Глава 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

§ 1. Основные понятия

Определение 1.1. Дифференциальное уравнение вида

$$F\left[x, y(x), y'_x, \ldots, y^{(n)}\right] = 0 \qquad (1)$$

называют обыкновенным дифференциальным уравнением. Оно содержит известную функцию F, независимую переменную x, её функцию y и производные (или дифференциалы) функции $y(x)$.

Определение 1.2. Решением дифференциального уравнения (1) называют всякую n раз непрерывно дифференцируемую на интервале (a,b) функцию, при подстановке которой уравнение превращается в тождество, верное для $\forall\, x \in (a,b)$.

Пример 1. Проверить, что каждая из функций: $y_1 = 3$, $y_2 = e^x$ является решением данного дифференциального уравнения для $\forall\, x \in (0,\infty)$

$$y'' - y = 0.$$

Определение 1.3. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Вообще говоря, дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций, используя конечное число алгебраических операций, то говорят, что «уравнение интегрируется в квадратурах». Но класс таких дифференциальных уравнений достаточно узок. Поэтому для решения дифференциального уравнения чаще используют численные методы.

Определение 1.4. Порядком дифференциального уравнения (1) называют порядок старшей производной (или дифференциалов), входящей в уравнение.

Например, порядок дифференциального уравнения $\sqrt[3]{(y')^2} - \dfrac{x}{y} = x^2$ равен единице. Это дифференциальное уравнение первого порядка.

§ 2.Дифференциальное уравнение первого порядка

Определение 2.1. Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y(x), y'_x(x)) = 0 \qquad (2)$$

называют дифференциальным уравнением первого порядка. Дифференциальное уравнение называют разрешенным относительно производной, если его удается записать в виде

$$y'_x = f(x, y).$$

Для дифференциального уравнения (2) ставится задача: найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где x_0 и y_0 – заданные числа. Такую задачу называют задачей Коши. Пусть $y = \ (x)$ – решение уравнения (2) на интервале (a,b). График функции $\ (x)$ называют интегральной кривой. Геометрически задача Коши звучит так: найти интегральную кривую дифференциального уравнения (2), проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема 2.2. (существования и единственности). Пусть функция и её частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области $D \subset P_{xoy}$, точка (x_0, y_0) принадлежит области D. Тогда

a) существует решение задачи коши в некоторой окрестности точки x_0;

b) если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – решения задачи Коши, то $y_1(x) = y_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Замечания:

a) если условия теоремы 2.1. выполнены, то через любую точку (x_0, y_0), принадлежащую области D проходит одна интегральная кривая;

b) решение, в любой точке которого нарушена единственность решения задачи Коши, называется особым решением дифференциального уравнения.

Определение 2.3 Общим решением дифференциального уравнения $F[x, y(x), y'_x] = 0$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C, удовлетворяющая дифференциальному уравнению при любом допустимом значении постоянной C.

Замечание. Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде $G = (x, y, C)$, его называют общим интегралом уравнения. При конкретном значении постоянной C мы получаем частное решение (или частный интеграл) уравнения.

Пример 1. Проверить, что функция $x^2 - xy + y^2 = C^2$ является интегралом дифференциального уравнения $(x - 2y) \cdot y'_x = 2x - y$.

Решение: функция задана неявно. Дифференцируем её

$$2x - y - xy'_x + 2yy'_x = 0 \Rightarrow 2x - y = (x - 2y) \cdot y'_x.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2. $y' + yctgx - 2\cos x = 0$. Можно проверить, что $y = \sin x$ будет решение этого уравнения.

Определение 2.4. Точки (x, y) плоскости, в которых не выполняется условие существования и единственности решения называются особыми точками дифференциального уравнения. В этих точках терпит разрыв либо функция $f(x, y)$, либо её производная $f'_y(x, y)$.

Замечание. Через каждую особую точку может проходить либо несколько интегральных кривых, либо не проходит ни одной.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$. Здесь функции $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ и $f'_y(x, y) = \dfrac{1}{x}$ непрерывны при $x \neq 0$. Таким образом, за исключением оси OY, точки всей плоскости OXY удовлетворяют условиям Коши. Особыми точками будут все точки на оси OY.

Пример 4.Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y^3 = C_1(x + C_2)^2$.

