Глава 6 Числовые ряды

§ 1. Определение числового ряда и основные теоремы

Определение 1.1: Последовательностью действительных чисел называется функция f, определённая на множестве всех натуральных чисел. Число $f(n)$ называется n-ным членом последовательности и обозначается a_n, а формула $a_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности.

Определение 1.2. Пусть имеется некоторая, составленная по определённому закону, бесконечная последовательность чисел $\{a_n\}$, чисто формально соединённых между собой знаками плюс:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1)$$

Такое выражение называется *числовым рядом*. Числа $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда; n-ный член ряда a_n называется также общим членом ряда. Ряд (1) считается заданным, если известен общий член его, выраженный как функция номера n: $a_n = f(n)$.

Укажите числовые ряды среди следующих объектов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; 3) $\sin n$;

4) $\sin 1 + \ldots + \sin n + \ldots$; 5) $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

Определение 1.3: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм имеет предел, т.е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

Здесь $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *суммой ряда*.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует (в частности $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$), то говорят, что *ряд расходится*.

Определение 1.4: Ряд $a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{m+n}$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ отбрасыванием первых m членов, называется m-ным остатком ряда.

Найти частичные суммы S_1, S_2, S_3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.5: Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости**.**

Доказательство:

Для случая, когда мы отбрасываем из ряда конечное число его членов. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Обозначим сумму отброшенных членов через A: $A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p$. Пусть сумма n первых членов ряда равна S_n, сумма n первых членов остатка $a_{p+1}+a_{p+2}+a_{p+3}+\ldots$ равна S'_n. Тогда $S_{n+p}=A+S_n{}' \Rightarrow S'_n=S_{n+p}-A$. Предположим, что ряд сходится, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, а следовательно и $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+p}=S$. В таком случае $\lim\limits_{n\to\infty}S_n{}'=S-A$, и следовательно , остаток ряда тоже сходится.

Предположим теперь, что остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+p}$ сходится, и пусть

$$\lim_{n\to\infty}S_n{}'=S';\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+p}=S'+A.$$

Поэтому сам ряд тоже сходится. Теорема доказана.

Тем саамы доказано, что из сходимости одного из наших рядов следует и сходимость другого.

Следствие. При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его членов.

Подумайте и скажите, на что влияет процедура отбрасывания первых членов ряда?

Теорема 1.6: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – сходится, то предел его m-го остатка при $m\to\infty$ равен нулю.

Доказательство:

Обозначим остаток ряда через $r_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$, а сумму всего ряда через – S. Тогда $S = S_m + r_m$. Так как ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_m = \lim_{n\to\infty}(S - S_m) = 0.$$

Теорема доказана.

Что Вы скажете о сходимости ряда, если известно, что предел m-го остатка ряда не равен нулю?

Теорема 1.7: Умножение членов сходящегося ряда на любое число α не нарушает его сходимости.

Подумайте, чему будет равна сумма ряда $\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

Верно ли утверждение: если члены расходящегося ряда умножить на число $c \neq 0$, то вновь получится расходящийся ряд.

Теорема 1.8: Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходятся и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$, причём его сумма равна $S_1 + S_2$.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, составленный из отрицательных членов, сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, составленный из положительных членов, расходится. Сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$?

2. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Оказалось, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm a_{n+1})$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?

Одна из важнейших задач теории числовых рядов – вычисление их сумм. Как правило, эта задача вызывает затруднения, но в некоторых случаях сумма ряда находится достаточно просто. Приведём пример такого рода.

Пример 1. Дан ряд $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$. Доказать его сходимость, пользуясь определением; найти сумму ряда.

Решение:

Общий член ряда $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ можно представить в виде:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1},$$

Где коэффициенты A и B можно найти методом неопределённых коэффициентов:

$$A=-\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ \text{т.е. } a_n=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Найдём частичную сумму: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$$a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6},\ a_2=\frac{1}{6}-\frac{1}{10},\ldots,a_n=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)},\ldots.$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Откуда по определению $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}$.

Таким образом, ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд, представляющий собой сумму членов геометрической прогрессии:

$$a_0+a_0q+\ldots+a_0q^n+\ldots.$$

Исследуем сходимость данного ряда. Для этого рассмотрим его частичную сумму $S_n=a_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Найдём её предел: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_0}{1-q}=S$, если $|q|<1$.

