«Однородные уравнения и приводящиеся к ним»

1) $y' + \dfrac{x+y}{x+2y} = 0$.

Ответ: $1 + 2\dfrac{y}{x} + 2\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{C}{x^2}$, $C \neq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$, $C \neq 0$.

2) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Ответ: $e^{-y/x} = \ln|x| + C$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y = -x \cdot \ln(C + \ln|x|)$.

3) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$. **Ответ**: $y = \pm\sqrt{\dfrac{C}{x^2-1} - 1}$

4) $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$.

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| + C$,

$\Rightarrow$ $y = x(0{,}5 \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| + C)^2$, $x = 0$, $y = 0$.

5) $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$.

Ответ: $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y = \pm\sqrt{(\ln|x| + C)^2 - 1}$, $x = 0$.

6) $xy'(\ln y - \ln x + 4) = y\left(\ln\dfrac{y}{x} + 5\right)$.

Ответ: $\left[\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + 4\right]^2 = C + 2\ln|x|$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y = x \cdot e^{\pm\sqrt{C + \ln(x^2)} - 4}$.

7) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

Ответ: $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

8) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

Ответ: $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$, $y = 2 - x$.

9) Найти кривую, для которой произведение абсциссы любой точки на отрезок, отсекаемый нормалью в этой точке на оси Ox, равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат.

Ответ: $1 + \dfrac{y^2}{x^2} = Cx^2$, $C > 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y = \pm\sqrt{Cx^4 - x^2}$, $C > 0$.