Решение. Дифференцируем неявно заданную функцию: $3y^2 \cdot y'_x = 2C_1(x + C_2)$. Получили дифференциальное уравнение первого порядка. Далее: $6y \cdot y'_x + 3y^2 \cdot y''_{xx} = 2C_1$. Подставим C_1 и C_2 в исходное уравнение. Получим искомое дифференциальное уравнение:

$$\left(y'_x\right)^2 + 2y \cdot y''_{xx} = 0.$$

§ 3. Дифференциальное уравнение с разделяющими переменными

Пусть нам удалось записать дифференциальное уравнение в виде $y'_x = M(x) \cdot N(y)$, где функции $M(x)$ и $N(y)$ непрерывны, и каждая из них является функцией только одного аргумента.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = M(x) \cdot N(y) \qquad (3)$$

называют дифференциальным уравнением с разделяющими переменными.

Пример 1. $y' = \dfrac{x^2}{y + \sin y}$, $f_1(y) = \dfrac{1}{y + \sin y}$, $f_2(x) = x^2$.

Пример 2. $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$, $f_1(y) = y^2 - y$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

Для того чтобы разделить переменные, решаем пропорцию так, чтобы все дифференциалы попали в числители:

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x) \cdot dx. \qquad (4)$$

Такое дифференциальное уравнение называют дифференциальным уравнением с разделяющими переменными. Оно решается операцией интегрирования:

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x) \cdot dx.$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $\left(1 + 3^x\right) y y'_x = 3^x$.

Решение. Мы имеем дифференциальное уравнение с разделяющими переменными. Решаем пропорцию, разделяя переменные:

$$y dy = \frac{3^x}{1 + 3^x} \cdot dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируем его:

$$\int y dy = \int \frac{3^x}{1 + 3^x} dx \text{ или } \int y dy = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{1}{1 + 3^x} d\left(1 + 3^x\right) \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln\left|1 + 3^x\right| + C \text{ – общий интеграл.}$$

Замечание. Для того чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка, его сводят разными методами к дифференциальному уравнению с разделенными переменными, так как последнее уравнение решается с помощью операции интегрирования.

Использование дифференциальных уравнений в экономике.

Пусть $y = y(t)$ – объем производства, реализованный к моменту времени t. Считаем, что цена данного товара постоянна в течение рассматриваемого интервала времени. Тогда функция $y = y(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$y'_x = ky, \tag{$*$}$$

где $k = mpl$, m – норма инвестиций, p – продажная цена, l – коэффициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение $(*)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Его решение имеет вид:

$y = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Уравнение $(*)$ описывает динамику роста цен при постоянной инфляции, а также рост населения.

Пример 2. Найти функцию спроса, если эластичность спроса относительно цены выражена формулой $E_p = -2 = const$, причем $y(3) = \frac{1}{6}$.

Напомним: эластичность спроса относительно цены определяется формулой

$$E_p(y) = \frac{p}{y} \cdot \frac{dy}{dp}.$$

§ 4. Однородные уравнения

Определение 4.1. Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5}$$

где функция φ только отношения переменных $\frac{y}{x}$.

Примеры.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2$.
2. $y' = \dfrac{x^3 + x^2 y}{xy^2}$.
3. $\dfrac{dy}{dx} = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + 3e^{\frac{y}{x}}$.

Для решения этого уравнения делаем замену переменной $\frac{y}{x}=z(x)$ или $y=z(x)\cdot x$. Затем дифференцируем это равенство, получим $y'=z'(x)\cdot x+z(x)$ или $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$.

В уравнение (7) произведем замену и получим

$$z+x\frac{dz}{dx}=\varphi(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\varphi(z)-z \Rightarrow \frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными, в предположении, что $\varphi(z)-z\neq 0$.

Интегрирую равенство, получим

$$\ln x=\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}+C.$$

После нахождения интеграла, подставим $z=\frac{y}{x}$, получим общее решение уравнения (5).

Пример 4. Решите дифференциальное уравнение первого порядка $2x^2y'=x^2+y^2$.