Следовательно, ряд $a_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ при $|q|<1$ сходится. Если $|q|\geq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, т.е. ряд расходится.

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, сходится или расходится он при $q=-1$?

Обычно, прежде чем браться за вычисление суммы ряда, нужно выяснить, сходится или расходится данный ряд, т.к. расходящийся ряд суммы не имеет. При этом особое значение приобретает задача об исследовании ряда на сходимость. Приведём теоремы, выражающие общие признаки сходимости числовых рядов. Начнём с необходимого признака сходимости ряда.

Теорема 1.9: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство:

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обозначим его сумму S. Рассмотрим две частичные суммы ряда: S_n и S_{n-1}.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}.$$

Разность S_n и S_{n-1} даёт общий член ряда $a_n = S_n - S_{n-1}$. По определению суммы ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n,\ S = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}, \text{ откуда}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Следствие теоремы 1.5. *(достаточный признак сходимости ряда)*: Если $\lim_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание:

1. Убывание слагаемых ещё не достаточно для сходимости ряда. Так геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то есть смысл исследовать ряд на сходимость дальше.

§2. Достаточные признаки сходимости знакопеременных рядов

Ограничимся рассмотрением лишь знакоположительных рядов, т.е. всякий знакоотрицательный ряд можно преобразовать в знакоположительный простым умножением на -1.

Теорема 2.1. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность его частных сумм ограничена сверху, то ряд сходится.

Доказательство.

Составим частичные суммы

$S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, \ldots, S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонна: $S_{n-1} \le S_n$. По условию $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена сверху, например числом А. Тогда последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ (по теореме о пределе монотонной последовательности) имеет предел. По определению 1.3. это означает, что ряд сходится. Теорема доказана.

Все признаки сходимости положительных рядов, в конечном счете, основаны на этой теореме.

Теорема 2.2. (Критерий Коши) Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) : \forall\, n \ge N$ и $\forall$ натурального p выполнялось неравенство $\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$.

Практическое применение критерия Коши бывает связано с большими трудностями, но его иногда полезно использовать для доказательства расходимости ряда: если найдутся хотя бы одно значение $\varepsilon > 0$ и одно натуральное p такие, что

$\exists\, n \ge N$, но $\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| \ge \varepsilon$ для $\forall\, N > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Покажем это на примере.

Пример 1. Покажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, хотя этот ряд удовлетворяет необходимому признаку сходимости. Для доказательства расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots .$$

Оценим его n–ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n};\ S_n \ge \sqrt{n}.$$

При $n \to \infty,\ S_n \to \infty$. Ряд расходится.

Рассмотренный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ является частным случаем обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Далее будет показано, что обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Пример 2. С помощью критерия Коши покажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Для этого рассмотрим

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2p-1}.$$

Существует ли $\varepsilon>0$ и натуральное p такие, что данная сумма была не меньше ε? Положим $\varepsilon=\frac{1}{4}, p=2n$. Тогда

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-1}>2n\cdot\frac{1}{6n}=\frac{1}{3}>\varepsilon=\frac{1}{4};$$

по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 2.3 (первый признак сравнения). Даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \qquad (2)$$

с положительными членами, причем начиная с некоторого номера N для всех членов этих рядов выполняется неравенство $a_n\le b_n$. Тогда

1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство.

a) Обозначим через S_n частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1), а через $\tilde{S}_n$– частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2). Ряд (2) сходится, поэтому $\tilde{S}_n$ ограничена. Так как по условию теоремы $S_n\le\tilde{S}_n$, то S_n также ограничена, а следовательно и ряд (1) сходится по теореме 2.1.

b) Так как ряд (1) расходится, а по условию каждый член ряда (2) больше или равен соответствующему члену ряда (1), начиная с некоторого номера n, то частичные суммы ряда (2) не ограничены, следовательно, ряд (2) расходится.

