§ 4. Сходимость знакопеременных рядов

Определение 4.1.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами произвольных знаков называют ***знакопеременным.***
2. ***Знакочередующимся*** называется ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (1)$$

3. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов данного ряда.

Оказывается, что всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся, то есть из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся,*** если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей расходится.

Теорема 4.2. Сходящийся знакопеременный (и знакопостоянный) ряд остается сходящимся и не меняет величины своей суммы при любой группировке его членов, произведённой без изменения порядка их следования.

Теорема 4.3. (Римана). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то можно так переставить его члены, что сумма получившегося ряда будет равна любому заранее заданному числу S. Более того, можно так переставить члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что получится расходящийся ряд.

Пример 1. Рассмотрим знакопременный ряд
$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$, которых сходится не абсолютно и обозначим его сумму через S. Заметим, что $S>0$. Сделаем перестановку членов этого ряда так, чтобы за одним положительным следовало два отрицательных:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots.$$

Докажем, что этот ряд сходится и найдем его сумму. Обозначим через S_n и S'_n – частичные суммы рядов

$$S'_{3k}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}+-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}+-\frac{1}{2k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right]\Rightarrow\lim_{k\to\infty}S'_{3k}=\frac{1}{2}S.$$

$\lim\limits_{k\to\infty}S'_{3k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(S'_{3k+1}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}S$ и т.д. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}S'_n=\frac{1}{2}S$.

Теорема 4.4. Сходимость и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяются при произвольной перестановке его членов.

Теорема 4.5. Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то сходятся ряды, составленные из его а) положительных членов; б) отрицательных членов. Если же знакопеременный ряд сходится лишь условно, то вышеупомянутые ряды расходятся.

Следствия теоремы 4.5:

1. Абсолютно сходящиеся ряды сходятся за счет того, что их члены достаточно быстро стремятся к нулю при $n\to\infty$.
2. Условно сходящиеся ряды сходятся за счет частичной компенсации членов с разными знаками.

Выделение класса абсолютно сходящихся рядов целесообразно потому, что по сравнению с условно сходящимися рядами они обладают рядом важных свойств, связанных, в частности, с возможностью произвольной перестановки их членов. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд – значит не только ответить на вопрос, сходится он или расходится, но и как сходится: абсолютно или условно.

Для знакочередующихся рядов справедлива следующий достаточный признак сходимости:

Теорема 4.6. (Признак сходимости Лейбница). Пусть знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ удовлетворяет условиям:

1) начиная с некоторого номера, члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.
$$a_k > a_{k+1} > \ldots. > a_n > \ldots,$$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, причем его сумма S положительна и не превосходит первого члена ряда.

Доказательство.

Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (1):
$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$
Из условия (2) следует, что выражение в каждой скобке положительное. Следовательно $S_{2m} > 0$, и S_{2m}– возрастает с возрастанием m. Запишем сумму S_{2m} так
$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$
В силу условия (2) каждая из скобок положительное число. Поэтому в результате вычисления получим
$$S_{2m} < a_1.$$
Таким образом, мы установили, что при $m \to \infty$частичные сумма S_{2m}– возрастает и ограниченна. Отсюда следует, что S_{2m} имеет предел при $m \to \infty$, то есть
$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$
причем $0 < S < a_1$.

Однако сходимость ряда еще не доказана; мы доказали, что при последовательности «четных» чисел, частичная сумма имеет предел.

Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу S.

Рассмотрим частичные суммы для $n = 2m + 1$ первых членов ряда (1):

$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$.

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m+1} = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, тогда

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m} + a_{2m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S.$$

Тем самым мы доказали, что и при n нечетных существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$, следовательно, ряд (1) сходится. Теорема доказана.

Исследование сходимости знакочередующихся рядов следует начинать с исследования их абсолютной сходимости, так как этот путь часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

При исследовании знакопеременных рядов на абсолютную сходимость пользуются всеми признаками сходимости для рядов с положительными членами. В частности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится абсолютно, если хотя бы одни из пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ \lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-1\right)}.$$

существует и меньше единицы. Если же хоть один из пределов больше единицы, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ряд знакочередующийся. Проверим, удовлетворяет ли он условиям теоремы Лейбница:

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Оба условия выполнены. Следовательно, знакопеременный ряд сходится условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

Пример 3. Выяснить характер сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{1}{2}}}$.

