

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Общие замечания

Математическое моделирование многих задач механики, физики, химии и других областей науки и техники приводит к дифференциальным уравнениям, обыкновенным или в частных производных. В настоящем пособии ограничимся рассмотрением задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Простейшее ОДУ имеет вид:

$$y' = f(x, y(x)). \quad (2.1)$$

Для него может быть поставлена задача Коши: найти решение $y=y(x)$, $x \in [a, b]$, удовлетворяющее (2.1) и начальному условию

$$y(a) = y_0. \quad (2.2)$$

Другими словами, требуется получить интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через заданную точку $M(a, y_0)$. Существование и единственность решения задачи (2.1)-(2.2) следует из теоремы Коши [1]. Приведём её без доказательства.

Теорема Коши. Если правая часть $f(x, y)$ уравнения (2.1) и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области изменения переменных x и y , то для всякой внутренней точки (x_0, y_0) этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение $y = y_0$ при $x = x_0$.

Если речь идёт об обыкновенном дифференциальном уравнении n -го порядка ($n > 1$)

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.3)$$

то его решение (интегрирование) заключается в нахождении функций $y(x)$, которые удовлетворяют (2.3) для всех $x \in [a, b]$.

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (2.4)$$

Здесь c_1, c_2, \dots, c_n – произвольные постоянные, выбор которых определяет частное решение уравнения (2.3).

от элементарных функций. Класс задач, решение которых можно получить точными методами, сравнительно узок.

При использовании приближённых методов решение задачи Коши для ОДУ определяется как предел некоторой последовательности функций. При этом каждый член последовательности выражается через элементарные функции или квадратуры от элементарных функций. К *приближённым* методам относятся: разложения решения в обобщённый степенной ряд, метод Чаплыгина, метод Пикара, Канторовича и др. [2]. *Приближённые* методы удобно применять тогда, когда удаётся найти явное выражение для коэффициентов ряда.

Численные методы применимы к широким классам уравнений и систем уравнений. С появлением ЭВМ эти методы стали одним из основных способов решения практических задач для ОДУ. Они не дают общего решения задач (2.1) или (2.6) и предназначены для вычисления приближённых (а иногда точных) значений частных решений задач (2.1)-(2.2) или (2.6)-(2.7) на заранее выбранной сетке аргумента x – конечном множестве точек $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{1, N}$. В итоге искомое решение получается в виде таблицы.

Итак, пусть требуется находить значения $y_i \approx y(x_i)$, $i = \overline{1, N}$, приближённого решения задачи (2.1)-(2.2) в узлах сетки

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Большинство численных методов решения задачи (2.1)-(2.2) можно представить в виде [3]:

$$y_{m+1} = F(y_{m-q}, y_{m-q+1}, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+s}).$$

Здесь F – некоторая функция указанных аргументов, которая определяется выбранным методом, видом уравнения (2.1) и построенной сеткой.

Определение 1. При $q = 0$, $0 \leq s \leq 1$ численные методы называют *одношаговыми*, а при $q \geq 1$ или $s \geq 1$ – *многошаговыми*. Одношаговые методы называют *явными* при $s = 0$, *неявными* при $s = 1$. Многошаговые методы при $s > 1$ называют *с забеганием вперёд*.

С примерами указанных видов методов и со способами их построения познакомимся в данной главе.

Численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Однако формальное выполнение условий корректности может оказаться недостаточным для использования

численных методов. Необходимо, чтобы задача была *хорошо обусловлена (устойчива)* относительно входных данных. Если это условие не учитывать, то небольшие изменения начальных условий или небольшие погрешности численных методов могут сильно исказить решение. Приведем пример плохо обусловленной задачи.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши [4, с. 240]

$$y' = y - x, \quad (2.8)$$

$$y(0) = 1, \quad x \in [0, 100]. \quad (2.9)$$

Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$y(x, c) = 1 + x + ce^x \quad (2.10)$$

и содержит одну произвольную постоянную. Из начального условия (2.9) находим, что $c = 0$. Тогда $y(100) = 101$.

Незначительно изменим начальное условие. Например, пусть $\tilde{y}(0) = 1,000001$. Постоянная c тоже изменится слегка: $\tilde{c} = 10^{-6}$.

Однако

$$\tilde{y}(100) = 101 + 10^{-6} e^{100} \approx 2,7 \cdot 10^{37}$$

и решение сильно изменилось.

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $\bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T$.

Следовательно, алгоритмы решения задачи (2.11) получаются из алгоритмов для одного уравнения формальной заменой $y(x)$ и

$f(x, y)$ на $\bar{y}(x), \bar{f}(x, \bar{y})$.

2.4. Метод Эйлера

Опишем простейший из численных методов метод Эйлера нахождения таблицы значений решения $y(x)$ задачи Коши (2.12)-(2.13) для $x \in [a, b]$. Существует несколько подходов получения расчетных формул этого метода [3]. Остановимся на одном из них.

Область непрерывного изменения аргумента x заменяем дискретным множеством точек $x_j = a + jh$, называемых *узлами сетки*,

$$h = \frac{b-a}{N}, x_0 = a, x_N = b, h - \text{ шаг сетки.}$$

Численное решение задачи (2.12)-(2.13) представляет собой таблицу значений:

$$x_j, y_j, j = 0, 1, \dots, N,$$

где y_j – разностное или численное значение решения в узле x_j . Запишем уравнение (2.12) при $x = x_j$. По определению производной имеем:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \quad (2.18)$$

Отбрасывая предел в (2.18), заменим производную $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j}$ конечно-разностным отношением:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} \approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.12), получим:

$$\frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} \approx f(x_j, y(x_j)), j = 0, 1, \dots, N-1.$$

$y(x_j)$ – значение решения $y(x)$ задачи Коши в узле x_j . Обозначим через y_j численное решение, удовлетворяющее разностному уравнению

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1} \quad (2.20)$$

или

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), j = \overline{0, N-1}. \quad (2.21)$$

Учитывая начальное условие (2.13), с помощью разностного уравнения (2.21) можно последовательно определить:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), (j = 1),$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), (j = 2),$$

$$-----$$

$$y_N = y_{N-1} + hf(x_{N-1}, y_{N-1}), (j = N - 1).$$

Итак, вычислительный алгоритм метода Эйлера (2.20), (2.13) или (2.21), (2.13) построен.

Графической иллюстрацией приближённого решения, полученного по методу Эйлера, является ломаная, соединяющая последовательно точки M_0, M_1, \dots, M_N , называемая ломаной Эйлера (рис. 2.1).

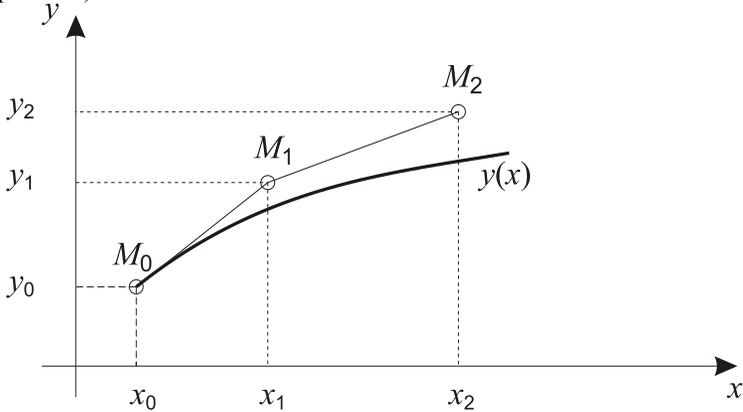


рис. 2.1

Точность построенного алгоритма определяется близостью $y(x_j)$ и y_j . Положим

$$y_j = y(x_j) + \delta y_j \quad (2.22)$$

и оценим величину погрешности δy_j . Подставим (2.22) в разностное уравнение (2.20) и перепишем разностное уравнение в виде

$$\frac{\delta y_{j+1} - \delta y_j}{h} = f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}. \quad (2.23)$$

Далее, пусть $y(x) \in C^3[a, b]$. Запишем разложение функции $y(x_{j+1})$ в окрестности узла по формуле Тейлора:

$$y(x_{j+1}) \equiv y(x_j + h) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y(\bar{x})}{dx^2},$$

где $x_j < \bar{x} < x_{j+1}$.

В силу того что $\frac{d^2 y}{dx^2}$ – ограниченная производная на $[a, b]$, предыдущее соотношение можно переписать в виде:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + O(h^2) = y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + O(h^2).$$

Из этого разложения следует, что

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} = f(x_j, y(x_j)) + O(h). \quad (2.24)$$

Сравнивая (2.24) и (2.20), нетрудно заметить, что точное решение исходной дифференциальной задачи удовлетворяет разностному уравнению (2.20) с точностью $O(h)$. Далее подставим (2.24) в правую часть (2.23). В результате получим:

$$\frac{\delta y_{j+1} - \delta y_j}{h} = f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - f(x_j, y(x_j)) + O(h). \quad (2.25)$$

Из условий существования и единственности решения задачи (2.12)-(2.13), накладываемых на функцию $f(x, y)$, справедливо неравенство

$$\left| f(x_j, y(x_j) + \delta y_j) - f(x_j, y(x_j)) \right| \leq L |\delta y_j|, \quad (2.26)$$

где L – константа Липшица. Используя (2.26), находим из (2.25)

$$\left| \delta y_{j+1} \right| \leq (1 + hL) \left| \delta y_j \right| + O(h^2). \quad (2.27)$$

С помощью неравенства (2.27) можно дать оценку роста погрешности за один шаг. Получим оценку для ошибки, накопленной за N шагов:

$$\begin{aligned} \left| \delta y_N \right| &\leq O(h^2) + (1 + hL) \left| \delta y_{N-1} \right| \leq O(h^2) + (1 + hL)O(h^2) + \\ &+ (1 + hL) \left| \delta y_{N-2} \right| \leq \dots \leq O(h^2) + (1 + hL)O(h^2) + (1 + hL)^2 O(h^2) + \\ &+ \dots + (1 + hL)^{N-1} O(h^2) + (1 + hL)^N \left| \delta y_0 \right|. \end{aligned}$$

Просуммируем геометрическую прогрессию со знаменателем $1 + hL$ в правой части неравенства. В результате придём к неравенству:

$$\left| \delta y_N \right| \leq \frac{(1 + hL)^N - 1}{(1 + hL) - 1} O(h^2) + (1 + hL)^N \left| \delta y_0 \right|. \quad (2.28)$$

Оценим, какова величина ошибки при малых значениях h для любого фиксированного x . Полагая $x = Nh$ и учитывая, что

$(1 + hL)^N = (1 + hL)^{\frac{x}{h}}$ пропорциональна e^{Lx} при условии $h \rightarrow 0$, получим из (2.28):

$$|\delta y(x)| \leq e^{Lx} O(h) + e^{Lx} |\delta y_0|. \quad (2.29)$$

Так как $\delta y_0 = y_0 - y_0 = 0$, то из (2.29) при $h \rightarrow 0$ следует, что $\delta y(t) = 0$.

Итак, доказано, что при достаточно малом h таблица x_j, y_j , полученная методом Эйлера, сколь угодно точно аппроксимирует решение исходной задачи (2.12)-(2.13).

Заметим, что не получен критерий – какой шаг h будет «достаточно малым» для достижения заданной точности.

Установлен лишь факт сходимости приближённого решения к точному при $h \rightarrow 0$.

Порядок точности метода Эйлера – минимальный, $y(x_j) - y_j = O(h)$. Очевидно, что это объясняется достаточно грубым способом аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

Качество аппроксимации оценивается по точности, с которой решение исходной задачи удовлетворяет разностному уравнению. Сравнение (2.24) и (2.20) показывает, что в этом случае аппроксимация имеет порядок $O(h)$. Заметим, что если вместо (2.20) использовать (2.21), то порядок аппроксимации будет $O(h^2)$. Это за счёт другой нормировки разностного уравнения (умножения его на h). Будем использовать так называемую естественную нормировку разностного уравнения, при которой оно в пределе переходит в другое дифференциальное уравнение. Например, (2.20) (точнее, (2.24)) при $h \rightarrow 0$ переходит в (2.12), в то время как (2.21) – в равенство $y = y$, которое никак не отражает особенностей исходной задачи.