Решение. Запишем уравнение в виде : $y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$ $\Rightarrow$

$$y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Делаем замену $z=\frac{y}{x}$, $y'=z'(x)\cdot x+z(x)$, получаем

$$z'x+z=\frac{1}{2}+\frac{z^2}{2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}+\frac{z^2}{2}-z \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-2z+1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z^2-2z+1}=\frac{1}{2x}dx \Rightarrow \frac{dz}{(z-1)^2}=\frac{1}{2x}dx \Rightarrow \int\frac{dz}{(z-1)^2}=\int\frac{1}{2x}dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{(z-1)}=\frac{1}{2}\ln|x|+C \Rightarrow -\frac{1}{\left(\frac{y}{x}-1\right)}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

Интеграл решения дифференциального уравнения:

$$-\frac{x}{(y-x)}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения

Определение 5.1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$y'_x + p(x)\cdot y(x) = f(x), \qquad (6)$$

где функции $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны для любого $x\in[a,b]$. Если $f(x)\equiv 0$, $\forall\, x\in[a,b]$, то уравнение (6) называют однородным. Если $f(x)\not\equiv 0$, то уравнение (6) называют неоднородным.

Заметим, если $f(x)=0$, то уравнение (6) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Примеры.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x + \cos x$.
2. $xy' = y + e^x$.
3. $yy' + xy^3 = \sin x$ не линейное уравнение.

Если же $f(x)\neq 0$, то используют три способа их решения.

I. *Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).*

В начале решают соответствующее однородное дифференциальное уравнение: $y'_x = -p(x)\cdot y$; где $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда $\dfrac{dy}{y} = -p(x)\cdot dx$, откуда

$$\int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \text{, и } \ln|y| = -\int p(x)dx.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Далее, считаем $C = C(x)$ функцией аргумента x. Тогда её можно дифференцировать (варьировать по x): $y(x) = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$. Подставим полученное решение в исходное дифференциальное уравнение, предварительно найдя y':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x).$$

Имеем:

$$\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) + C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) = f(x)$$

или $dC(x) = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx$.

Интегрируем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx+A,$$

где тогда решение неоднородного дифференциального уравнения примет вид:

$$y(x)=\left[\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx+A\right]\cdot e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow$$

$$y_{о.н.}=e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx+A\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$A\cdot e^{-\int p(x)dx}=y_{о.о.}$ – общее решение соответствующего однородного;

$e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)e^{\int p(x)dx}\cdot dx=y_{ч.н.}$ – частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy'-3y=x^2$.

Уравнение содержит неизвестную функцию $y(x)$ и её производную y' в первой степени, поэтому мы имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка (оно неоднородное). Для его решения используем метод вариации произвольной постоянной.

1. Решим соответствующее однородное: $xy'-3y=0\Rightarrow$

$x\cdot\dfrac{dy}{dx}=3y\Rightarrow\dfrac{dy}{y}=3\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=3\int\frac{dx}{x}$, откуда $\ln|y|=3\ln|x|+\ln C$, тогда $y=C\cdot x^3$.

2. Считаем $C=C(x)$, тогда $y=C(x)\cdot x^3$. Для нахождения неизвестной функции $C(x)$ подставим найденные y и y' в исходное дифференциальное уравнение:

$$y'=C'(x)\cdot x^3+C(x)\cdot 3x^2\Rightarrow C'\cdot x^4+C\cdot 3x^3-3C\cdot x^3=x^2,$$

тогда $\dfrac{dC}{dx}=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow dC(x)=\dfrac{dx}{x^2}\Rightarrow C(x)=-\dfrac{1}{x}+A$.

Итак, запишем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=\left[A-\frac{1}{x}\right]\cdot x^3=Ax^3-x^2,$$

где $y_{о.о.}==Ax^3$ – общее решение соответствующего однородного, $y_{ч.н.}=-x^2$ – частное решение исходного неоднородного.

II. *Метод подстановки.*

Решение дифференциального уравнения $y'_x + p(x) \cdot y(x) = f(x)$ можно свести к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Для этого ищут решение уравнения в виде произведения двух функций: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Тогда $y'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$.

Подставляем y и y' в исходное дифференциальное уравнение:

$$u' \cdot v + v' \cdot u + p \cdot u \cdot v = f(x).$$

Оно содержит две неизвестные функции: $u(x)$ и $v(x)$. В силу произвола выбора вида решения будем считать, что коэффициент при любой из функций $u(x)$ или $v(x)$ равен нулю. Например, коэффициент при $u(x)$ равен нулю. Тогда

$$v' + p(x) \cdot v(x) = 0,$$

и оставшаяся часть исходного дифференциального уравнения:

$$u' \cdot v = f(x).$$

Итак, имеем два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v(x), \\ v(x) \cdot \dfrac{du}{dx} = f(x). \end{cases}$$

Решение первого из них $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где константу интегрирования можно считать равной единице в силу свободы выбора функции $v(x)$. Подставляем $v(x)$ во второе уравнение:

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{du}{dx} = f(x),$$

тогда $u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + C$.

