Глава 4

Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Цель работы — изучение и применение численных методов для приближенного решения краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Продолжительность работы — 2 часа.

4.1. Постановка задачи

Требуется найти функцию $u(x)$, которая является решением следующей *краевой* задачи

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \tag{4.1.1}$$

$$u(a) = A, u(b) = B. \tag{4.1.2}$$

Задачу (4.1.1), (4.1.2) называют краевой, поскольку дополнительные условия (4.1.2) задаются на концах отрезка $[a, b]$.

4.2. Численные методы решения краевой задачи

4.2.1. Разностная аппроксимация производных

Введем на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку ω_h (3.2.1). Записывая уравнение (4.1.1) во внутренних узлах сетки ω_h, получим $(n-1)$-но уравнение для определения $3(n-1)$ неизвестных u_i, u'_i и u''_i:

$$u''_i + p_i u'_i + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, ..., (n-1), \tag{4.2.1}$$

где $u_i = u(x_i)$, $u'_i = u'(x_i)$, $u''_i = u''(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно u_i, необходимо первые и вторые производные функции $u(x)$ в узловых точках выразить через значения $u(x)$ в этих точках. Будем предполагать, что функция $u(x)$ имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Выразим значения u_{i+1} и u_{i-1} по формуле Тейлора, беря точку x_i в качестве точки разложения:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4), \\ u_{i-1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Отсюда, учитывая свойства величины $O(h^k)$ (см. гл. 1), можно получить следующие выражения для точного значения первой производной функции $u(x)$ в точке x_i:

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

а также выражение для точного значения второй производной функции $u(x)$ в той же точке x_i:

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2). \tag{4.2.4}$$

Отношения

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

в (4.2.3) называются *правой разностной производной*, *левой разностной производной* и *центральной разностной производной*, соответственно. Отношение

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

в (4.2.4) называется *второй разностной производной.*

Из (4.2.3) следует, что левая и правая разностные производные аппроксимируют производную $u'(x)$ с первым порядком точности относительно шага h, а центральная разностная производная — со вторым порядком точности относительно h. Из (4.2.4) следует, что вторая разностная производная аппроксимируют производную $u''(x)$ со вторым порядком точности относительно h.

4.2.2. Решение задачи методом прогонки

Пусть, как и ранее, y_i — приближенное значение, соответствующее точному значению u_i функции $u(x)$ в точке x_i. Заменим u_i'' и u_i' в (4.2.1) второй разностной производной и первой центральной разностной производной, соответственно, подставляя в них вместо u_i величины y_i. В результате вместо дифференциальной задачи (4.1.1), (4.1.2) получим следующую *разностную задачу*:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, ..., (n-1), \tag{4.2.5}$$

$$y_0 = A, y_n = B. \tag{4.2.6}$$

Подставляя краевые условия (4.2.6) в (4.2.5), получим относительно значений y_i, $i = 1, 2, ..., (n-1)$ систему линейных алгебраических уравнений $(n-1)$-ого порядка с трехдиагональной матрицей

$$
\begin{aligned}
&(h^2 q_1 - 2) y_1 + \left(1 + \frac{h}{2} p_1\right) y_2 = h^2 f_1 - A \cdot \left(1 - \frac{h}{2} p_1\right), \\
&\left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} + (h^2 q_i - 2) y_i + \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} = h^2 f_i, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 2, \ldots, (n-2); \\
&\left(1 - \frac{h}{2} p_{n-1}\right) y_{n-2} + (h^2 q_{n-1} - 2) y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - B \cdot \left(1 + \frac{h}{2} p_{n-1}\right).
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

Система (4.2.7) решается методом прогонки [1].

4.2.3. Решение задачи методом стрельбы

Идея метода. Как известно из курса дифференциальных уравнений общее решение (4.1.1) записывается в виде

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \tag{4.2.8}$$

где $u_0(x)$ — частное решение (4.1.1), а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые частные решения, соответствующего (4.1.1) однородного уравнения

$$u'' + p(x) u' + q(x) u = 0. \tag{4.2.9}$$

Краевые условия (4.1.2), используя (4.2.8), можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
u_0(a) + c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) = A, \\
u_0(b) + c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) = B.
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

Пусть $u_0(x)$ — такое частное решение (4.1.1), что $u_0(a) = A$, а частные решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (4.2.9) пусть удовлетворяют условиям $u_1(a) = 0$ и $u_2(a) \neq 0$, соответственно. Тогда из первого уравнения (4.2.10) следует равенство

$$A + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot u_2(a) = A,$$

т.е. $c_2 = 0$, а выражение (4.2.8) приобретает вид

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x). \qquad (4.2.11)$$

Константу c_1 находим из второго краевого условия (4.2.10): $u(b) = u_0(b) + c_1 u_1(b) = B$. Следовательно $c_1 = (B - u_0(b))/u_1(b)$. Будем считать, что $u_1(b) \neq 0$. Описанный способ решения задачи называют *методом стрельбы* или *методом пристрелки* [3].