Теорема доказана.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как для любого n верно неравенство $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ и гармонический ряд расходится, то по первому признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

Теорема 2.4. (второй признак сравнения). Пусть даны знакоположительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2).

a) Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\ne 0$,то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

b) Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$,то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Доказательство.

a) По условию теоремы $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\ne 0$. По определению предела это означает, что $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, n_0(\varepsilon):\forall\, n\ge n_0 \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon$, то есть $-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-k<\varepsilon$, или $k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<k+\varepsilon$, $b_n(k-\varepsilon)<a_n<b_n(k+\varepsilon)$. Отсюда, используя свойство об умножении членов ряда на постоянную и 1 признак сравнения, получаем утверждение теоремы.

Чтобы применять признаки сравнения, необходимо иметь некоторый набор рядов, сходимость которых изучена, и с которыми можно сравнивать исследуемый ряд. В роли таких «эталонных» рядов используют:

1. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Этот ряд расходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Этот ряд называют ***обобщенным гармоническим рядом*** (или ***рядом Дирихле***). Он расходится при $p\le 1$ и сходится при $p>1$.

3. Ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$. Этот ряд сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Воспользоваться первым признаком сравнения мы не сможем. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\neq 0$, то по второму признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ведут себя по отношению к сходимости одинаково. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ расходится.

Сравним поведение двух рядов, являющихся частными случаями обобщенного гармонического ряда (ряда Дирихле) при $p=1$ и $p=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Представим себе, что перед нами лежат две бесконечные колоды карт. Берем карты из первой колоды и выкладываем их так: первая карта вся, рядом с ней половина второй карты, далее третья часть третей карты и т.д.: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то в этом случае площадь выложенных карт будет бесконечной. Если же карты выкладывать чуть-чуть иначе: первую – полностью, рядом с ней – четверть второй карты, дальше $\frac{1}{9}$ третьей карты и так далее: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$, то в этом случае площадь выложенных карт будет конечной, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, и его сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)4^n}$.

Т.к. $n<n+2$ при $\forall\, n=1,2,\ldots$, то общий член данного ряда $a_n=\frac{n}{(n+2)4^n}<\frac{1}{4^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ является сходящейся геометрической прогрессией, где $q=\frac{1}{4}<1$. Следовательно, наш ряд сходится по теореме 2.3.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Т.к. $\ln(n+1)<n+1$, $\forall\, n=1,2,\ldots$, то $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$ для $n>2$; $\frac{1}{n+1}$ является общим членом расходящегося гармонического ряда, так что по I признаку сравнения наш ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$.

Сравним $a_n=tg\frac{\pi}{4n}$ с общим членом гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя предельный признак сравнения: $\lim_{n\to\infty}\left(tg\frac{\pi}{4n}:\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}\neq 0$, по теореме 2.3. наш ряд расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Представим его общий член в виде произведения общего члена обобщенного гармонического ряда и частного от деления $\ln^2 n$ на некоторую положительную степень n, например, так: $\frac{\ln^2 n}{n^{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\cdot\frac{\ln^2 n}{n^{\frac{1}{8}}}$.

Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{\frac{1}{8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^{\frac{1}{8}}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=(\textit{по правилу Лопиталя})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x}{\frac{1}{8}\cdot x^{\frac{-7}{8}}}=16\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{8}}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=128\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}=0.$$

Поэтому, начиная с некоторого номера, $\frac{\ln^2 n}{n^{\frac{1}{8}}}<1$, следовательно, для достаточно больших n справедливо неравенство $\frac{\ln^2 n}{n^{\frac{5}{4}}}<\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$. Ряд с общим членом $\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем степени $p=\frac{9}{8}>1$. Следовательно, по теореме 2.3. наш ряд сходится.

Недостаток обоих признаков сравнения в том, что их использование предполагает подбор второго ряда. Сделать это не всегда легко.

Существуют признаки сходимости, которые позволяют судить о сходимости ряда по его общему члену. К их числу относятся признаки Даламбера и Коши.

Теорема 2.5 (признак Даламбера). Пусть дан $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – знакоположительный ряд. Если существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, то

a) при $\ell<1$ ряд сходится;
b) при $\ell>1$ ряд расходится;
c) при $\ell=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Доказательство.

Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$. По определению предела это означает, что при достаточно большом n, $n\geq N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\ell\right|<\varepsilon$, где ε – заранее заданное сколь угодно малое положительное число. Отсюда $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell < \varepsilon$ или $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + \ell$, $n \ge N$.

а) Пусть $\ell < 1$. Возьмем ε столько малым, что $\varepsilon + \ell < 1$. Обозначим $\varepsilon + \ell = q$, тогда $\ell < q < 1$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, откуда $a_{n+1} < a_n q$ при $m = N, N+1, \ldots$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{N+1} < a_N q, \\ a_{N+2} < a_{N+1} q, \\ a_{N+3} < u_{N+2} q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Итак члены ряда $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$ меньше соответствующих членов геометрической прогрессии, т.е. $a_N + q a_N + q^2 a_N + \ldots$. Так как $q < 1$, то последний ряд сходится, но тогда по теореме 2.3. сходится и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_{N+i}$, и исходный ряд.

b) $\ell > 1$. Тогда, из того что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, следует, что (по определению пределов) начиная с некоторого номера N, для всех $n \ge N$ будет иметь место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n$. Это означает, что члены ряда (1) возрастают, начиная с номера N, то есть a_n не стремится к нулю, при $n \to \infty$. Следовательно ряд (1) расходится. Теорема доказана.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}$.

1) Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$a_n = \frac{4^n \cdot n!}{n^n}, \quad , a_{n+1} = \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{4^n \cdot n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 4^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 4 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Получившийся предел найдем с помощью второго замечательного предела. Для этого запишем его в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{(-1)}\cdot\frac{(-1)}{n+1}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)\cdot n}{n+1}}=e^{-1}.$$

Таким образом, получили

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=4\cdot e^{-1}=\frac{4}{e}>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$.

Запишем $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ и найдем

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot n}{(n+2)}=2>1$, то есть ряд расходится по признаку Даламбера.

Теорема 2.6. (Радикальный признак Коши). Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – знакоположительный ряд. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$, то

a) при $\ell<1$ ряд сходится;
b) при $\ell>1$ ряд расходится;
c) при $\ell=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Доказательство.

1. Пусть $\ell<1$. Рассмотрим число q, удовлетворяющее соотношению $\ell<q<1$.

Из определения предела и соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, следует, что существует такое число N, такое что, для всех $n\geq N$ будет иметь место неравенство: $\left|\sqrt[n]{a_n}-\ell\right|<q-\ell\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}<q\ \Rightarrow\ a_n<q^n$.

Рассмотрим теперь два ряда

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots \qquad (1)$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots \qquad (3)$$

Ряд (3) сходится, так как члены его образуют убывающую геометрическую прогрессию.

Члены ряда (1), начиная с a_{N+1} меньше членов ряда (3) и следовательно, на основании первого признака сравнения и свойства (1) рядов, получаем что ряд (1) сходится.

2. $\ell > 1$. Тогда начиная с некоторого номера N, для всех $n \ge N$ будет иметь место неравенство $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a_n > 1$. Это означает, что члены ряда (1) возрастают, начиная с номера N, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (a_n не стремится к нулю, при $n \to \infty$). Не выполнен необходимый признак сходимости ряда. Поэтому ряд (1) расходится. Теорема доказана.

Заметим, что признак Коши сильнее признака Даламбера, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ может существовать, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ – нет. При этом признак Коши несколько чувствительнее, чем признак Даламбера. Это видно из следующего примера:

Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots$, т.е. общий член этого ряда $a_n = \begin{cases} 3^{-n}, n = 2m \\ 2^{-n}, n = 2m - 1 \end{cases}$. Отсюда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, n = 2m \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, n = 2m - 1. \end{cases}$$

Таким образом, отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ все время «перескакивает» через единицу, и признак Даламбера здесь не применим. Вместе с тем признак Коши дает нам $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3^{-n}} = \frac{1}{3}, n = 2m$, и $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2}, n = 2m - 1$ тем самым указывает на сходимость ряда.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$.

Применим признак Коши к общему члену ряда и воспользуемся 2 замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$ Ряд расходится.

ПРИМЕР 12. Исследовать на сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Применяя признак Коши, получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log_a n)^n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\log_a n)^n}}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\log_a n}=0<1$, то ряд сходится.