydx + (1 - e^x)\cos^{-2} ydy = 0$.
Ответ: $\operatorname{tg} y = C(e^x - 1)^3 \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{arctg} C(e^x - 1)^3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall C$.

6) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$. **Ответ**: $x = y\ln y + \dfrac{C}{y}$.

7) $y'x = y(\ln y - \ln x + 1)$. **Ответ**: $y = xe^{Cx}$, $\forall C$.

8) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$. **Ответ**: $x = \sqrt[3]{Ce^y - y - 2}$.

9) Кривая $y = y(x)$ проходит через начало координат. Если в точке M кривой провести нормаль, то середина отрезка MK (где K – точка пересечения нормали и оси абсцисс) лежит на параболе $y^2 = ax$. Найти уравнение этой кривой.
Ответ: $y' - \dfrac{y}{2a} = -\dfrac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{ax + a^2 + Ce^{x/a}}$,

$$y = \pm 2\sqrt{ax + a^2 - a^2 e^{x/a}}.$$