Для того чтобы судить о достигнутой точности вычислений, необходимо провести расчеты с различными шагами сетки h и сравнить результаты. С этой точки зрения более удобны методы высокого порядка точности. Примером такого метода является метод Хьюна [3]. Метод Хьюна отличается от метода Эйлера (2.20) видом аппроксимации правой части:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})]. \quad (2.30)$$

Оценим порядок, с которым разностное уравнение (2.30) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.12). Подставим в (2.30) вместо y_j и y_{j+1} значения точного решения задачи (2.12)-(2.13) - $y(x_j)$ и $y(x_{j+1})$.

Используя разложения

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h \frac{dy(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y(x_j)}{dx^2} + O(h^3),$$

$$f(x_{j+1}, y(x_{j+1})) = f(x_j, y(x_j)) + h \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_j} + O(h^2),$$

получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{h}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x_j} = \left(f + \frac{h}{2} \frac{df}{dx} \right)_{x_j} + O(h^2).$$

Так как $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.12) и следствию из него

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{df}{dx},$$

то отсюда следует, что разностное уравнение (2.30) при $y(x)$ удовлетворяется с точностью $O(h^2)$.

В отличие от (2.20) разностная схема (2.30) не позволяет явно выразить y_{j+1} через y_j . Схема Хьюна является неявной ($s = 1$).

Чтобы решить разностное уравнение, надо применить тот или иной итерационный процесс, используя в качестве начального приближения y_j . Однако это связано с затратами времени в зависимости от вида $f(x, y)$. Можно ограничиться двумя итерациями следующего вида. Сначала вычисляют первое приближение \tilde{y}_{j+1} по формуле Эйлера:

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad (2.31)$$

а затем, подставляя его в правую часть (2.30), находят значение y_{j+1} :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})]. \quad (2.32)$$

Фактически это означает, что вместо (2.30) используется следующее разностное уравнение:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))]. \quad (2.33)$$

Нетрудно убедиться, что разностное уравнение (2.33) аппроксимирует исходное (2.12) с точностью $O(h^2)$ и, в то же время, даёт явное выражение для определения y_{j+1} через y_j .

Отметим, что при проведении расчетов по формулам (2.31) и (2.32), можно контролировать точность получаемого решения путём сравнения значений \tilde{y}_{j+1} и y_{j+1} на каждом шаге вычислений. Если величина пересчёта $\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}$ слишком велика (мала), то это является сигналом о необходимости уменьшить (увеличить) шаг сетки h . Меняя h в соответствии с указанным правилом, можно поддерживать точность вычислений на определённом уровне.

Проиллюстрируем применение метода Эйлера на примере следующей задачи.

Пример 5. С помощью метода Эйлера составить таблицу значений решения задачи Коши для ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(0) = 1, x \in [0, 1].$$

Решение. Очевидно, что точное решение имеет вид:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Пусть $h = 0,1$ и рассматривается равномерная сетка

$$\bar{w}_h = \left\{ x_j \mid x_j = jh, j = \overline{0, N}; N = \frac{1}{h} \right\}.$$

Пользуясь формулой (2.21), будем последовательно получать y_1, \dots, y_{10} . Все вычисления представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

J	x_j	y_j	$hf(x_j, y_j)$	Точное решение $y(x_j) = e^{x_j^2/2}$
0	0	1	0	1
1	0,1	1	0,01	1,00501
2	0,2	1,01	0,0202	1,02020
3	0,3	1,0302	0,03091	1,04603
4	0,4	1,06111	0,04244	1,08329
5	0,5	1,10355	0,05518	1,13315
6	0,6	1,15873	0,06952	1,19722
7	0,7	1,22825	0,08598	1,27762
8	0,8	1,31423	0,10514	1,37713
9	0,9	1,41937	0,12774	1,49930
10	1	1,54711		1,64872

Из приведённой таблицы видно, что абсолютная и относительная погрешности, допущенные при нахождении решения, возрастают к концу таблицы. Например, в точке x_5 абсолютная погрешность

$$A_{x_5}^* = [1,10355 - 1,13315] = 0,0296,$$

а относительная

$$\Delta_{x_5}^* = \frac{A_{x_5}^*}{|y(x_5^*)|} = 2,61219\%.$$

В точке $x_{10} = 1,0$ соответственно будем иметь:

$$A_{x_{10}}^* = 0,10161, \Delta_{x_{10}}^* = 6,16296\%.$$

В заключение отметим, что метод Эйлера и метод Хьюна легко обобщаются на случай системы ОДУ [3]. Например, метод Эйлера для системы N ОДУ первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j}{h} = \bar{f}(x_j, \bar{y}_j), j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, x \in [0, 1], \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$\bar{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^T;$$

а

$$\bar{f}(x_j, \bar{y}_j) = (f_1(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}), \dots, f_n(x_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}))^T$$

или с помощью обозначения $f_j = f(x_j, \bar{y}_j)$ можно переписать следующим образом

$$\bar{f}_j = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Перепишем *метод Эйлера* для каждой компоненты вектора \bar{y}_j :

$$\begin{cases} \frac{y_{1,j+1} - y_{1,j}}{h} = f_{1,j}, \\ \frac{y_{2,j+1} - y_{2,j}}{h} = f_{2,j}, \\ \dots \\ \frac{y_{n,j+1} - y_{n,j}}{h} = f_{n,j}, j = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

$$y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \dots, y_n(0) = y_{n0}.$$

Аналогично можно записать метод Хьюна решения задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.

Покажем применение метода Эйлера в случае решения систем ОДУ на примере.

Пример 6. С помощью метода Эйлера определить численное решение задачи Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dx} = 3z, \end{cases}$$

$$y(0) = 2, z(0) = 1, x \in [0, 1].$$

Решение. Точное решение сформулированной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} y = e^{2x} + e^{3x}, \\ z = e^{3x}. \end{cases}$$

Выберем равномерную сетку

$\bar{\omega}_h = \{x_j \mid x_j = \overline{jh}, j = \overline{0, 10}; h = 0, 1\}$ и приведём результаты

численного решения задачи Коши в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

x_j	y_j	z_j	$y(x_j)$	$z(x_j)$
0	2	1	2	1
0,1	2,5	1,3	2,57126	1,34986
0,2	3,13	1,69	3,31394	1,82212
0,3	3,925	2,197	4,28172	2,4596
0,4	4,9297	2,8561	5,54566	3,32012
0,5	6,20125	3,71293	7,19997	4,48169
0,6	7,81279	4,82681	9,36976	6,04965
0,7	9,85803	6,27485	12,22137	8,16617
0,8	12,45712	8,1573	15,97621	11,02317
0,9	15,76427	10,60449	20,92938	14,87973
1	19,97757	13,78584	27,47459	20,08553

Сравнение численного и точного решений, значения которых в узлах сетки приведены в табл. 2.2, показывает, что абсолютная и относительная погрешности возрастают с увеличением номера узла. Например, для узла x_1 :

$$A_{y_1}^* = 0,07126; A_{z_1}^* = 0,04986;$$

$$\Delta_{y_1}^* = 2,7714\%; \Delta_{z_1}^* = 3,69372\%;$$

для узла x_5 :

$$A_{y_5}^* = 0,99872; A_{z_5}^* = 0,76876;$$

$$\Delta_{y_5}^* = 13,87117\%; \Delta_{z_5}^* = 17,15335\%;$$

для узла x_{10} :

$$A_{y_{10}}^* = 7,49702; A_{z_{10}}^* = 6,29969;$$

$$\Delta_{y_{10}}^* = 27,2871\%; \Delta_{z_{10}}^* = 31,36432\%.$$

Для улучшения результатов численного решения задачи имеются две возможности:

- 1) уменьшение шага сетки;
- 2) применение метода более высокого порядка точности.

В обоих случаях увеличивается число арифметических операций и время расчетов.

2.5. Методы Рунге-Кутты

Построим одношаговые численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), x \in [a, b], \\y(a) &= y_0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Считаем, что задача поставлена корректно [1]. На $[a, b]$ задана равномерная сетка $\overline{\Omega}_h$, как в примере 5.

Затем проинтегрируем уравнение на промежутке $[x_m, x_{m+1}]$.

Получим

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, y(t)) dt, m = 0, 1, 2, \dots, N-1.\tag{2.36}$$

Теперь достаточно указать эффективный способ вычисления интеграла в (2.36), чтобы получить вычислительное правило решения задачи (2.35). Так, если заменить интеграл в (2.36) по формуле левых прямоугольников, то получается классический метод Эйлера:

$$\begin{aligned}y(x_{m+1}) &= y(x_m) + h \cdot f(x_m, y_m), \\m &= 0, 1, \dots, N-1, y_0 - \text{задано}.\end{aligned}$$

Если использовать формулу правых прямоугольников или трапеций, то можно получить неявные методы Эйлера и Хьюна соответственно.

Существует общий способ, предложенный Рунге и Кутта, построения явных одношаговых вычислительных правил [2, с. 151-156], [3, с. 21-32], [4, с. 246-250], [6, с. 450-459], [7, с. 218-230].

Рассмотрим его. Пусть

$$\Delta y_m = y(x_{m+1}) - y(x_m).$$

Тогда (2.36) примет вид

$$\Delta y_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, y(t)) dt.\tag{2.37}$$

Чтобы перейти к промежутку интегрирования $[0, 1]$, введём в (2.37)

новую переменную $\alpha = \frac{t - x_m}{h}$.

Тогда вместо (2.37) получим

$$\Delta y_m = h \cdot \int_0^1 f(x_m + \alpha \cdot h, y(x_m + \alpha \cdot h)) d\alpha. \quad (2.38)$$

Задаем три группы параметров:

$$(\alpha) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q;$$

$$(\beta) : \begin{cases} \beta_{10}; \\ \beta_{20}, \beta_{21}; \\ \dots \\ \beta_{q0}, \beta_{q1}, \dots, \beta_{qq-1}; \end{cases}$$

$$(A) : A_0, A_1, \dots, A_q.$$

С помощью (α) и (β) определим величины :

$$k_0 = h \cdot f(x_m, y_m);$$

$$k_1 = h \cdot f(x_m + \alpha_1 \cdot h, y_m + \beta_{10} \cdot k_0);$$

$$k_q = h \cdot f(x_m + \alpha_q \cdot h, y_m + \beta_{q0} \cdot k_0 + \dots + \beta_{qq-1} \cdot k_{q-1}).$$

Все они могут быть последовательно вычислены, если параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{21}, \dots, \beta_{qq-1}$ известны.

Величины

$$k_i = h \cdot f(x_m + \alpha_i \cdot h, y_m + \beta_{i0} \cdot k_0 + \beta_{i1} \cdot k_1 + \dots + \beta_{ii-1} \cdot k_{i-1}), i = \overline{1, q},$$

можно рассматривать как приближённые значения подынтегральной функции $f(x_m + \alpha \cdot h, y(x_m + \alpha \cdot h))$, умноженные на h , если соответствующим образом подобрать параметры (β) .

Тогда при помощи набора (A) составим линейную комбинацию

$\sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i$, которой придадим смысл квадратурной суммы, полагая

$$\Delta y_m \cong \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i \quad (2.39)$$

Численный метод общего вида (2.39) для решения задачи (2.35) фактически построен. Осталось обсудить способ выбора параметров (α) , (β) , (A) .