Окончательно, так как $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, то общее решение

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot dx + C \right].$$

Замечание. Бывает, мы имеем дело с дифференциальным уравнением вида:

$x'_y + p(y) \cdot x(y) = f(y)$, которое линейно относительно $x(y)$ и $x'(y)$. Тогда её решение ищут в виде $x(y) = u(y) \cdot v(y)$.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2 + 2x$.

Будем искать решение в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тогда $y'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$. Подставляем в дифференциальное уравнение:

$$u' \cdot v + v' \cdot u + 2u \cdot v = x^2 + 2x,$$

откуда возникает два дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -2v(x), \\ v(x) \cdot \dfrac{du}{dx} = x^2 + 2x. \end{cases}$$

Решаем первое из них:

$$\frac{dv}{v} = -2dx \Rightarrow \ln|v| = -2x \Rightarrow v = e^{-2x}.$$

Подставляем $v(x)$ во второе уравнение:

$$du = e^{2x}\left(x^2 + 2x\right)dx$$

Обозначим $I = \int e^{2x}\left(x^2 + 2x\right)dx \left| \begin{matrix} u = x^2 + 2x \Rightarrow du = (2x + 2)dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right|$;

$I = \dfrac{\left(x^2 + 2x\right)}{2} \cdot e^{2x} - \int e^{2x}(x + 1)dx \left| \begin{matrix} u = x + 1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right|$;

$I = \dfrac{\left(x^2 + 2x\right)}{2} \cdot e^{2x} - \dfrac{(x + 1)}{2} e^{2x} + \dfrac{1}{4} e^{2x} + C$.

Тогда $y_{о.н.} = e^{-2x} \cdot e^{2x} \left[\dfrac{x^2 + x - 1}{2} + \dfrac{1}{4} + C \cdot e^{-2x} \right]$

или $y_{о.н.} = \dfrac{x^2 + x - 1}{2} + \dfrac{1}{4} + C \cdot e^{-2x}$.

Пример 6. Решите дифференциальное уравнение первого порядка $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x + \cos x$.

Решение. Здесь $P(x) = \cos x, Q(x) = \cos x$.

Делаем замену $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, и составляем систему

$$\begin{cases} v' - \cos x \cdot v = 0, \\ vu' = \cos x. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы $v' - \cos x \cdot v = 0 \ \Rightarrow \ v' = \cos x \cdot v$ $\Rightarrow \ \frac{dv}{dx} = \cos x \cdot v \ \Rightarrow \ \frac{dv}{v} = \cos x dx \ \Rightarrow \ \int \frac{dv}{v} = \int \cos x dx \ \Rightarrow \ \ln v = \sin x \ \Rightarrow$ $v = e^{\sin x}$.

Подставляем найденное $v = e^{\sin x}$ во второе уравнение системы: $e^{\sin x} u' = \cos x \ \Rightarrow \ u' = \frac{\cos x}{e^{\sin x}} \ \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = \cos x e^{-\sin x} \ \Rightarrow \ du = \cos x e^{-\sin x} dx \ \Rightarrow$

$\int du = \int \cos x e^{-\sin x} dx \ \Rightarrow \ u = -e^{-\sin x} + C$.

Исходное решение системы получается следующим

$$y = uv = \left(-e^{-\sin x} + C\right) e^{\sin x}.$$

III. *Метод интегрирующего множителя (метод Эйлера)*

Обе части дифференциального уравнения: $y'_x + p(x) \cdot y(x) = f(x)$ умножают на интегрирующей множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$,

где $y' \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot y \cdot e^{\int p(x)dx} = \left[y \cdot e^{\int p(x)dx} \right]'$

Тогда $\left[y \cdot \mu(x)\right]' = f(x) \cdot \mu(x) \cdot dx$, после интегрирования получаем:

$$y \cdot \mu(x) = \int f(x) \cdot \mu(x) \cdot dx + C \text{ или}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int f(x) \cdot \mu(x) \cdot dx + C \right].$$

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения: $2xy' - y = 3x^2$.

Запишем дифференциальное уравнение в виде: $y' - \frac{1}{2x} \cdot y = \frac{3x}{2}$.

