§ 4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x) \qquad (5)$$

где $p, g \in R$.

Дифференциальное уравнение всегда можно решить методом вариации произвольных постоянных, который является универсальным для решения вышеназванных дифференциальных уравнений. Но этот метод зачастую приводит к громоздким выкладкам. Его используют при решении дифференциального уравнения с правой частью $f(x)$ так называемого общего вида. Например, $f(x) = \ln x$, $f(x) = tg\beta x$, $f(x)$ есть отношение функций и тому подобное.

Определение 4.1. Функцию $f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x]$ называют функцией специального вида, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и соответственно.

Если правая m часть $f(x)$ дифференциального уравнения (5) является функцией специального вида, то есть представляет собой линейную комбинацию показательной функции, многочленов и тригонометрических функций, то можно дать способ нахождения частного решения исходного неоднородного дифференциального уравнения, который состоит в выполнении некоторых алгебраических операций, но не содержит процесса интегрирования. Этот способ называют методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим различные правые части дифференциального уравнения (5).

1) Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ – многочлен.

В этом случае частное решение ищут также в виде многочлена той же степени:

$$u(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \; y = \varphi(x, C_1, C_2) \qquad (*)$$

При этом следует учитывать, какие корни имеет характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

а) Если среди корней характеристического уравнения нет корней $k = 0$, то $y_{ч.н.}$ ищем в виде (*):

$$y_{ч.н.} = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n.$$

b) Если один из корней характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, то $y_{ч.н.} = x\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$.

c) Если оба корня характеристического уравнения $k_1 = k_2 = 0$, то

$$y_{ч.н.} = x^2\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right).$$

2) Пусть правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения (5) имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$.

Частное решение ищем в виде:

a) $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$, если число α не является корнем характеристического уравнения;

b) Число α является корнем характеристического уравнения кратности один. Тогда $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x \cdot \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$.

c) Число α является двукратным корнем характеристического уравнения. В этом случае $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x^2 \cdot \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$.

И обычным способом определяем коэффициенты входящего в решение многочлена.

Пример 4. Найти вид частного решения дифференциального уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 5x^3 \cdot e^{3x}$.

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, со специальной правой частью. В начале, найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Решение ищем в виде: $y = e^{kx}$ $\Rightarrow$ $e^{kx}\left(k^2 - 5k + 6\right) = 0$, откуда $k_1 = 2, k_2 = 3$, тогда $y_{1ч} = e^{2x}$, $y_{2ч} = e^{3x}$ и $y_{о.о.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Запишем правую часть дифференциального уравнения: $f(x) = 5x^3 \cdot e^{3x}$, для неё один из корней $\alpha = 3$, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде:

$$y_{ч.н.} = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \cdot x \cdot e^{3x}.$$

3) Пусть правая часть дифференциального уравнения (5) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_n(x) \cdot \sin\beta x\right],$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно n и m степеней. В этом случае уравнению $y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)$ будет удовлетворять функция, построенная по одному из нижеследующий правил:

a) Если комплексные корни $\alpha \pm i\beta$ являются корнями функции $f(x)$, но не являются корнями характеристического уравнения для однородного дифференциального уравнения: $y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0$, то частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения ищут в виде:

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot \left[\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p\right) \cdot \cos\beta x + \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p\right) \cdot \sin\beta x\right],$$

где p – наибольшее из чисел n и m; для нахождения чисел $b_0, b_1, \ldots, b_p$, $a_0, a_1, \ldots, a_p$ используют метод неопределенных коэффициентов.

b) Если комплексные числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями и правой части $f(x)$, и характеристического уравнения, составленного по однородному дифференциальному уравнению, соответствующему исходному дифференциальному уравнению, то частное решение данного неоднородного уравнения ищут в виде:

$$y_{ч.н.} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p\right) \cdot \cos\beta x + \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p\right) \cdot \sin\beta x\right].$$

Замечание. Если $f(x)$ не содержит многочленов, в записи функции $f(x)$ присутствуют только синусы или только косинусы, то в $y_{ч.н.}$ все равно следует брать члены и с синусами, и с косинусами.