Данный ряд является знакочередующимся:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Исследуем его на абсолютную сходимость. Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ является расходящимся, так как является обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ с показателем $p=\frac{1}{2}<1$. Остается исследовать ряд на условную сходимость. Все условия признака Лейбница выполняются для членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$: а) последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}, n=1,2,\ldots$ монотонно убывает (проверьте); б) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, поэтому ряд сходится условно по признаку Лейбница.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд: $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots+\frac{1}{(2n-3)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$.

Ряд из абсолютных величин данного ряда сходится как сумма двух сходящихся знакоположительных рядов, поэтому исходный ряд сходится абсолютно (но признак Лейбница для него не применим: $|a_n|\to 0$ при $n\to\infty$, но не монотонно).

Замечания.

1. Если знакочередующийся ряд не удовлетворяет второму условию теоремы Лейбница, то он расходится (так как для него не будет выполняться необходимое условие сходимости). Если же условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ выполняется, но члены ряда по абсолютной величине не убывают, то ряд может как сходиться, так и расходиться.
2. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (2) выполняются, начиная с некоторого номера N.

Теорема 4.7. (Признак Абеля). Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. Если выполнены условия:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится;

b) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена (т.е. существует M: начиная с некоторого номера n $|a_n| \le M$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ряд, составлен из модулей членов данного ряда, расходится, т.к. $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{\sqrt{n}}$ расходится как обобщенно гармонический с показателем $p = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, речь может идти только об условной сходимости данного ряда. Применим теорему 4.7: пусть $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ условно сходится по признаку Лейбница, а последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонна и ограничена, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ при $n \to \infty$. Поэтому данный ряд сходится условно по признаку Абеля.

§ 5. Приближенное вычисление суммы ряда

Для приближенного вычисления суммы сходящегося ряда $S \cong S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ полагают S, пренебрегая остатком $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Чтобы оценить ошибку, допускаемую при такой замене, нужно оценить остаток ряда $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают с $(n+1)$-го , справедливо следующие оценки:

$$R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx,$$

где $f(n)$ – общий член данного ряда, $f(x)$ принимает в точках $x = n, n+1, \ldots$ значения $f(n)$; $f(x)$ монотонно убывает в промежутке интегрирования.

Для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива следующая оценка остатка: $|R_n| = |a_{n+1}|$. Указанные оценки дают возможность вычислить сумму ряда с любой наперед заданной точностью.

В случаях, когда оценка остатка ряда по выше приведенным формулам трудна (например, общий член ряда содержит факториалы, или ряд является знакопеременным общего вида, или не удовлетворяет условиям оценки, приведенных выше), применяют различные искусственные приемы.

Пример 1. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ суммой его первых членов. Оценим остаток ряда:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right].$$

Здесь в скобках стоит геометрическая прогрессия. Суммируя её, получаем: $R_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{n \cdot n!}$. Нетрудно видеть, что при $n = 6$

$R_n < \frac{1}{6 \cdot 6!} = \frac{1}{4320}$. Таки образом, с точностью до 0,001:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 1.718.$$

Пример 2. С какой точностью ε будет найдены сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$, если для её подсчета взять первые шесть членов рядов? Данный ряд является знакочередующийся с монотонно убывающими членами. Значит, для его остатка справедлива формула: $|R_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$. При $n = 6$ имеем: $|R_6| \le \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{1}{896} \approx 0.001$. Таким образом, $\varepsilon \approx 0.001$.

Пример 3. Оценить n–ый остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Вычислить сумму ряда с точностью до 0.1. Сколько нужно взять членов, чтобы вычислить сумма ряда с точностью до 0,001?

Воспользуемся оценкой остатка знакоположительного ряда $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$: $R_n \le \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_n^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_n^b = \frac{1}{n}$. Если взять первые 10 членов ряда то $R_n \le \frac{1}{10}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} \approx 1.6$ с точностью до 0,1. Чтобы обеспечить точность в 0,001, нужно взять 1000 членов ряда, т.к. тогда $R_n \le \frac{1}{1000}$.