Найдем интегрирующей множитель дифференциального уравнения:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{2x}} \ \Rightarrow \ \mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} \ \Rightarrow \ \mu(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Умножим дифференциальное уравнение на множитель $\mu(x)$:

$$y' \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ или}$$

$$y' \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} \cdot y = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Его левая часть $\left[y \cdot \mu(x)\right]'$, то есть $\left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$. Интегрируем это уравнение:

$$y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C,$$

откуда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид: $y = \sqrt{x} \cdot \left(x^{3/2} + C\right)$.

Пример 8. Решить дифференциальное уравнение $x' + x = y + 1$.

Имеем: $x = x(y)$. Решим с помощью интегрирующего множителя: так как $p(x) = 1$, то $\mu(y) = e^{\int 1 \cdot dy} = e^y$. Умножим дифференциальное уравнение на $\mu(y) = e^y$:

$$x' \cdot e^y + x \cdot e^y = (y+1) \cdot e^y.$$

Его левая часть: $x' \cdot e^y + x \cdot e^y = \left(x \cdot e^y\right)'$, тогда $\left(x \cdot e^y\right)' = (y+1) \cdot e^y \Rightarrow$ $x(y) \cdot e^y = y \cdot e^y - e^y + e^y + C \Rightarrow x(y) \cdot e^y = e^{-y}\left(ye^y + C\right)$ или

$$x(y) \cdot e^y = Ce^{-y} + y.$$

§ 6. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x) \cdot y(x) = f(x) \cdot y^n$, где $n \neq 0, n \neq 1,$, называют уравнением Бернулли. С помощью подстановки $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли сводится к линейному:

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = f(x).$$

При решении уравнений Бернулли их не преобразовывают в линейные; их сразу решают методом вариации или методом подстановки.

Пример 1. Решить уравнение Бернулли $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^3}$.

Преобразуем уравнение к виду: $y' - \frac{2}{3x} \cdot y = \frac{x^2}{3y^3}$.

Решение ищем в виде $y = u(x)v(x)$, $y'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$. Подставим в исходное уравнение:

$$u' \cdot v + v' \cdot u - \frac{2}{3x} \cdot u \cdot v = \frac{x^2}{3(u \cdot v)^3}.$$

Получаем два дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2dx}{3x}, \\ v \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{x^2}{3u^3v^3}. \end{cases}$$

Решаем первое: $\ln|v| = \frac{2}{3}\ln|x| \Rightarrow v = x^{\frac{2}{3}}$. Подставим $v(x)$ во второе уравнение: $x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{x^2}{3u^3\left(x^{2/3}\right)^3} \Rightarrow u^3 \cdot du = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}dx$.

Интегрируем:

$$\frac{u^4}{4} = C + x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow u = \sqrt[4]{4C + 4x^{\frac{1}{3}}},$$

тогда

$$y_{о.н.} = u \cdot v = x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{4C + 4x^{\frac{1}{3}}}.$$

Пример 2. Решите дифференциальное уравнение первого порядка $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$.

Решение. Здесь $P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = x^2, n = 4$.

Делаем замену $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, и составляем систему

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x} \cdot v = 0, \\ u' = x^2u^4v^3. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы $v' + \frac{1}{x} \cdot v = 0 \Rightarrow v' = -\frac{1}{x} \cdot v \Rightarrow$ $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow \ln v = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \ v = \dfrac{1}{x}$. Подставляем найденное $v = \dfrac{1}{x}$ во второе уравнение системы

$\Rightarrow \ u' = x^2 u^4 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 \ \Rightarrow \ \dfrac{u'}{u^4} = \dfrac{1}{x} \ \Rightarrow \ \Rightarrow \ \dfrac{du}{u^4} = \dfrac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \int \dfrac{du}{u^4} = \int \dfrac{dx}{x} \ \Rightarrow$

$\dfrac{u^{-3}}{-3} = \ln x + C \ \Rightarrow \ u^3 = -\dfrac{1}{3\ln x + C} \ \Rightarrow \ u = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\ln x + C}}$.

Решение исходного уравнения получается следующим:

$$y = uv = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\ln x + C}} \cdot \frac{1}{x}.$$

§ 7. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Определение 7.1. Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, левая часть которого представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных $u(x,y)$, называют «уравнением в полных дифференциалах».

