Теорема 2.7. (Обобщенный признак Коши). Если существует верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\ell$, то при $\ell<1$ ряд сходится, а при $\ell>1$ ряд расходится.

Пример 14. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\left[2+(-1)^n\right]^n}{4^n}$.

Первая мысль при рассмотрении данного ряда, – применить признаки Коши и Даламбера. Но оба предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ не существуют. Однако верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2\cdot 3^n}{4^n}}=\dfrac{3}{4}\left(n=2k\right)$ существует и меньше единицы. По общему признаку Коши, данный ряд сходится.

Напомним читателю, что из любой ограниченной последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой называется частичным пределом. Таких подпоследовательностей может быть несколько. Наибольшей частичный предел (он всегда существует в случае ограниченной последовательности) называется ***верхним пределом*** данной последовательности. В частности, в данном примере из подпоследовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{\sqrt[k]{\dfrac{k^2\cdot 3^k}{4^k}}\right\}$; её предел будет верхним.

Замечание. В обеих теоремах случай $\ell=\infty$ включается в $\ell>1$.

Замечание. Если $\ell=1$, то ряд может сходится, а может расходится. Поэтому признаки Коши и Даламбера не подходят и необходимо использовать другие признаки.

Пример. 14. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Известно, что он расходится. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}=1$. Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\ln n\right) = (\textit{правило Лопиталя}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{1}{n}}{1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

Пример. 15. Рассмотрим ряд $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

Выяснить сходимость этого ряда признаком Даламбера не удается, так как $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1.$$

Найдем сумму ряда по определению. Заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда исходный ряд можно записать в виде:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots.$$

Частичная сумма первых n членов после раскрытия скобок и сокращения будет равна $S_n = 1-\frac{1}{n}$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$, то есть ряд сходится.

Пример 16. Рассмотрим ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Этот ряд сходится, так как $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{(n+1)}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится из примера 15, значит ряд тоже сходится по первому признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

И наконец, сформулируем еще один признак сходимости, который связывает сходимость ряда со сходимостью некоторого несобственного интеграла.

Теорема 2.8. (Интегральный признак Коши). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд, $f(x)$ – непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на некотором промежутке $[c,+\infty)$ (где $c \geq 1$) функция, такая, что $f(n) = a_n$ (для любого $n = 1,2,3,\ldots$). Тогда несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ведут себя одинаково относительно сходимости.

Доказательство.

Изобразим члены ряда геометрически, откладывая по оси абсцисс номера $1,2,\ldots,n,n+1$ членов ряда, а по оси ординат – соответственно значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ членов ряда. Построим на том же чертеже график невозрастающей функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Получим, что площадь любого прямоугольника S_i равна u_i, и следовательно, S_n – частичная сумма ряда равна сумме площадей построенных прямоугольников. Рассмотрим ступенчатую фигуру, образованную этими прямоугольниками. Она закрывает область, ограниченную кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1, x = n, y = 0$. Площадь этой области равна $S_{фиг} = \int_1^{n+1} f(x)dx$. Следовательно, $S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$.

Рассмотрим теперь Рис. 2. Здесь первый слева из прямоугольников имеет высоту a_2, второй a_3 и т.д. Площадь последнего из построенных прямоугольников равна a_{n+1}. Следовательно, площадь всех построенных прямоугольников равна сумме всех членов ряда, начиная от второго до $(n+1)$–го, то есть $S = S_{n+1} - a_1$. С другой стороны, ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками содержится внутри кривой фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1, x = n, y = 0$. Получаем $S_{n+1} - a_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \Rightarrow S_n < \int\limits_1^{n+1} f(x)dx + a_1$.

Рассмотрим два случая:

1. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ – сходится, то есть имеет конечное значение, так как $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx < \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \Rightarrow S_n < S_{n+1} < \int\limits_1^{\infty} f(x)dx + a_1$.

Так как сумма S_n – ограниченна, и при любых n, при $n \to \infty$ возрастает (учитывая, что $a_n > 0$) то, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$ и тогда по определению сходящегося ряда, ряд сходится.

2. $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ – расходится. Это означает, что $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$ и тогда, в силу неравенства $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$, S_n – неограниченно возрастает при возрастании n. Значит ряд расходится. Теорема доказана.