Для этих целей введём в рассмотрение погрешность приближённого равенства (2.39):

$$r_q(h) = \Delta y_m - \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i. \quad (2.40)$$

Допустим, что функция $f(x, y(x))$ обладает достаточной гладкостью. Тогда для погрешности $r_q(h)$ будет справедливо разложение:

$$r_q(h) = \sum_{j=0}^p \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} r_q^{(p+1)}(\theta h), \quad (2.41)$$

где $0 < \theta < 1$. Из формулы (2.41) вытекает следующее: если параметры (α) , (β) , (A) подобраны так, что справедливо

$$r_q^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, p}, \quad (2.42)$$

то погрешность приближённого равенства (2.39) будет величиной порядка не ниже h^{p+1} , т.е.

$$r_q(h) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} r_q^{(p+1)}(\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Число p из равенства (2.42) называют *порядком точности* соответствующего численного метода.

Из проведённых выше рассуждений следуют два эквивалентных приёма получения параметров (α) , (β) , (A) .

1^{ый} приём. Величины $r_q^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, p}$, записывают через $f(x, y(x))$ и её частные производные и требуют выполнения $r_q^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, p}$, для любой достаточно гладкой $f(x, y(x))$ и при возможно большем p .

2^{ой} приём (эквивалентен первому). Параметры (α) , (β) , (A) подбирают так, чтобы разложения

$$\Delta y_m = y(x_m + h) - y(x_m) = hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \dots \text{ и } \sum_{i=0}^q A_i \cdot k_i$$

по степеням h совпадали до членов с наиболее высокими степенями h .

Обсуждать указанные приёмы построения вычислительных правил в общем случае трудно. Ограничимся рассмотрением конкретных примеров при $q = 0, 1, 2, 3$.

I. Метод первого порядка точности ($q = 0$). При $q = 0$ из (2.39) имеем:

$$\Delta y_m \cong A_0 \cdot k_0, \quad (2.43)$$

где $k_0 = hf(x_m, y_m)$.

Согласно формуле (2.40) погрешность в этом случае имеет вид:

$$r_0(h) = y(x_m + h) - y(x_m) - hA_0f(x_m, y_m).$$

Для определения значения A_0 воспользуемся первым приёмом и вычислим r'_0, r''_0, \dots . Получим

$$\begin{aligned} r'_0(h) &= y'(x_m + h) - A_0f(x_m, y_m), \\ r''_0(h) &= y''(x_m + h). \end{aligned}$$

Т.к. $r''_0(h)$ не зависит от A_0 , то не имеет смысла вычислять r'''_0, r''''_0, \dots . Ясно, что можно лишь требовать $r'_0(0) = 0$.

Тогда $p = 1$ и A_0 определяется из соотношения

$$f(x_m, y_m)(1 - A_0) = 0.$$

Следовательно, $A_0 = 1$. Из (2.43) получаем численный метод первого порядка точности для решения задачи (2.35):

Согласно формуле (2.41) локальная погрешность построенного правила имеет вид:

$$r_0(h) = \frac{h^2}{2!} r''_0(\theta h) = \frac{h^2}{2!} y''(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Итак, в случае $q = 0$ способ Рунге-Кутты построения одношаговых вычислительных правил решения задачи Коши приводит к явному методу Эйлера.

II. Метод второго порядка точности ($q = 1$). При $q = 1$ имеем приближённое равенство

$$\Delta y_m = hA_0f(x_m, y_m) + hA_1f(x_m + \alpha_1h, y_m + h\beta_{10}f(x_m, y_m)). \quad (2.44)$$

Для определения параметров $A_0, A_1, \alpha_1, \beta_{10}$ воспользуемся вторым приёмом и разложим Δy_m и $\sum_{i=0}^1 A_i \cdot k_i$ в ряд по степеням h . Будем иметь:

$$\Delta y_m = hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \dots$$

или

$$\begin{aligned} \Delta y_m = hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} [f_x + f_y f]_{(x_m, y_m)} + \\ + \frac{h^3}{3!} [f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_x + f_y f)]_{(x_m, y_m)} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_0 k_0 + A_1 k_1 = A_0 hf(x_m, y_m) + A_1 hf(x_m, y_m) + \\ + h^2 A_1 (f_x \alpha_1 + f_y \beta_{10} f)_{(x_m, y_m)} + \\ + \frac{h^3}{2} A_1 (f_{xx} \alpha_1^2 + f_{xy} \alpha_1 \beta_{10} f + f_{yx} \alpha_1 \beta_{10} f + f_{yy} \beta_{10}^2 f^2)_{(x_m, y_m)} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Сравниваем в (2.45) и (2.46) коэффициенты при h и h^2 . Получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ A_1 \alpha_1 = \frac{1}{2}, \\ A_1 \beta_{10} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.47)$$

При $q=1$ за счёт выбора $A_0, A_1, \alpha_1, \beta_{10}$ не удаётся добиться совпадения всех членов с h^3 в разложениях (2.45), (2.46). Следовательно, локальная погрешность любого построенного правила при $q=1$ есть $O(h^3)$, а сам метод будет второго порядка точности.

Из системы (2.47) находим:

$$\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1}, \quad A_0 = 1 - A_1. \quad (2.48)$$

Получается, что A_1 можно задавать числом, не равным нулю. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $A_1 = \frac{1}{2}$. Тогда $A_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \beta_{10} = 1$ и

$$\Delta y_m = \frac{(k_0 + k_1)}{2}, \quad (2.49)$$

причём $k_0 = hf(x_m, y_m)$, $k_1 = hf(x_m + h, y_m + k_0)$, а локальная погрешность имеет вид:

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} \left[f_y (f_x + f_y f) - \frac{1}{2} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f^2 f_{yy}) \right]_{(\tilde{x}_m, y(\tilde{x}_m))}, \quad (2.50)$$

$$x_m < \tilde{x}_m < x_{m+1}.$$

Вычислительное правило (2.49) называют методом Хьюна – это аналог квадратурной формулы трапеций.

Случай 2. Положим $A_1 = 1$. Тогда $A_0 = 0, \alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2}$ и

$$\Delta y_m = k_1, \text{ где } k_0 = hf(x_m, y_m), k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right).$$

Получили вычислительное правило, аналогичное квадратурной формуле средних прямоугольников.

Случай 3. Пусть $A_1 = \frac{3}{4}$. Тогда $A_0 = \frac{1}{4}, \alpha_1 = \beta_{10} = \frac{2}{3}$ и

$$\Delta y_m = \frac{(k_0 + 3k_1)}{4},$$

где $k_0 = hf(x_m, y_m)$, $k_1 = hf\left(x_m + \frac{2h}{3}, y_m + \frac{2k_0}{3}\right)$. В этом случае локальная погрешность имеет представление:

$$r_1(h) = \frac{h^3}{6} [f_y (f_x + f_y f)]_{(\tilde{x}_m, y(\tilde{x}_m))}.$$

Общая схема построения вычислительных правил третьего и более высокого порядка точности остается прежней, однако выкладки становятся громоздкими. Так, например, при выводе методов третьего порядка точности ($q = 2$) для определения параметров метода получается 6 уравнений на 8 неизвестных, а в случае методов четвертого порядка ($q = 3$) – 11 уравнений на 13 неизвестных. Другими словами, при $q > 2$ для определения неизвестных параметров получаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы имеют бесконечное множество решений. Из них выбирают решения, которые приводят к наиболее простым (экономичным) алгоритмам

методов Рунге-Кутты. Приведём без вывода примеры подобных методов [7, с. 224-230], [8, с. 294-304].

III. Методы третьего порядка точности ($q = 2$).

Случай 1.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf(x_m + h, y_m - k_0 + 2k_1).$$

Случай 2.

$$\Delta y_m = \frac{1}{4}(k_0 + 3k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{k_0}{3}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{2}{3}k_1\right).$$

Случай 3.

$$\Delta y_m = \frac{1}{9}(2k_0 + 3k_1 + 4k_2),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}k_1\right).$$

IV. Методы четвёртого порядка точности ($q = 3$).

Случай 1.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad (2.51)$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_2).$$

Это одна из самых распространённых формул Рунге-Кутты, используемых в практических расчетах.

Случай 2.

$$\Delta y_m = \frac{1}{8}(k_0 + 3k_1 + 3k_2 + k_3),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{k_0}{3}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{2h}{3}, y_m - \frac{k_0}{2} + k_1\right),$$

$$k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_0 - k_1 + k_2).$$

Представленные формулы можно считать аналогом квадратурной формулы Симпсона.

Случай 3.

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}(k_0 + 4k_2 + k_3),$$

где

$$k_0 = hf(x_m, y_m), \quad k_1 = hf\left(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{k_0}{4}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf(x_m + h, y_m + k_0 - 2k_1 + k_2).$$

Как следует из вышесказанного, увеличение q на единицу позволяет поднять точность методов на порядок. Однако при $q = 4$ повысить точность в вычислительных правилах по отношению к $q = 3$ не удаётся. Поэтому такие формулы не находят применения.

Увеличения точности методов можно достичь при значении $q \geq 5$. С примером правил Рунге-Кутты пятого порядка точности можно ознакомиться, например, в [3, с. 31], [9, с. 78-82]. В [9, с. 56-64] наглядно представлена геометрическая интерпретация методов

Рунге-Кутты первого, второго и четвёртого порядков точности. Повышение порядка точности численных одношаговых методов Рунге-Кутты приводит к быстрому возрастанию трудоёмкости вычислений, т.к. на одном шаге многократно приходится вычислять значения функции $f(x, y(x))$ при разных значениях аргументов. Заметим, однако, что методы более высокого порядка точности позволяют использовать больший шаг h . Этот факт может уменьшить общие вычислительные затраты. Кроме того, методы Рунге-Кутты дают возможность использования переменного шага сетки. Так как эффективная оценка погрешности методов Рунге-Кутты затруднительна, то на практике обычно на каждом шаге применяют двойной пересчёт. Суть его заключается в следующем. Исходя из точного значения $y(a) = y_0$, вычисляют $y(a + 2h)$ двумя способами: с шагом h и с двойным шагом $h_1 = 2h$. Если полученные значения различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для данного этапа расчёта выбран правильно. Полученное с его помощью значение решения можно принять за $y(x_1)$. В противном случае шаг уменьшается в два раза.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 7. Используя метод Рунге-Кутты (2.51), выбрать шаг для приближённого решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} y' &= x + y, x \in [0; 0,5], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Решение. Покажем начало процесса. Пусть $h = 0,1$. Вычислим $y_2 \approx y(0,2)$ с шагом h и $h_1 = 2h$. Последовательно получаем при $h = 0,1$:

$$\begin{aligned} k_0^{(0)} &= 0,1(0 + 1) = 0,1; \\ k_1^{(0)} &= 0,1(0,05 + 1 + 0,05) = 0,11; \\ k_2^{(0)} &= 0,1\left(0,05 + 1 + \frac{0,11}{2}\right) = 0,1105; \\ k_3^{(0)} &= 0,1(0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) \text{ и} \\ \Delta y_0 &= 0,11034. \end{aligned}$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,11034 = 1,11034.$$

Получили приближённое значение решения в точке $x = 0,1$.

Получим теперь значение y_2 .

Имеем

$$k_0^{(1)} = 0,1(0,1 + 1,11034) \approx 0,121;$$

$$k_1^{(1)} = 0,1 \left(0,15 + 1,11034 + \frac{0,121}{2} \right) \approx 0,1321;$$

$$k_2^{(1)} = 0,1 \left(0,15 + 1,11034 + \frac{0,1321}{2} \right) \approx 0,1326;$$

$$k_3^{(1)} = 0,1(0,2 + 1,11034 + 0,1326) \approx 0,1443;$$

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{6} (k_0^{(1)} + 2k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + k_3^{(1)}) = \\ &= \frac{1}{6} (0,121 + 2 \cdot 0,1321 + 2 \cdot 0,1326 + 0,1443) \approx 0,13245. \end{aligned}$$

Тогда

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,11034 + 0,13245 = 1,24279.$$

Здесь $y_2 \approx y(0,2)$.