Теорема 4.1. Сумма частных решений двух уравнений $y'' + py' + gy = f_1(x)$ и $y'' + py' + gy = f_2(x)$ дает частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y'' + py' + gy = f_1(x) + f_2(x).$$

Докажите теорему.

Пример 5. Найдите частное решение дифференциального уравнения: $y'' + y = 12\sin 2x$.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного: $y'' + y = 0$. Решение ищем в виде $y = e^{kx} \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + 1\right) = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm i$.

2. Корни правой части $f(x) = 12\sin 2x$ – комплексно сопряженные: $0 \pm 2i$, не совпадают с корнями характеристического уравнения, поэтому $y_{ч.н.} = A\sin 2x + B\cos 2x$. Методом неопределенных коэффициентов находим $A = -4, B = 0$, тогда $y_{ч.н.} = -4\sin 2x$.

§6. Уравнение Эйлера

Уравнение вида $x^2 \cdot y'' + x \cdot p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ или $(ax+b)^2 y'' + p \cdot (ax+b)y' + q \cdot y = f(x)$ называют уравнением Эйлера.

С помощью подстановок $x = e^t$ и $ax + b = e^t$ эти уравнения приводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.

Осуществим подстановку: $x = e^t \;\Rightarrow\; t = \ln x \;\Rightarrow\; \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$.

Найдем y'_x и y'': $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$,

$$y'' = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right] \cdot \frac{dt}{dx} = \left[-e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} + \cdot e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2}\right] \cdot e^{-t} \Rightarrow y''_{xx} = \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \cdot e^{-2t}.$$

Подставим x, y' и y'' в исходное уравнение:

$e^{2t}\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right] \cdot e^{-2t} + 5e^t \cdot e^{-t} \cdot \dfrac{dy}{dt} = -4e^t \;\Rightarrow\; \ddot{y} - \dot{y} + 5\dot{y} = -4e^t$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение ищем в виде $y = e^{kt}$. Решаем соответствующее однородное: $\ddot{y} + 4\dot{y} = 0 \;\Rightarrow\; e^{kt}\left(k^2 + 4k\right) = 0$. Откуда $k_1 = 0, k_2 = -4 \;\Rightarrow$ $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{-4t}$. Так как корни характеристического уравнения не совпали с корнем правой части $\alpha = 1$, то ищем $y_{ч.} = A \cdot e^t$, откуда $5A = -4$, $\Rightarrow\; A = -\dfrac{4}{5}$. Тогда $y_{о.н.}(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} - \dfrac{4}{5} e^t$. Так как $e^t = x$, то окончательно

$$y_{о.н.}(x) = C_1 + C_2 x^{-4} - \frac{4}{5} x.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение
$x^2 y'' + 3xy' + 4y = 0$.

Решение. Будем искать частное решение $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$.

Подставим значения этих производных в исходное уравнение. Получим

$$x^2 k(k-1)x^{k-2} + 3xkx^{k-1} + x^k = 0 \text{ или } x^k\left(k(k-1) + 3k + 1\right) = 0.$$

Если $x \neq 0$, то $k=-1$ является корнем решения кратности два и следовательно $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{\ln x}{x}$ два частных линейно независимых решения, тогда общее решение примет вид:

$$y_{о.н.}(x) = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{\ln x}{x}.$$

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n порядка называют уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x).$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называют однородным, если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называют неоднородным. Его соответствующее однородное имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (6)$$

Для дифференциального уравнения (6) справедливы все результаты главы II.

Определение 7.1. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называют линейно независимыми в интервале $[a,b]$, если не существует постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, их которых хоть одна отлична от нуля, таких, что имеет место тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + .. + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Теорема 7.2. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются системой линейно независимых решений уравнения (6), тогда выражение $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Теорема 7.3. Сумма какого-либо частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (7)$$

и общего решения соответствующего ему однородного дифференциального уравнения (6) есть общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7).

Если коэффициенты дифференциального уравнения (7) постоянны, то его линейно независимые частные решения можно находить по правилам, изложенным в главе II.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y''' + y' = x + e^x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' + y' = 0$. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение ищем в виде $y = e^{kx} \Rightarrow e^{kx}\left(k^3 + k\right) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$, откуда $y_{о.о.} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 sinx$.