Замечания.

1) Признак основан на сравнении рядов с несобственными интегралами.

2) Функцию $f(x)$, принимающую в точках $x = n$ значения $f(n)$, чаще всего удается построить с помощью замены натурального n в выражении $f(n)$, чаще на непрерывно изменяющийся аргумент x. Так, например, если $f(n) = \frac{1}{n^2}$, то $f(x) = \frac{1}{x^2}$; если $f(n) = \frac{2^n}{n^n}$, то $f(x) = \frac{2^x}{x^x}$. Однако, не всегда таким путем можно получить функцию $f(x)$. Если, например $f(n) = \frac{1}{n!}$, то в этом случае нельзя заменить n на x, так как символ $x!$ при нецельных x лишен смысла. Это не означает, что не существует функции $f(x)$, принимающей в точках $x = n$ значения $f(n)$. Напротив, она всегда существует, но ее аналитическое выражение не всегда просто найти.

3) Достоинство интегрального признака Коши состоит в том, что он четко проводит различие между все более медленно сходящимися рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличают-

ся от членов другого, что иллюстрируется приведенным ниже примером 17.

4) Интегральный признак Коши применим к рядам, в которых положительные члены монотонно убывают с увеличением их номера. Но даже и для таких функций может оказаться, что путь непосредственного вычисления интеграла при применении интегрального признака сходимости не всегда приемлем. Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n^2+\sqrt{n}}}$ требуется вычислить интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{x^2+\sqrt{x}}}dx$, что затруднительно. К данному ряду очевидно применение первого признака сравнения: при $n>1$ мы имеем $e^{-n^2-\sqrt{n}}<e^{-n^2}<e^{-n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{e}$.

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Эта функция на промежутке $[1,+\infty)$ непрерывна, неотрицательна, монотонно убывает. Кроме того, для любого натурального n

$$f(n)=\frac{1}{n^p}=a_n.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ведут себя одинаково относительно сходимости. Рассмотрим указанный несобственный интеграл. Имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right).$$

Так как по условию $p>1$, то $p-1>0$. Но тогда $\frac{1}{b^{p-1}}\to 0$ при $b\to+\infty$ и $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{1-p}\cdot(0-1)=-\frac{1}{1-p}$.

Итак, получили, что несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ при $p > 1$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$) тоже сходится.

Пример 18. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ интегральным признаком Коши.

По формуле общего члена введем функцию $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Она непрерывна и монотонно убывает на промежутке $2 \le x < \infty$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int\limits_{2}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{\ln b} - \ln 2\right) = \infty .$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и ряд.

При исследовании сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами иногда используется метод выделения главной части. Он применяется там, где удается получить с помощью формулы Тейлора асимптотическую формулу вид $a_n \sim \frac{c}{n^p}, n \to \infty, c > 0$. В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (см пример 17).

Пример 18. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$.

Так как $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$, то

$$a_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right),$$

откуда $a_n \sim \frac{\pi^2}{2n^{\frac{4}{3}}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ сходится.

При оценке факториалов больших чисел и вычислении пределов, содержащих $n!$ бывает полезна формул Стиглинга: $n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$, которая означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}} = 1$.

Пример 19. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

Применение признака Даламбера в данном случае затруднительно. Используем радикальный признак Коши и заменим $n!$ по формуле Стирлинга на $\sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2n}}}{e} \cdot n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}} = \infty .$$

Ряд расходится.

§3. Некоторые применения теория числовых рядов

1. Исследование сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами основано на использовании интегрального признака Коши.

Пример 1. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt[3]{x^2 \cdot 2^{-x}}\, dx$.

Функция $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{x}{3}}$ непрерывна и положительна для $\forall\, x > 1$. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{n}{3}}}$. Он сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{n+1}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx \frac{1}{1{,}21} < 1.$$

Из сходимости ряда вытекает сходимость данного интеграла.

2. Достаточные признаки можно использовать для доказательства равенств вида $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, a>0$. Обозначим $f(n)=\frac{a^n}{n!}$, $f(n+1)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$. Исследуем его сходимость признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot a^{n+1}}{a^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0<1.$$

Так как ряд с общим членом $\frac{a^n}{n!}$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ по необходимому признаку сходимости.