Получим это значение теперь с шагом $h_1 = 0,2$. Имеем

$$k_0 = 0,2(0 + 1) = 0,2;$$

$$k_1 = 0,2(0,1 + 1 + 0,1) = 0,24;$$

$$k_2 = 0,2(0,1 + 1 + 0,12) = 0,244;$$

$$k_3 = 0,2(0,2 + 1 + 0,244) = 0,2888.$$

Следовательно, $\Delta y = \frac{1}{6} (0,2 + 2 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,244 + 0,2888) = 0,2428$ и

$y(0,2) \approx 1,2428$. Сравнивая это значение с ранее полученным $y_2 = 1,24279$, находим, что они совпадают с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Заметим, что точное решение поставленной задачи Коши есть $y(x) = 2e^x - x - 1$. Его значение при $x = 0,2$ равно $y(0,2) = 2e^{0,2} - 0,2 - 1 = 2 \cdot 1,2214 - 1,2 = 1,2428$. Таким образом, дальнейшие расчёты на промежутке $[0;0,5]$ можно проводить с шагом $h = 0,1$. Как доказано в [7, с. 221-224], если метод Рунге-

Кутты аппроксимирует исходное уравнение, то он сходится при $h \rightarrow 0$, причём порядок точности совпадает с порядком погрешности аппроксимации. Здесь под погрешностью аппроксимации понимается выражение

$$-\frac{y_{m+1} - y_m}{h} + \sum_{i=0}^q A_i \sigma_i = \psi_m, \quad m = \overline{0, N-1},$$

где $\sigma_i = \frac{k_i}{h} = f(x_m + \alpha_i h, y_m + \beta_{i0} k_0 + \dots + \beta_{i, i-1} k_{i-1})$.

Все методы Рунге-Кутты обобщаются на системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y}), \quad x \in [a, b] \quad (2.52)$$

и начальные условия

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0. \quad (2.53)$$

Здесь

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad \bar{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T.$$

Выберем $h > 0$ и построим равномерную сетку

$$\bar{\omega}_n = \left\{ x_m \mid x_m = a + mh, m = \overline{0, N}, N = \frac{b-a}{h} \right\}.$$

Поставим задачу определения значения приближённого решения

$$\bar{y}_m \approx \bar{y}(x_m), \quad m = \overline{1, N}, \text{ по формулам}$$

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \Delta \bar{y}_m, \quad m = \overline{0, N-1},$$

где $\Delta \bar{y}_m$ вычисляется, например, по следующей формуле

(обобщение формулы (2.51) на случай систем дифференциальных уравнений):

$$\Delta \bar{y}_m = \frac{1}{6} \left(\bar{k}_0^{(m)} + 2\bar{k}_1^{(m)} + 2\bar{k}_2^{(m)} + \bar{k}_3^{(m)} \right),$$

$$\begin{aligned}
\overline{k_0^{(m)}} &= h\overline{f}(x_m, \overline{y_m}), \\
\overline{k_1^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + \frac{h}{2}, \overline{y_m} + \frac{\overline{k_0^{(m)}}}{2}\right), \\
\overline{k_2^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + \frac{h}{2}, \overline{y_m} + \frac{\overline{k_1^{(m)}}}{2}\right), \\
\overline{k_3^{(m)}} &= h\overline{f}\left(x_m + h, \overline{y_m} + \overline{k_2^{(m)}}\right),
\end{aligned}
\tag{2.54}$$

$$m = \overline{0, N-1}.$$

Итак, зная $\overline{y_0}$, по формулам (2.54) вычисляем $\overline{\Delta y_0}$, а затем находим $\overline{y_1} = \overline{y_0} + \overline{\Delta y_0}$. Принимая $(x_1, \overline{y_1})$ за исходные данные и повторяя тот же процесс, находим $\overline{y_2}$ и т.д.

Подобным образом любая вычислительная схема метода Рунге-Кутты для одного уравнения переносится на систему уравнений вида (2.52), (2.53).

Пример 8. Методом Рунге-Кутты получить численное решение уравнения колебаний маятника в сопротивляющейся среде (см. [2, с. 122]):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0, \quad t \in [0; 0,4] \tag{2.55}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= 0,3; \\
\frac{d\theta}{dt}(0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.56}$$

Здесь $\theta(t)$ - угол отклонения маятника, t - время.

Решение. Положим $z = \frac{d\theta}{dt}$. Тогда уравнение (2.55) может быть

представлено в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -0,2z - 10 \sin \theta. \end{cases}$$

Начальные условия (2.56) переписуются так:

$$\begin{cases} \theta(0) = 0,3. \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\bar{y} = (\theta, z)^T$, $\bar{f} = (f_1, f_2)^T$, $f_1 = z$, $f_2 = -0,2z - 10 \sin \theta$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), t \in [0; 0,4], \\ \bar{y}_0 = (0, 3; 0)^T. \end{cases} \quad (2.57)$$

Положим $h = \Delta t = 0,1$ и поставим задачу определения приближенных значений $\theta(t)$ в точках $0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ с помощью формул (2.54).

Для решения поставленной задачи была составлена программа на языке *высокого уровня*, результаты работы которой представлены в табл. 2.3. В основу программы положен следующий алгоритм:

1) по исходным данным $\theta(0) = 0,3$; $z(0) = 0$ сначала

вычислялись $\bar{k}_i^{(0)} = \begin{pmatrix} k_{i,0}^{(0)} \\ k_{i,z}^{(0)} \end{pmatrix}$ с помощью соответствующих формул из (2.54), $i = 0,1,2,3$;

2) по формулам $\Delta\theta = \frac{1}{6}(k_{0,0}^{(0)} + 2k_{1,0}^{(0)} + 2k_{2,0}^{(0)} + k_{3,0}^{(0)})$,

$\Delta z = \frac{1}{6}(k_{0,z}^{(0)} + 2k_{1,z}^{(0)} + 2k_{2,z}^{(0)} + k_{3,z}^{(0)})$, определялись приращения для θ и z ;

3) за значения $z(0,1); \theta(0,1)$ принимались соответственно значения $z(0) + \Delta z$, $\theta(0) + \Delta\theta$;

4) полученные в точке $t = 0,1$ значения принимались за исходные данные и по ним вычислялись $k_i^{(1)}$, затем новые значения Δz , $\Delta\theta$ и т.д. до тех пор, пока не получились значения решения в точке $t = 0,4$.

Таблица 2.3

t	θ	z	Δz	$\Delta\theta$
0	0,3	0	-0,28792	-0,01456
0,1	0,28544	-0,28792	-0,25503	-0,04192
0,2	0,24352	-0,54295	-0,19818	-0,06476
0,3	0,17876	-0,74113	-0,12263	-0,08093
0,4	0,09783	-0,86376	-	-

Из табл. 2.3 видно, что значения угла отклонения $\theta(t)$ маятника в сопротивляющейся среде с течением времени убывают, что соответствует физике рассматриваемого процесса.

С другими примерами численного решения задачи Коши в случае одного ОДУ, систем ОДУ первого порядка, дифференциального уравнения и систем дифференциальных уравнений высших порядков с применением методов Рунге-Кутты можно ознакомиться в [10, с.133-149].

2.6. Многошаговые методы решения задачи Коши

В одношаговых методах решения задачи Коши для одного уравнения

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

которую считаем корректно поставленной [1], значение y_{m+1} зависит только от информации о решении в предыдущей точке сетки x_m , $m = 0, 1, \dots$.

Вполне вероятно, что можно добиться повышения точности, если использовать информацию о решении в нескольких предыдущих точках сетки $x_m, x_{m-1}, x_{m-2}, \dots$. Иногда оказывается целесообразным привлекать информацию с забеганием вперед за точку x_{m+1} . Подобные методы, поименованные ранее *многошаговыми*, могут быть получены несколькими способами [2, с. 156-163], [3, с. 72-93], [4, с. 250-253], [6, с. 466-471], [7, с. 230-247], [8, с. 327-336], [9, с. 94-130].

Так как использование многошаговых методов на неравномерных сетках усложняется, ограничимся случаем равномерной сетки

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_m \mid x_m = a + mh, m = \overline{0, N}, N = \frac{b-a}{h} \right\}.$$

Как и в случае одношаговых методов, проинтегрируем уравнение из (2.58) на одном шаге и сделаем замену переменных. Получим

$$y(x_m + h) - y(x_m) = h \int_0^1 f(x_m + \alpha h, y(x_m + \alpha h)) d\alpha, \quad (2.59)$$

где $\alpha = \frac{t - x_m}{h}$, $x_m \in \bar{\omega}_h$, $m = \overline{0, N-1}$.

На основании формулы (2.59) будем строить многошаговые численные методы.

По введенной в [3] классификации для многошаговых методов справедлива формула:

$$y_{m+1} = F(y_{m-q}, y_{m-q+1}, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+S}),$$

где принимают $q \geq 1$ и $S = 0$ или $S = 1$ или $S > 1$.

Воспользуемся этим фактом и заменим интеграл в (2.59) квадратурной суммой

$$\sum_{i=-S}^q A_i f(x_m + \alpha_i h, y(x_m + \alpha_i h)).$$

Тогда на основе (2.59) получим вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h). \quad (2.60)$$

Формула (2.60) содержит $2(q + S + 1)$ неизвестных параметров A_i , α_i . Для их определения потребуем, чтобы разложения

$\Delta y_m = y(x_m + h) - y(x_m)$ и $h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h)$ в ряд по степеням h

имели совпадающие коэффициенты при одинаковых степенях.

Будем иметь:

$$\Delta y_m = h y'(x_m) + \frac{h^2}{2!} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \dots, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m + \alpha_i h) &= h [A_{-S} y'(x_m + \alpha_{-S} h) + \\
&+ A_{-S+1} y'(x_m + \alpha_{-S+1} h) + \dots + A_0 y'(x_m + \alpha_0 h) + \dots + \\
&+ A_q y'(x_m + \alpha_q h)] = h \sum_{i=-S}^q A_i y'(x_m) + h^2 \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i y''(x_m) + \\
&+ \frac{h^3}{2} \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^2 y'''(x_m) + \dots
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=-S}^q A_i = 1; \quad \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i = \frac{1}{2}; \quad \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}$$

и т.д..

Вообще,

$$\sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, 2(q+S+1)-1}. \quad (2.63)$$

Обозначим через $r_{m+1}^{(q,S)}$ погрешность многошаговых вычислительных правил, параметры которых находятся как решение системы (2.63). Она будет включать в себя остаточные члены разложений (2.61), (2.62) и может быть представлена так:

$$\begin{aligned}
r_{m+1}^{(q,S)} &= h^{2(q+S+1)+1} y_{(x_m+\theta h)}^{(2(q+S+1)+1)} \left[\frac{1}{(2(q+S+1)+1)!} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{(2(q+S+1))!} \sum_{i=-S}^q A_i \alpha_i^{(2(q+S+1))} \right], \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned} \quad (2.64)$$

Система (2.63) относительно A_i, α_i является нелинейной. Её можно линеаризовать, положив заранее $\alpha_i = -i$. Такой выбор α_i оправдан тем, что речь идет о построении многошаговых правил, в которых наряду с x_m могут использоваться узлы x_{m-1}, x_{m-2}, \dots , а также x_{m+1}, x_{m+2}, \dots .

Итак, если $\alpha_i = -i$, то для вычисления A_i получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=-S}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, q+S}. \quad (2.65)$$

Погрешность при этом принимает вид:

$$r_{m+1}^{(q,S)} = h^{q+S+2} y_{(x_m+\theta h)}^{(q+S+2)} \left[\frac{1}{(q+S+2)!} - \frac{1}{(q+S+1)!} \sum_{i=-S}^q A_i (-i)^{q+S+1} \right], \quad (2.66)$$

где $0 < \theta < 1$. Заметим, что определитель системы (2.65) есть определитель Вандермонда и, следовательно, система относительно A_i имеет единственное решение.