Корни характеристического уравнения: $0, \pm i$. Корни правой части $f(x) = x + e^x$: 0,1. Один из корней совпадает: $k = 0$, поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения ищем в виде:

$y_{ч.н.} = x\left(Ax + B\right) + De^x$, при этом $y_{1ч.} = x\left(Ax + B\right)$, $y_{2ч} = De^x$.

Найдем $y_{1ч.} = Ax^2 + Bx$: $y'_{1ч.} = 2Ax + B$, $y''_{1ч.} = 2A$, $y'''_{1ч.} = 0 \Rightarrow$ $2Ax + B \equiv x \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}$, $B = 0 \Rightarrow y_{1ч.} = \dfrac{1}{2}x^2$.

Найдем $y_{2ч} = De^x$: $y'_{2ч} = De^x = y''_{2ч} = y'''_{2ч} \Rightarrow De^x + De^x \equiv e^x \Rightarrow$ $D = \dfrac{1}{2}$, тогда $y_{2ч} = \dfrac{1}{2}e^x$.

Окончательно: $y_{о.н.} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 sinx + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{e^x}{2}$.

§ 8. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Определение 8.1. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенная относительно производных, называется нормальной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (*)$$

Если правые части уравнений, входящих в систему, являются линейными функциями относительно $y_1, y_2, ..., y_n$, то система называется линейной.

Задача нахождения решения $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ удовлетворяющая начальным условиям $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = \overline{1,n}$, называется ***задачей Коши***.

Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правые части уравнения (*) были непрерывны в окрестности начальной точки $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right)$.

Определение 8.2. Совокупность дифференцируемых по x функций

$$y_i = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right),\ i = \overline{1,n} \qquad (**)$$

определенных в области $D \subset R^{n+1}$ изменения переменных $x, C_1, C_2, ..., C_n$ называют общим решением системы (*) в области D. В каждой точке области D решение задачи Коши существует и единственно, если выполняются условия:

1. Система уравнений (*) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$C_i = \psi_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right),\ i = \overline{1,n};$$

2. Совокупность функций (**) является решением системы (*) при всех значениях $C_1, C_2, ..., C_n$, которые получены, когда точка $\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \in D$.

Одним из способов решения нормальной системы является метод последовательного исключения неизвестных. Суть его состоит в следующем. Из системы (*) исключают $n-1$ функцию. Для этого составляют дополнительные уравнения, дифференцируя уравнения данной системы. Сведение нормальной системы к одному дифференциальному уравнению достигается исключением всех неизвестных, кроме одного. После нахождения этого неизвестного определяют остальные.

Пример 1. Решить систему: $\begin{cases} 5\dot{x} - 2\dot{y} + 4x - y = e^{-t}, \\ \dot{x} + 8x - 3y = 5e^{-t}. \end{cases}$

Дифференцируем второе уравнение еще раз:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} - 3\dot{y} = -5e^{-t}. \qquad (a)$$

Из первого уравнения выражаем $\dot{y} = \dfrac{5\dot{x} + 4x - y - e^{-t}}{2}$, а из второго уравнения – $y: y = \dfrac{\dot{x} + 8x - 5e^{-t}}{3}$ и подставляем в полученное уравнение (а):

$$\ddot{x} + 8\dot{x} - \frac{3}{2}\left(5\dot{x} + 4x - y - e^{-t}\right) = -5e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + 3y + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + 3y + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + \dot{x} + 8x - 5e^{-t} + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow 2\ddot{x} + 2\dot{x} - 4x = -8e^{-t} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -4e^{-t}.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решая соответствующее однородное уравнение, находим

$$x_{о.о.} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t}.$$

Корни характеристического уравнения не совпали с корнем правой части неоднородного уравнения, тогда $x_{ч.н.} = A \cdot e^{-t}$. Методом неопределенных коэффициентов находим $A = 2$, тогда $x_{о.н.} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + 2e^{-t}$.

Найдем $\dot{x}_{о.н.} = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{-2t} - 2e^{-t}$ и подставим в формулу $y = \dfrac{\dot{x} + 8x - 5e^{-t}}{3}$, тогда

$$y_{о.н.} = 3C_1 e^{t} + 2C_2 e^{-2t} + 3e^{-t}.$$