«Интегралы, зависящие от параметра»

Вычислить с помощью Эйлеровых интегралов:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$, **Ответ:** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, **Ответ:** $\frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

Определить область существования и выразить через Эйлеровы интегралы:

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n>0)$ **Ответ:** $n>0$, $\frac{1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$ **Ответ:** $n \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$,

$$\frac{1}{m} \mathrm{B}\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right).$$

5) Используя равенство $\int\limits_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln|1+ab|$, найти путем дифференцирования по параметру, интеграл $\int\limits_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2}$.

Ответ: $\int\limits_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln|1+ab| - \frac{b}{a(1+ab)}$.

6) Найти с помощью дифференцирования по параметру интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx \quad (a>-1).$$

Ответ: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx = \ln|a+1|, \quad (a>-1)$.