Рассмотренный метод численного интегрирования задачи Коши для ОДУ был разработан Адамсом в 1855г по просьбе английского баллистика Башфорта [2]. Впоследствии метод был забыт и заново открыт норвежским математиком Штёрмером.

Определение 2. При $S = 0$ вычислительные правила носят название *экстраполяционных формул Адамса* или *явных многошаговых правил Адамса-Башфорта*; при $S = 1$ – *интерполяционных формул Адамса* или *неявных формул Адамса-Моултона*; при $S = 2$ – *формулу типа Коуэлла с забеганием вперед*.

Приведем примеры многошаговых вычислительных правил, придавая S и q различные значения.

2.6.1. Экстраполяционные формулы ($S = 0$)

Случай $q = 0$. Из системы (2.65) определяем $A_0 = 1$. На основе (2.60) получаем *явную формулу Эйлера*

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m); \quad m = \overline{0, N-1},$$

с погрешностью

$$r_{m+1}^{(0,0)} = \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 1$. Теперь заданы $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, а требуется найти A_0 , A_1 из системы:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ A_0 \cdot (0) + A_1 \cdot (-1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем $A_0 = \frac{3}{2}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ и двухшаговое явное вычислительное правило:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [3f_m - f_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (2.67)$$

Чтобы проводить по нему вычисления, кроме y_0 следует знать y_1 . Погрешность правила (2.67) определяется из (2.66) с учетом значений $\alpha_0, \alpha_1, A_0, A_1, q, S$ и имеет вид:

$$r_{m+1}^{(1,0)} = \frac{5}{12} h^3 y^{(3)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

При других значениях q выкладки проводятся аналогично. Приведем без вывода примеры экстраполяционных формул при $q > 1$.

Случай $q = 2$. Имеем $A_0 = \frac{23}{12}$, $A_1 = -\frac{4}{3}$, $A_2 = \frac{5}{12}$ и тогда

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12} [23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}], \quad m = \overline{2, N-1}.$$

Погрешность приведенного правила есть

$$r_{m+1}^{(2,0)} = \frac{3}{8} h^4 y^{(4)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Очевидно, что для проведения расчетов по данному правилу требуется знать y_0, y_1, y_2 – приближенные значения решения в узлах $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$.

Случай $q = 3$. Задаем $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -3$ и находим $A_i, i = \overline{0, 3}$, как решения системы четырех линейных уравнений. В результате получаем вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} (55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}), \quad m = \overline{3, N-1},$$

погрешность которого имеет вид

$$r_{m+1}^{(3,0)} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Чтобы проводить вычисления по представленному правилу, требуется задать приближенные значения решения y_i в узлах $x_i, i = \overline{0, 3}$.

Примеры других явных экстраполяционных формул Адамса можно найти, например, в [9, с. 105-106].

2.6.2. Интерполяционные формулы ($S = 1$)

Множество неявных формул Адамса-Моултона при заданных $\alpha_i = -i$ определяется разнообразием значений коэффициентов A_i , которые получаются из решения СЛАУ:

$$\sum_{i=-1}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{1+j}, \quad j = \overline{0, q+1}. \quad (2.68)$$

Погрешность вычислительных правил следует из (2.66) и представима в виде:

$$r_{m+1}^{(q,1)} = h^{q+3} y^{(q+3)}(x_m + \theta h) \left[\frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!} \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^{q+2} \right]. \quad (2.69)$$

Очевидно, что q может принимать значения $-1, 0, 1, \dots$

Случай $q = -1$. Тогда $A_{-1} = 1$, $\alpha_{-1} = 1$ и

$$y_{m+1} = y_m + hf_{m+1}, \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Получается *неявное одношаговое правило Эйлера* с погрешностью

$$r_{m+1}^{(-1,1)} = -\frac{1}{2} h^2 y^{(2)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 0$. Имеем $\alpha_{-1} = 1, \alpha_0 = 0$, а коэффициенты A_{-1}, A_0 определяются из СЛАУ:

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 = 1, \\ A_{-1} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $A_0 = A_{-1} = \frac{1}{2}$ и

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [f_m + f_{m+1}], \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Построено *одношаговое неявное правило Эйлера* (аналог формулы трапеций) с погрешностью на одном шаге

$$r_{m+1}^{(0,1)} = -\frac{1}{12} h^3 y^{(3)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 1$. Полагаем $\alpha_{-1} = 1, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1$, а A_{-1}, A_0, A_1 определяются как решения СЛАУ из трех уравнений:

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 1; \\ A_{-1} - A_1 = \frac{1}{2}; \\ A_{-1} + A_1 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отсюда находим $A_{-1} = \frac{5}{12}$, $A_0 = \frac{8}{12}$, $A_1 = -\frac{1}{12}$.

Из формулы (2.60) следует вычислительное правило

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1}), \quad m = \overline{1, N-1},$$

с погрешностью

$$r_{m+1}^{(1,1)} = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Случай $q = 2$. Не будем подробно останавливаться на выводе правила в этом случае. Укажем окончательный результат:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}(9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}), \quad m = \overline{2, N-1}.$$

Погрешность имеет вид:

$$r_{m+1}^{(2,1)} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Примеры неявных формул Адамса при других значениях q можно найти, например, в [9, с. 106-107].

Сделаем несколько важных замечаний относительно использования формул Адамса в практических расчетах:

1) Как следует из приведенных выше выкладок, счет в явных и неявных формулах Адамса следует начинать с $m = q$. При этом кроме y_0 требуется знать y_1, y_2, \dots, y_q . Недостающие значения y_i , $i = \overline{1, q}$, можно получить любым одношаговым методом. Однако желательно выбрать правило, согласованное по точности с формулами Адамса.

2) Интерполяционные формулы Адамса не дают явного выражения для y_{m+1} . Для проведения вычислений по интерполяционным формулам требуется сначала задать $y_{m+1}^{[0]}$ — начальное значение решения в точке x_{m+1} . Его можно найти,

например, по явной экстраполяционной формуле Адамса («прогноз»), а затем по неявной формуле уточнить («коррекция»). Вычислительный процесс тогда приобретает характер «предиктор-корректор», причем, коррекцию можно проводить не один раз, а до получения заданной точности. Рекомендуется использовать явные и неявные формулы Адамса одного порядка точности.

3) Так как при $q \geq 1$ исходных данных в поставленной задаче недостаточно для корректного проведения расчетов, то формулы Адамса относят к классу некорректно поставленных задач. Однако замеченный недостаток легко исправляется с помощью одношаговых методов.

4) Формулы Адамса легко обобщаются на системы ОДУ и положены в основу стандартных программ для ЭВМ (с автоматическим выбором шага интегрирования h).

2.6.3. Многошаговые правила с забеганием вперед ($S = 2$)

Построим *многошаговое правило типа Коуэлла* [3, с.85-93] при $S = 2$ и $q = 1$, воспользовавшись изложенной выше теорией.

Полагая $\alpha_i = -i$, $i = \overline{-2, q}$, коэффициенты A_i из формулы (5.60) определяем как решения следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 = 1; \\ 2A_{-2} + A_{-1} - A_1 = \frac{1}{2}; \\ 4A_{-2} + A_{-1} + A_1 = \frac{1}{3}; \\ 8A_{-2} + A_{-1} - A_1 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Из нее получаем: $A_0 = \frac{13}{24}$, $A_1 = -\frac{1}{24}$, $A_{-1} = \frac{13}{24}$, $A_{-2} = -\frac{1}{24}$.

Следовательно, *вычислительное правило типа Коуэлла с забеганием вперед* имеет вид:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24} (-f_{m+2} + 13f_{m+1} + 13f_m - f_{m-1}), \quad m = \overline{1, N-2}. \quad (2.70)$$

Погрешность построенного правила следует из (5.66):

$$r_{m+1}^{(1,2)} = \frac{11}{720} h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.71)$$

Очевидно, что явного выражения для значения y_{m+1} через известные значения не получилось. Однако, в построенной формуле (2.70) используется информация о решении, которая симметрично расположена относительно отрезка $[x_m, x_{m+1}]$. Этот факт благоприятно сказывается на точности: в выражении погрешности коэффициент при $h^5 y^{(5)}(x_m + \theta h)$ оказался меньше по модулю, чем в формулах Адамса порядка точности $O(h^5)$. В формуле (2.70) вычисляемое значение y_{m+1} выражается через значения $y_m, y_{m\pm 1}$ и y_{m+2} . Чтобы использовать построенное правило в расчетах, требуется специальная организация вычислений. Она может быть, например, такой:

1) счет в формуле (2.70) начинаем с $m = 1$, вычислив с помощью одношаговых методов значение y_1 ;

2) по экстраполяционной формуле Адамса при $q = 1$ вычисляем

$$y_2^{[1]} = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

с точностью $O(h^3)$, где $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$;

3) по интерполяционной формуле Адамса ($q = 1$) уточняем значение

$$y_2^{[2]} = y_1 + \frac{h}{12}(5f_2^{[1]} + 8f_1 - f_0)$$

с точностью $O(h^4)$. Здесь $f_2^{[1]} = f(x_2, y_2^{[1]})$, $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$;

4) по экстраполяционной формуле Адамса ($q = 2$) находим значение

$$y_3^{[1]} = y_2^{[2]} + \frac{h}{12}(23f_2^{[2]} - 16f_1 + 5f_0)$$

с погрешностью $O(h^4)$, где $f_2^{[2]} = f(x_2, y_2^{[2]})$;

5) по формуле (2.70) получаем значение в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{24}(-f_3^{[1]} + 13f_2^{[2]} + 13f_1 - f_0)$$

с погрешностью $O(h^5)$. При этом $f_3^{[1]} = f(x_3, y_3^{[1]})$.

Заметим, что вычисления можно организовать и по-другому [3, с.89-93]. Здесь описаны действия для получения значения решения в одной точке. Чтобы найти значения решения в других точках, требуется многократно повторить действия со 2-го по 5-ый пункты.

2.6.4. Метод Милна

Метод Милна [2, с.168-181], [9, с.109-110] прост и практически удобен при численном интегрировании задачи Коши для ОДУ первого порядка и систем таких уравнений. Проведем рассмотрение метода на примере одного уравнения (2.58) в случае равномерной сетки с шагом $h > 0$. Будем считать, что каким-либо одношаговым методом получен начальный отрезок решения-значения y_0, y_1, y_2, y_3 . Тогда известны $y'_i, i = 0, 1, 2, 3$.

С помощью конечных разностей до третьего порядка включительно запишем первую интерполяционную формулу Ньютона [8] для производной y' . Будем иметь:

$$y'(t) = y'_k + t\Delta y'_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y'_k + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y'_k, \quad (2.72)$$

где $t = \frac{x - x_k}{h}$, $x_k \in \bar{\omega}_h$ – подходящая точка.

Положим в (2.72) $k = m - 4$ и почленно проинтегрируем в пределах от x_{m-4} до x_m . Получим:

$$\int_{x_{m-4}}^{x_m} y' dx = \int_{x_{m-4}}^{x_m} \left[y'_{m-4} + t\Delta y'_{m-4} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y'_{m-4} \right] dx.$$

Так как $t = \frac{x - x_{m-4}}{h}$, $dx = hdt$, то отсюда находим:

$$\begin{aligned} y_m - y_{m-4} &= h \left[y'_{m-4} \int_0^4 dt + \Delta y'_{m-4} \int_0^4 t dt + \Delta^2 y'_{m-4} \int_0^4 \frac{t^2 - t}{2} dt + \right. \\ &\quad \left. + \Delta^3 y'_{m-4} \int_0^4 \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6} dt \right] = \\ &= h \left[4y'_{m-4} + 8\Delta y'_{m-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{m-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{m-4} \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}\Delta y'_{m-4} &= y'_{m-3} - y'_{m-4}, \\ \Delta^2 y'_{m-4} &= y'_{m-2} - 2y'_{m-3} + y'_{m-4}, \\ \Delta^3 y'_{m-4} &= y'_{m-1} - 3y'_{m-2} + 3y'_{m-3} - y'_{m-4}.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в формулу (2.73) и после преобразований получим *первую формулу Милна*:

$$y_m = y_{m-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{m-3} - y'_{m-2} + 2y'_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N. \quad (2.74)$$

Здесь $y'_{m-i} = f(x_{m-i}, y_{m-i})$, $i = 1, 2, 3$.