Реализация метода. Итак, в соответствии (4.2.11), для приближенного решения $y(x)$ в узлах равномерной сетки ω_h можем записать

$$y_i = y_{0,i} + c_1 y_{1,i}, \ \ i = 0, 1, ..., n. \qquad (4.2.12)$$

Будем искать такие численные решения $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$, для которых в 0-ом и 1-ом узлах сетки ω_h выполняются следующие условия:

$$y_{0,0} = A, \ \ y_{0,1} = D_0, \qquad (4.2.13)$$

$$y_{1,0} = 0, \ \ y_{1,1} = D_1 \neq 0, \qquad (4.2.14)$$

где D_0 и D_1 — константы. Формально алгоритм применим при произвольных значениях D_0 и D_1 ($D_1 \neq 0$), однако с целью уменьшения влияния вычислительной погрешности рекомендуется брать $D_0 = A + O(h)$ и $D_1 = O(h)$.

Записываем для $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$ разностные уравнения, соответствующие неоднородному (4.1.1) и однородному (4.2.9) уравнениям

$$\frac{y_{0,i-1} - 2y_{0,i} + y_{0,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{0,i+1} - y_{0,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{0,i} = f_i,$$

$$\frac{y_{1,i-1} - 2y_{1,i} + y_{1,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{1,i+1} - y_{1,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{1,i} = 0,$$

$$i = 1, ..., (n-1).$$

Отсюда находим выражения для $y_{0,i+1}$ и $y_{1,i+1}$:

$$
\begin{aligned}
y_{0,i+1} &= \frac{h^2 f_i - \left(1 - \dfrac{h}{2}\,p_i\right)\cdot y_{0,i-1} - (h^2 q_i - 2)\cdot y_{0,i}}{1 + \dfrac{h}{2}\,p_i}\,,\\
y_{1,i+1} &= \frac{-\left(1 - \dfrac{h}{2}\,p_i\right)\cdot y_{1,i-1} - (h^2 q_i - 2)\cdot y_{1,i}}{1 + \dfrac{h}{2}\,p_i}\,,\\
&\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, (n-1).
\end{aligned}
\tag{4.2.15}
$$

Заданные значения (4.2.13) и (4.2.14) позволяют по формулам (4.2.15) найти последовательно решения $y_0(x)$ и $y_1(x)$ во всех оставшихся узлах x_i, $i = 2, \dots, n$. Постоянную c_1 находим по формуле (см. выше): $c_1 = (B - y_{0,n})/y_{1,n}$. Однако, может оказаться так, что $y_{1,n} = 0$. Поскольку выбор констант D_0 и D_1 в (4.2.13) и (4.2.14) находится в распоряжении вычислителя, то меняя значение D_1 в (4.2.14) можно найти решение $y_1(x)$, для которого $y_{1,n} \neq 0$. Решение всей задачи (4.1.1), (4.1.2) находится по формулам (4.2.12).

4.3. Задание

Для предложенного варианта лабораторной работы решить краевую задачу либо методом прогонки, либо методом стрельбы. Для задания краевого условия в точке b предварительно необходимо решить аналитически соответствующую задачу Коши:

$$
\begin{aligned}
&u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x)\,,\\
&u(x_0) = A,\;\; u'(x_0) = C\,;\\
&x \in [a,b],\;\; x_0 = a.
\end{aligned}
$$

Значение B находится подстановкой точки b в точное решение $u(x)$ задачи Коши: $B = u(b)$. Варианты задачи Коши приведены в табл. 4.1. Значения a и b во всех вариантах равны 0 и 1, соответственно $[a,b] = [0,1]$.

Таблица 4.1. Варианты задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№	Функции			Нач. условия	
вар.	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
1	2	3	4	5	6
1	-2	2	$\mathrm{e}^x \cdot \sin x$	2	$3/2$
2	-7	12	5	1	2
3	2	2	$x \cdot \mathrm{e}^{-x}$	0	0
4	-2	2	x^2	0.5	0
5	-8	16	e^{4x}	0	1
6	0	-1	$2\mathrm{e}^x - x^2$	2	1
7	0	4	8	3	4
8	-1	0	$\mathrm{ch}(2x)$	0	0
9	-2	0	$\mathrm{e}^x(x^2 + x - 3)$	2	2
10	0	1	$4\mathrm{e}^x$	4	-3
11	0	-1	$2 - x^2$	1	1
12	0	4	e^{-2x}	0	0
13	-4	0	$6x^2 + 1$	0	3.5625
14	0	-4	$16x \cdot \mathrm{e}^{2x}$	0	3
15	1	-2	$-2x + 1$	1	-1

Окончание таблицы 4.1.

1	2	3	4	5	6
16	-6	8	10	1	2
17	-2	2	$2x$	0	1
18	0	4	$\sin(2x)+1$	0.25	0
19	-3	2	$2\sin x$	0	-0.2
20	0	-1	$2\,\mathrm{sh}\,x$	0	1
21	1	-2	$\cos x - 3\sin x$	1	2
22	-1	0	3	6	2
23	0	4	$\sin x$	1	1
24	0	4	e^{x}	1	3
25	-1	-6	2	1	0
26	-8	7	14	1	5
27	0	9	$6\cos(3x)$	1	3
28	4	4	$5\mathrm{e}^{-2x}$	1	2
29	0	4	$3\sin(2x)$	2	0.75
30	0	1	$4x\cdot\mathrm{e}^{x}$	-2	0

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука,1989. 432 с.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 288 с.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.

4. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.

5. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

7. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.