На основе формулы (2.72), полагая $k = m - 2$, построим *вторую формулу Милна*, интегрируя по x обе части получившегося выражения в пределах от x_{m-2} до x_m . Будем иметь

$$\int_{x_{m-2}}^{x_m} y' dx = h \int_0^2 \left[y'_{m-2} + t \Delta y'_{m-2} + \frac{t^2 - t}{2} \Delta^2 y'_{m-2} + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6} \Delta^3 y'_{m-2} \right] dt,$$

т.к. $t = \frac{x - x_{m-2}}{h}$, $dx = h dt$.

После вычислений интегралов отсюда находим:

$$y_m - y_{m-2} = h \left(2y'_{m-2} + 2\Delta y'_{m-2} + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{m-2} \right). \quad (2.75)$$

Так как по определению конечных разностей

$$\begin{aligned}\Delta y'_{m-2} &= y'_{m-1} - y'_{m-2}, \\ \Delta^2 y'_{m-2} &= \Delta y'_{m-1} - \Delta y'_{m-2} = y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2},\end{aligned}$$

то, подставляя эти соотношения в формулу (2.75), выводим *вторую формулу Милна*:

$$y_m = y_{m-2} + \frac{h}{3}(y'_{m-2} + 4y'_{m-1} + y'_m), \quad m = 2, 3, \dots, N. \quad (2.76)$$

Оценим главные члены погрешностей $\varepsilon_m^{[1]}$ и $\varepsilon_m^{[2]}$ первой и второй формул Милна. Учтем, что в формуле (5.72) были отброшены конечные разности четвертого и более высокого порядка. Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^{[1]} &\approx h \int_0^4 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y'_{m-4} dt = \\ &= h \int_0^4 \frac{1}{24} (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \Delta^4 y'_{m-4} dt = \frac{28}{90} h \Delta^4 y'_{m-4},\end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_m^{[2]} \approx h \int_0^2 \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24} \Delta^4 y'_{m-2} dt = -\frac{h}{90} \Delta^4 y'_{m-2}. \quad (2.78)$$

Примем, что конечная разность $\Delta^4 y'_m$ постоянна на интервале длины $4h$. Тогда получим

$$\varepsilon_m^{[1]} = -28\varepsilon_m^{[2]}.$$

Формулы (2.74) и (2.76) в расчетах будем использовать вместе, предсказывая $y_m^{[1]}$ по формуле (2.74), а затем уточняя $y_m^{[1]}$ по формуле (2.76) (получается значение $y_m^{[2]}$). Очевидно, что

$$y_m = y_m^{[1]} + \varepsilon_m^{[1]} = y_m^{[1]} - 28\varepsilon_m^{[2]}$$

и

$$y_m = y_m^{[2]} + \varepsilon_m^{[2]}.$$

Тогда

$$y_m^{[2]} + \varepsilon_m^{[2]} = y_m^{[1]} - 28\varepsilon_m^{[2]}$$

и

$$\varepsilon_m^{[2]} = \frac{y_m^{[1]} - y_m^{[2]}}{29}. \quad (2.79)$$

Получена *контрольная формула Милна*:

$$|\varepsilon_m| = \frac{|y_m^{[1]} - y_m^{[2]}|}{29}$$

Можно доказать, что суммарная ошибка метода Милна есть величина порядка h^4 .

В самом деле, если шаг h достаточно мал, то можно принять

$$\frac{\Delta^4 y'_m}{h^4} \approx (y')''''_{x_m} = y^{(5)}(x_m).$$

Из формул (2.77), (2.78) следует, что предельная абсолютная погрешность на $[a, b]$ приближенного решения $y_m \approx y(x_m)$,

$m = \overline{0, N}$, выражается формулой:

$$E = \frac{h^5}{90} M_5 N = \frac{b-a}{90} h^4 M_5,$$

где $M_5 = \max_{x \in [a, b]} |y^{(5)}(x)|$.

Обсудим теперь алгоритм вычислений по формулам Милна (2.74), (2.76).

Он состоит в следующем:

1) зная y_0 , по какой-либо формуле для одношаговых методов находим y_1, y_2, y_3 . Это может быть метод Рунге-Кутты третьего или четвертого порядка точности;

2) вычисляем $y_m^{[1]}$, $m = 4, 5, \dots$, по первой формуле Милна

$$y_m^{[1]} = y_{m-4} + \frac{4h}{3}(2f_{m-3} - f_{m-2} + 2f_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N,$$

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad i = m-3, m-2, m-1;$$

3) найденное значение $y_m^{[1]}$ подставляем в исходное уравнение и находим

$$y_m'^{[1]} = f(x_m, y_m^{[1]}) \equiv f_m;$$

4) по второй формуле Милна получаем $y_m^{[2]}$:

$$y_m^{[2]} = y_{m-2} + \frac{h}{3}(f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m), \quad m = 4, 5, \dots, N;$$

5) вычисляем

$$\varepsilon_m = \frac{1}{29} |y_m^{[2]} - y_m^{[1]}|.$$

Если $\varepsilon_m \leq \varepsilon$, где ε – принятая точность вычислений, то полагаем

$$y_m \approx y_m^{[2]}, \quad y_m' \approx f(x_m, y_m^{[2]})$$

и переходим к следующей точке сетки. Если $\varepsilon_m > \varepsilon$ и точность не достигнута, следует уменьшить шаг h . При этом потребуются пересчитать начальные значения y_1, y_2, y_3 , что можно отнести к недостаткам метода Милна.

Отметим, что метод Милна без особых проблем, так же как и методы Адамса, обобщается на случай задачи Коши для систем ОДУ.

В самом деле, пусть речь идет о решении системы ОДУ нормального вида:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \quad x \in [a, b],$$

$$\text{где } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

При этом поставлена задача Коши: найти решение $\bar{y} = \bar{y}(x)$, удовлетворяющее указанной системе ОДУ первого порядка и начальному условию:

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0, \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{pmatrix} - \text{задано.}$$

Все многошаговые методы, рассмотренные выше для одного уравнения первого порядка, переносятся на системы ОДУ первого порядка, если в соответствующих формулах заменить $y(x)$ и $f(x, y)$ на $\bar{y}(x)$, $\bar{f}(x, \bar{y}(x))$.

Так, например, явное двухшаговое вычислительное правило (5.67), предназначенное для системы ОДУ первого порядка, будет иметь вид:

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \frac{h}{2} [3\bar{f}_m - \bar{f}_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1},$$

где

$$\bar{y}_m = \begin{pmatrix} y_{1,m} \\ y_{2,m} \\ \dots \\ y_{n,m} \end{pmatrix}, \bar{f}_m = \begin{pmatrix} f_1(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \\ f_1(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y_{1,m}, \dots, y_{n,m}) \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно записать двухшаговое неявное правило Адамса:

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + \frac{h}{12} [5\bar{f}_{m+1} + 8\bar{f}_m - \bar{f}_{m-1}], \quad m = \overline{1, N-1}.$$

В случае систем ОДУ первого порядка первая и вторая формулы Милна примут вид:

$$\bar{y}_m = \bar{y}_{m-4} + \frac{4h}{3} (2\bar{f}_{m-3} - \bar{f}_{m-2} + 2\bar{f}_{m-1}), \quad m = 4, 5, \dots, N,$$

$$\bar{f}_{m-i} = f(x_{m-i}, \bar{y}_{m-i}), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\bar{y}_m = \bar{y}_{m-2} + \frac{h}{3} (\bar{f}_{m-2} + 4\bar{f}_{m-1} + \bar{f}_m), \quad m = 2, 3, \dots, N.$$

Пример 9. Методом Милна найти численное решение задачи Коши:

$$y' = x + y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0) = 1.$$

Решение. Для численного решения поставленной задачи воспользуемся формулами (2.74), (2.76). Выберем $h = 0,1$ и на $[0, 1]$ зададим равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = i \cdot h, i = \overline{0, 10}, h = 0,1\}.$$

С помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [13] построим начало таблицы:

$$y_0 = 1;$$

$$y_1 = 1,11034;$$

$$y_2 = 1,24280;$$

$$y_3 = 1,39971.$$

Дальнейшие вычисления проводим по формулам (2.74), (2.76) согласно описанному выше алгоритму: по первой формуле Милна значения предсказываем, а по второй – уточняем, требуя, чтобы

$$\varepsilon_m \leq \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = 10^{-3}, \quad \varepsilon_m = \frac{1}{29} |y_m^{[2]} - y_m^{[1]}|, \quad m = 4, 5, \dots, 10.$$

Все вычисления помещены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

m	x_m	y_m	Погрешность
0	0	1,00000	0
1	0,1	1,11034	$0,17 \cdot 10^{-6}$
2	0,2	1,24280	$0,37 \cdot 10^{-6}$
3	0,3	1,39971	$0,62 \cdot 10^{-6}$
4	0,4	1,58364	$0,43 \cdot 10^{-6}$
5	0,5	1,79744	$0,66 \cdot 10^{-6}$
6	0,6	2,04423	$0,50 \cdot 10^{-6}$
7	0,7	2,32750	$0,71 \cdot 10^{-6}$
8	0,8	2,65108	$0,56 \cdot 10^{-6}$
9	0,9	3,01920	$0,76 \cdot 10^{-6}$
10	1,0	3,43656	$0,62 \cdot 10^{-6}$

В последнем столбце табл. 2.4 представлена погрешность-разность между численным и аналитическим решением – в узлах сетки, взятая по модулю. Точное решение поставленной задачи имеет вид:

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Как следует из таблицы, погрешность не превосходит 10^{-5} , причем, эта точность достигается всего за 1 итерацию.

Пример 10. Экстраполяционным методом Адамса продолжить таблицу значений решения, полученного с помощью одношагового метода Рунге-Кутты при численном решении задачи Коши для следующей системы ОДУ:

$$\begin{cases} w' = z - \cos x, \\ z' = w + \sin x, \quad x \in [0, 1]; \\ w(0) = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases}$$

Используя интерполяционный метод Адамса, уточнить с заданной точностью ε значения решения, найденные экстраполяционным методом Адамса.

Решение. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ первого порядка. Ищется вектор-функция $\bar{y}(x)$, удовлетворяющая системе ОДУ нормального вида

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)), \quad x \in [a, b],$$

и начальному условию

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0,$$

где

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

$$\bar{f} = (f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n))^T.$$

Для определения численного решения задачи Коши воспользуемся вышеприведенными формулами метода Рунге-Кутты ($q = 4$), явного и неявного методов Адамса ($q = 2$), записав их для случая системы двух ОДУ ($n = 2$). Выбирая шаг сетки $h = 0,1$, покроем промежуток $[a, b] = [0, 1]$ равномерной сеткой

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = i \cdot h, i = \overline{0, 10}, h = 0, 1\}.$$

Запишем метод Рунге-Кутты для случая $q = 4$, $n = 2$:

$$w_{i+1} = w_i + \Delta w_i, \quad \Delta w_i = \frac{h}{6}(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i),$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad \Delta z_i = \frac{h}{6}(\xi_1^i + 2\xi_2^i + 2\xi_3^i + \xi_4^i),$$

где

$$\eta_1^i = f_1(x_i, w_i, z_i), \quad \xi_1^i = f_2(x_i, w_i, z_i),$$

$$\eta_2^i = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_1^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_1^i\right), \quad \xi_2^i = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_1^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_1^i\right),$$

$$\eta_3^i = f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_2^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_2^i\right),$$

$$\xi_3^i = f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}\eta_2^i, z_i + \frac{h}{2}\xi_2^i\right),$$

$$\eta_4^i = f_1(x_i + h, w_i + h\eta_3^i, z_i + h\xi_3^i), \quad \xi_4^i = f_2(x_i + h, w_i + h\eta_3^i, z_i + h\xi_3^i).$$

$$f_1(x, w, z) = z - \cos x, \quad f_2(x, w, z) = w - \sin x.$$

Экстраполяционный метод Адамса (явный, случай $q = 2$) имеет вид:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} (23f_{1,i} - 16f_{1,i-1} + 5f_{1,i-2}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{12} (23f_{2,i} - 16f_{2,i-1} + 5f_{2,i-2}), \quad i = \overline{2, N-1}, \quad N = 10,$$

причем

$$f_{k,i} = f_k(x_i, w_i, z_i), \quad k = 1, 2.$$

Погрешность метода оценивается по следующей формуле:

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,0)} = \frac{3}{8} h^4 \bar{y}^{-(4)}(x_i + \theta \cdot h), \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{где } \bar{y} = (w, z)^T;$$

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,0)} = (r_{1,i+1}^{(2,0)}, r_{2,i+1}^{(2,0)})^T.$$

Интерполяционный метод Адамса (случай $q = 2$) рассматривается в виде:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} (9f_{1,i+1} + 19f_{1,i} - 5f_{1,i-1} + f_{1,i-2}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{24} (9f_{2,i+1} + 19f_{2,i} - 5f_{2,i-1} + f_{2,i-2}), \quad i = \overline{2, N-1},$$

а погрешность метода равна

$$\bar{r}_{i+1}^{-(2,2)} = -\frac{19}{720} h^5 \bar{y}^{-(5)}(x_i + \theta \cdot h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Вычисления по обеим формулам Адамса начинаются с $i = q = 2$, причем для проведения расчетов кроме начального значения $\bar{y}_0 = (w_0, z_0)^T$ требуется задать «начальный отрезок» значений \bar{y}_1, \bar{y}_2 . Недостающие значения $\bar{y}_i = (w_i, z_i)^T, i = 1, 2$, можно определить с помощью любого одношагового метода. Например, воспользуемся вышеприведенным методом Рунге-Кутты ($q = 4$) и определим значения решения для нашей системы (табл. 2.5):

Таблица 2.5

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,0000000	0,00000000
1	0,1	-0,0998334	0,00000000
2	0,2	-0,1986693	0,00000001
3	0,3	-0,2955201	0,00000002
4	0,4	-0,3894182	0,00000004
5	0,5	-0,4794254	0,00000006
6	0,6	-0,5646423	0,00000009
7	0,7	-0,6442175	0,00000012
8	0,8	-0,7173559	0,00000016
9	0,9	-0,7833267	0,00000020
10	1,0	-0,8414708	0,00000025

Проверка полученных результатов на достоверность проводилась с помощью процедуры rkfixed в Mathcad 8. Результаты работы процедуры помещены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

i	x_i	y_i	z_i
0	0	0	0
1	0,1	-0,0998334	$-1,0417183 \cdot 10^{-9}$
2	0,2	-0,1986693	$-7,6195823 \cdot 10^{-9}$
3	0,3	-0,2955201	$-1,9681726 \cdot 10^{-8}$
4	0,4	-0,3894182	$-3,7177137 \cdot 10^{-8}$
5	0,5	-0,4794254	$-6,0056861 \cdot 10^{-8}$
6	0,6	-0,5646423	$-8,8275752 \cdot 10^{-8}$
7	0,7	-0,6442175	$-1,2179476 \cdot 10^{-7}$
8	0,8	-0,7173559	$-1,6058374 \cdot 10^{-7}$
9	0,9	-0,7833267	$-2,0462483 \cdot 10^{-7}$
10	1,0	-0,8414708	$-2,5391631 \cdot 10^{-7}$

В пределах точности $\varepsilon = 10^{-5}$ результаты совпадают. Выбираем «начальный отрезок» из табл. 2.5:

$$w_0 = 0, z_0 = 0, w_1 = -0,0998334,$$

$$z_1 = 0, w_2 = -0,1986693, z_2 = 0.$$

Воспользуемся явным методом Адамса. В результате получим решение, помещенное в табл. 2.7:

Таблица 2.7

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,000000	0,000000
1	0,1	-0,099833	0,000000
2	0,2	-0,198669	0,000000
3	0,3	-0,295515	0,000000
4	0,4	-0,389404	0,000001
5	0,5	-0,479398	0,000003
6	0,6	-0,564598	0,000007
7	0,7	-0,644153	0,000012
8	0,8	-0,717268	0,000020
9	0,9	-0,783211	0,000030
10	1,0	-0,841323	0,000043

Интерполяционный (неявный) метод Адамса, примененный для коррекции результатов, полученных по явному методу с начальным отрезком

$$w_0 = 0, w_1 = -0,099833, w_2 = -0,198670, w_3^{(0)} = -0,295515,$$

$$z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3^{(0)} = 0$$

и с точностью $\varepsilon = 0,00001$, дает результаты за 1 итерацию (табл. 2.8).

Таблица 2.8

I	x_i	y_i	z_i
0	0,0	0,000000	0,000000
1	0,1	-0,099833	0,000000
2	0,2	-0,198670	0,000000
3	0,3	-0,295521	0,000000
4	0,4	-0,389420	0,000000
5	0,5	-0,479427	0,000000
6	0,6	-0,564644	0,000000
7	0,7	-0,644220	0,000001
8	0,8	-0,717358	0,000001
9	0,9	-0,783329	0,000001
10	1,0	-0,841474	0,000001

2.6.5. Два подхода к исследованию устойчивости одношаговых и многошаговых методов

Остановимся на устойчивости численных методов решения задачи Коши для одного уравнения. Рассмотрим m -шаговое семейство линейных методов

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}), \quad (2.80)$$

где $i = m, m+1, \dots$, решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), x \in [a, b], \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Отметим, что для решения задачи (2.81) с помощью одного из методов (2.80) необходимо задать начальные значения $y_0, y_1, \dots,$

y_{m-1} .

Исследование устойчивости многошаговых методов осуществляется с помощью двух подходов. Первый – *упрощенный подход*, автором которого является шведский математик Дальквист, предложивший его в 50-х годах XX века. Суть подхода состоит в том, что нелинейное разностное уравнение, которое аппроксимирует ОДУ (2.81), само, в свою очередь,

аппроксимируется однородным линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$z_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j z_{i+1-j}. \quad (2.82)$$

Уравнение (2.82) получается из (2.80) отбрасыванием второго слагаемого в правой части, поскольку сходимость численного метода исследуется при условии $h \rightarrow 0$. Наличие множителя во втором слагаемом в (2.80) показывает, что это слагаемое играет незначительную роль, если функция f ограничена.

Как известно [7], поведение решения z_i разностного уравнения (2.82) и его свойства, в том числе аппроксимационные по отношению к ОДУ (2.81), непосредственно связаны с величинами корней характеристического уравнения

$$\lambda^m - \alpha_1 \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_{m-1} \lambda - \alpha_m = 0, \quad (2.83)$$

через которые можно выразить фундаментальные решения уравнения (2.82) и такого же уравнения для ошибок [12]. Дадим важное определение.

Определение 3. Говорят, что метод (2.80) удовлетворяет *условию корней*, если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ характеристического уравнения (2.83) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе единичного круга нет кратных корней [7, с.234].

Разностный метод (2.80), удовлетворяющий условию корней, называется *устойчивым методом*. Существует определенное ограничение на порядок аппроксимации устойчивого метода.

Приведем без доказательства следующую теорему [7].

Теорема 1. Пусть метод (2.80) удовлетворяет условию корней и имеет порядок аппроксимации p . Тогда $p \leq m + 1$ при m нечетном и $p \leq m + 2$ при m четном. Для явных m -шаговых устойчивых методов порядок аппроксимации не превосходит m .

Теорема 2. Пусть метод (2.80) удовлетворяет условию корней и $|f'_y(x, y)| \leq L$ при $a \leq x \leq b$. Тогда при $mh \leq x_n = nh \leq b$, $n \geq m$ и всех достаточно малых h выполнена оценка

$$|y_n - y(x_n)| \leq M \left(\max_{0 \leq j \leq N-1} |y_j - y(x_j)| + \max_{0 \leq k \leq n-N} |\psi_k| \right),$$

где ψ_k – погрешность аппроксимации, $y_j - y(x_j)$, $j = \overline{0, N-1}$, – погрешности в задании начальных условий и M – константа, зависящая от L, b , и не зависящая от n .

Доказательство теоремы 2 приведено в [7, с.245-247]. В довершение к сказанному выше, отметим, что если $m-1$ корней уравнения (2.83) по модулю меньше единицы, то *метод* (2.80) называется *строго устойчивым* или *сильно устойчивым* [12].

С помощью данного определения можно достаточно грубо оценивать устойчивость или неустойчивость методов, т.к. в этом определении не учитывается второе слагаемое из (2.80).

Применим введенное определение устойчивости к соответствующим одношаговым и многошаговым методам.

Пример 11. Рассмотрим явный и неявный метод Эйлера:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), \quad j = \overline{0, N-1}; \quad (2.84)$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_{j+1}, y_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (2.85)$$

Для них характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda - 1 = 0,$$

и $\lambda = 1$ – единственный корень характеристического уравнения.

Следовательно, эти методы устойчивы по Дальквисту.

Пример 12. Рассмотрим экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \sum_{i=0}^m \beta_i f(x_{j+1-i}, y_{j+1-i}), \quad j = m-1, m. \quad (2.86)$$

Характеристическое уравнение для метода Адамса имеет вид

$$\lambda^m - \lambda^{m-1} = 0.$$

Один корень этого уравнения равен 1, а остальные $m-1$ корней равны нулю. Следовательно, по теореме 1 метод Адамса строго устойчив по Дальквисту.

Аналогичное утверждение имеет место для метода Коуэлла.

Пример 13. Исследуем метод Милна четвертого порядка:

$$\tilde{y}_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4h}{3}(2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}), \quad (2.87)$$

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3}(\tilde{f}_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}). \quad (2.88)$$

Метод двухшаговый: первый шаг (2.87) – «прогноз», второй шаг (2.88) – «коррекция». Первая из формул является четырехшаговой и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. В силу двухшаговости формулы (2.88) характеристическое уравнение будет второй степени:

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Корни его $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Обе формулы определяют разностный метод, устойчивый по Дальквисту, но не строго устойчивый.

Второй подход исследования устойчивости численных методов обычно проводится на модельном уравнении вида $y' = p \cdot y$ (p – параметр как вещественный, так и мнимый) и базируется на сведениях о решении линейных разностных уравнений m -го порядка с постоянными коэффициентами вида [12, с.594-596]:

$$y_{j+1} = \alpha_1 y_j + \alpha_2 y_{j-1} + \dots + \alpha_m y_{j+1-m}. \quad (2.89)$$

Исследуем устойчивость метода Эйлера

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = 0, N-1, \quad (2.90)$$

$$y(a) = y_0$$

решения задачи Коши (2.81).

Метод Эйлера на модельном уравнении ($f(x, y) = p \cdot y$) запишется следующим образом:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot p \cdot y_j. \quad (2.91)$$

Введем обозначение

$$\delta_j = y(x_j) - y_j, \quad (2.92)$$

где $y(x_j)$ – значение точного решения задачи (2.81) в узле x_j , y_j – решение, полученное методом Эйлера в том же узле.

Предположим, что $y(x)$ и $f(x, y(x))$ обладают достаточной гладкостью и выполнены следующие условия [12, с.592-593]:

$|f'_y(x, y(x))| \leq c_1$, $|y''(x)| \leq c_2$ для любого $x \in [a, b]$, $c_1, c_2 > 0$ – произвольные константы.

Разложим функцию $y(x_{j+1})$ в точке x_j по формуле Тейлора:

$$y(x_j + h) = y(x_j) + y'(x_j)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2,$$

где $\xi \in (x_j, x_{j+1})$. Полученный результат используем в следующей формуле:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} = y(x_j) + y'(x_j)h + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2 - y_j - \\ - h f(x_j, y_j) = \delta_j + h \left[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j) \right] + \quad (2.93) \\ + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2. \end{aligned}$$

Применим к разности функций в квадратных скобках формулу конечных приращений Лагранжа по второму аргументу и получим:

$$\delta_{j+1} = \delta_j + h f'_y(x_j, y_j) \delta_j + \frac{1}{2}y''(\xi)h^2.$$

Так как для модельного уравнения $f(x, y) = p \cdot y$, то последнее соотношение переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} = (1 + ph) \delta_j + O(h^2), \quad j = \overline{0, N-1}, \\ \delta_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Второе слагаемое в (2.94) связано с погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения (2.81) разностной схемой (2.90). Влиянием этого члена на устойчивость метода Эйлера можно пренебречь. Характеристическое уравнение (2.83) [12, с.595] при $m = 1$ имеет вид $\lambda = \alpha_1$. Отсюда его единственным корнем будет $\lambda = 1 + p \cdot h$. Запишем фундаментальное решение [12, с.596]

$$\Delta_j = (1 + p \cdot h)^j \quad (2.95)$$

соответствующего однородного уравнения

$$\delta_{j+1} = (1 + p \cdot h) \delta_j.$$

По аналогии с формулой (16.29) из [12, с.596] частным решением неоднородного уравнения (2.94) будет

$$\bar{\delta}_j = \frac{O(h^2)}{1 - (1 + p \cdot h)} = O(h). \quad (2.96)$$

Тогда ошибка, накопленная к $(j+1)$ -му шагу по методу Эйлера (2.91), будет иметь вид:

$$\delta_j = C \cdot (1 + p \cdot h)^j + O(h), \quad (2.97)$$

причем, $C = \delta_0 - O(h)$, $\delta_0 = y(x_0) - y_0$. При $j \rightarrow +\infty$ δ_j будет ограниченной величиной, если будет справедливо неравенство:

$$|1 + p \cdot h| \leq 1. \quad (2.98)$$

Очевидно, что при $p > 0$ неравенство (2.98) не будет выполняться ни при каких $h > 0$.

Если $p < 0$, неравенство (2.98) запишется так:

$$|1 - |p| \cdot h| \leq 1 \text{ или } -1 \leq 1 - |p| \cdot h \leq 1.$$

Вначале рассмотрим неравенство $1 - |p| \cdot h \leq 1$. Оно справедливо при любом $h > 0$. Далее имеем:

$$-1 \leq 1 - |p| \cdot h \text{ или } |p| \cdot h \leq 2, \text{ или } h \leq \frac{2}{|p|}, \text{ или } h \leq -\frac{2}{p}.$$

Итак, метод Эйлера устойчив на модельном уравнении, если в этом уравнении $p < 0$, а шаг сетки удовлетворяет условию

$$h \leq -\frac{2}{p}.$$

В силу последнего неравенства метод Эйлера относится к *условно устойчивым методам*.

Исследуем устойчивость неявного метода Эйлера (2.85). На модельном уравнении метод имеет следующий вид:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot p y_{j+1}. \quad (2.99)$$

Используя ранее введенное обозначение (2.92), запишем разностное уравнение, которому удовлетворяет δ_j :

$$\delta_{j+1} = \frac{\delta_j}{1 - ph} + \frac{O(h^2)}{1 - ph}. \quad (2.100)$$

С учетом того, что $\lambda = \frac{1}{1 - ph}$, решение уравнения (2.100) может быть записано в виде:

$$\delta_j = C \cdot \lambda^j + \frac{O(h^2)}{(1 - ph) \left(1 - \frac{1}{1 - ph}\right)} = C \left(\frac{1}{1 - ph} \right)^j + O(h).$$

Из последнего выражения для δ_j видно, что погрешность с увеличением j не будет возрастать, если будет справедливо неравенство

$$\frac{1}{|1 - ph|} \leq 1. \quad (2.101)$$

Неравенство (2.101) равносильно неравенству

$$|1 - ph| \geq 1 \quad (2.102)$$

при условии, что $1 \neq ph$. Проведем анализ неравенства (2.101). Если $p < 0$, (2.101) будет справедливо при любых значениях $h > 0$. Это значит, что в этом случае неявный метод Эйлера будет *абсолютно устойчивым*. Для значений $p > 0$ погрешность δ_j будет ограниченной величиной при выполнении следующего неравенства:

$$h \geq \frac{2}{p}.$$

В заключение сделаем важное замечание.

Замечание. Вышеизложенные подходы к исследованию устойчивости численных методов для одного ОДУ легко обобщаются на случай системы ОДУ. Для этого вместо заданной системы ОДУ рассматривают модельное уравнение вида $y' = py$. Чтобы это уравнение моделировало систему ОДУ, необходимо его рассматривать при всех p , являющихся собственными значениями матрицы Якоби

$$A = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right).$$

2.7. Лабораторные задания

Задание. Применяя одношаговые и многошаговые численные методы, найти решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.

Варианты заданий

Вариант №1.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \\ y(0) &= 0, 4; \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Вариант №2.

$$\begin{aligned}y' &= \cos(x + y), \\ y(0) &= 0, 4; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №3.

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №4.

$$\begin{cases} y' = x^2 + z, \\ z' = y - z, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №5.

$$\begin{cases} y' = z^2 + x, \\ z' = xy, \end{cases} \\ y(0) = 1; \quad z(0) = -0, 5; \quad x \in [0, 1].$$

Вариант №6.

$$\begin{aligned}y' &= e^{-x} - y, \\ y(0) &= 1; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №7.

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{x} + y, \\ y(0) &= 1; \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №8.

$$\begin{aligned}y' &= y \sin(x) + x, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №9.

$$\begin{aligned}y' &= y \cos(x) + x, \\y(0) &= 0, 1; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №10.

$$\begin{cases}y' = x + y + z, \\z' = y - z;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = -1; x \in [0, 1].$$

Вариант №11.

$$\begin{cases}y' = xy + z, \\z' = y + xz;\end{cases} \\y(0) = 0; z(0) = 0, 5; x \in [0, 1].$$

Вариант №12.

$$\begin{cases}y' = x^2 - z, \\z' = y + x;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$$

Вариант №13.

$$\begin{cases}y' = y - z, \\z' = yz;\end{cases} \\y(0) = 0, 5; z(0) = 0; x \in [0, 1].$$

Вариант №14.

$$\begin{aligned}y' &= 2y - 3x^2 - 2, \\y(0) &= 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №15.

$$\begin{aligned}y' &= x + y\sqrt{x}, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №16

$$\begin{aligned}y' &= 1 + 0, 2y \sin(x) - y^2, \\y(0) &= 0, 2; x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Вариант №17.

$$\begin{cases}y' = -xz, \\z' = \frac{y}{x};\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 0; x \in [0, 1].$$

Вариант №18.

$$\begin{cases}y' = (y + z)x, \\z' = (-y + z)x;\end{cases} \\y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$$

Вариант №19.

$$\begin{cases}y' = -yz + \frac{\cos(x)}{x}, \\z' = -z^2 + \frac{2, 5x}{1 + x^2};\end{cases} \\y(0) = 0; z(0) = -0, 2; x \in [0, 1].$$

Вариант №20.

$$\begin{cases} y' = z - (2y + 0,25z)y, \\ z' = e^y - (2 + 2z)y; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №21.

$$y' = x \ln(y) + y \ln(x),$$
$$y(1) = 1; x \in [1,6].$$

Вариант №22.

$$y' = e^x - y,$$
$$y(0) = 0; x \in [0,2].$$

Вариант №23.

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$y(1) = 0,5; x \in [1,2].$$

Вариант №24.

$$\begin{cases} y' = z + 0,5, \\ z' = y - x; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №25.

$$y' = y \sin(x) - y^2,$$
$$y(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №26.

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 2, \\ z' = \frac{2}{x + 6y^2} + x + 1; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,1; z(0) = 0,5; x \in [0,1].$$

Вариант №27.

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2) + y + z, \\ z' = x + y - z^2 + 1; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5; z(0) = 1; x \in [0,1].$$

Вариант №28

$$\begin{cases} y' = \ln(2x + z), \\ z' = \sqrt{4x^2 + y^2}; \end{cases}$$
$$y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0,4].$$

Вариант №29.

$$y' = \frac{\cos(x)}{1 + y^2},$$
$$y(0) = 0; x \in [0,4].$$

Вариант №30.

$$y' = e^{-x}(y^2 + 1,04),$$
$$y(0) = 0; x \in [0,1].$$

Вариант №31.

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 4, \\ z' = \frac{2}{x + 4y} + x + 1; \end{cases}$$

$y(0) = 0, 1; z(0) = 0, 5; x \in [0, 1].$

Вариант №32.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + 2y^2} + z, \\ z' = \cos(2z) + x; \end{cases}$$

$y(0) = 0, 4; z(0) = 0, 4; x \in [0, 1].$

Вариант №33.

$$\begin{cases} y' = e^{-(y+z)} + 2x, \\ z' = x^2 + y; \end{cases}$$

$y(0) = 1; z(0) = 1; x \in [0, 1].$

Вариант №34.

$$y' = -\frac{y}{x} - y^2 \ln(x),$$

$y(1) = 2; x \in [1, 2].$

Вариант №35.

$$y' = \frac{1}{\cos(x)} - y \operatorname{tg}(x),$$

$$y(0) = 2; x \in [0, 1].$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свейников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, том 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. - 512 с.
5. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 369 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 2. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
9. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М.: изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
10. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. – М.: Высшая школа, 1998. – 383 с.
11. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
12. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.
13. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: изд. ТГУ, ч. II, 2007. – 288 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка.
2. Теорема Коши.
3. Формулировка Задачи Коши для ОДУ n -го порядка.
4. Классификация методов решения задачи Коши для ОДУ.
5. Понятие о приближенных и численных методах.
6. Одношаговые и многошаговые численные методы, явные и неявные численные методы.
7. Пояснить понятие плохо обусловленной задачи на примере следующей задачи Коши:

$$y' = y - x,$$
$$y(0) = 1; x \in [0,100].$$

8. Аналитический метод разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши для ОДУ I порядка.
9. Метод последовательных приближений Пикара. Основная идея метода.
10. Численный метод Эйлера. Вывод явного метода Эйлера.
11. Оценка погрешности аппроксимации метода Эйлера.
12. Неявный метод Хьюна. Оценка погрешности аппроксимации.
13. Общий способ построения одношаговых вычислительных правил, предложенный Рунге и Куттой.
14. Два эквивалентных приема получения параметров (α) , (β) , (A) методов Рунге – Кутты.
15. Построение метода Рунге – Кутты первого порядка точности $(q = 0)$.
16. Метод второго порядка точности $(q = 1)$. Вывод расчетных формул.
17. Понятие о многошаговых методах решения задачи Коши для ОДУ I порядка.
18. Построить экстраполяционную формулу Адамса (случай $s = 0, q = 1$).
19. Построить интерполяционную формулу Адамса $(s = 1, q = -1)$.

20. Вывести многошаговое правило типа Коуэлла ($s = 2, q = 1$).
21. Обобщение многошаговых методов на систему ОДУ I порядка.
22. Подход Дальквиста к исследованию устойчивости многошаговых методов.
23. Понятие *условия корней* и его связь с устойчивостью метода.
24. С помощью подхода Дальквиста исследовать на устойчивость: а) явный метод Эйлера; б) неявный метод Эйлера.
25. Применить подход Дальквиста к исследованию устойчивости: а) экстраполяционного метода Адамса; б) интерполяционного метода Адамса.
26. Исследование устойчивости явного и неявного метода Эйлера на модельном уравнении (второй подход).
27. Применение второго подхода исследования устойчивости явного (неявного) метода Эйлера на случай системы ОДУ I порядка.