Итак, запишем: $du(x,y) = 0$. Его общее решение находим операцией интегрирования:

$$u(x,y) = c.$$

Другими словами, мы должны восстановить функцию по её полному дифференциалу, чтобы решить дифференциальное уравнение данного типа.

Один из способов нахождения функции $u(x,y)$ дает теорема:

Теорема 7.2. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны в области $D \subset P_{xoy}$ и имеют в ней непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$. Чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ для любой точки $(x,y) \in D$; при этом функцию $u(x,y)$ можно найти по одной из следующих формул:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy, \text{ или}$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy,$$

где точка $(x_0,y_0)\in D$ выбирается так, чтобы получившиеся функция была интегрируема.

Докажем необходимость. Пусть выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом функции двух переменных $u(x,y)$ в области D:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. Найдем частные производные функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Мы знаем, что смешанные производные равны, если они непрерывны. Но по условию функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывны, что и доказывает справедливость формулы: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Покажем, что можно восстановить функцию по её полному дифференциалу, зная её частные дифференциалы. Итак,

$$du(x,y)=d_x u+d_y u,$$

где $d_x u=P(x,y)dx$, $d_y u=Q(x,y)dy$.

Например, можно проинтегрировать $d_x u=P(x,y)dx$, считая y фиксированным. Тогда $u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$.

Теперь найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx+\varphi(y)\right)\underset{по\,усл}{=}Q(x,y),$$

откуда выражаем φ'_y и находим функцию $\varphi(y)$. Найденную функцию $\varphi(y)$ подставляем в формулу:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y).$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$e^y dx+\left(xe^y-2y\right)\cdot dy=0.$$

В данном примере $P(x,y)=e^y$, $Q(x,y)=xe^y-2y$. Находим $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^y$, то есть имеем дело с дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Восстановим функцию $u(x,y)$ по её полному дифференциалу. Так как $du=e^y dx$, то $u(x,y)=\int e^y dx+\varphi(y)$ или $u(x,y)=x\cdot e^y+\varphi(y)$. Находим $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\cdot e^y+\varphi'_y$. По условию: $x\cdot e^y+\varphi'_y=Q(x,y)=xe^y-2y$, откуда $\varphi'_y=-2y$ или $d\varphi=-2ydy$. Интегрируем: $\varphi=-y^2+C$, тогда общий интеграл:

$$x\cdot e^y-y^2=u(x,y) \text{ или } x\cdot e^y-y^2=C.$$

Пример 2. Найдите общий интеграл уравнения $\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cos y\right)dy=0$.

Решение. Здесь $P(x,y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x,y)=e^y+x+x\cos y$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+x\cos y$. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y$. Проинтегрируем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$\int\frac{\partial u}{\partial x}=\int\left(e^x+y+\sin y\right)dx, \Rightarrow$$

$$u(x,y)=e^x+yx+x\sin y+C(y).$$

Найдем функцию $C(y)$, продифференцировав последнее выражение по y. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y)$.

Получаем уравнение $x+x\cos y+C'(y)=x+x\cos y+e^y$, откуда находим $C'(y)=e^y$, то есть $C(y)=e^y$. Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид

$$e^x+yx+x\sin y+e^y=C.$$

Интегрирующий множитель.

Если уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ не является уравнением в полных дифференциалах, то есть $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, но существует функция

$\mu(x,y)$ такая, что при умножении на неё мы получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\mu\left[Pdx+Qdy\right]=du,$$

то функцию $\mu(x,y)$ называют интегрирующим множителем. Когда интегрирующий множитель найден тем или иным способом, он умножается на исходное дифференциальное уравнение, тем самым дифференциальное уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Остается найти его общий интеграл.

Замечание: дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее условиям теоремы о существовании решения, имеет бесконечное множество интегрирующих множителей. Но общих приемов отыскания интегрирующих множителей нет. Для отдельных типов уравнений первого порядка удается отыскать интегрирующий множитель. Рассмотрим два таких случая:

A. Интегрирующий множитель является функцией только аргумента x, то есть $\mu(x)$. Тогда $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$, и $\mu(x)$ находят по формуле:

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx}.$$

B. Интегрирующий множитель есть функция только аргумента y, то есть $\mu(y)$. Тогда $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0$, и $\mu(y)$ находят по формуле:

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{P'_y-Q'_x}{P}dx}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $ydx-xdy=-\ln xdx$.

Преобразуем уравнение: $(y+\ln x)dx-xdy=0$ запишем функции $P(x,y)=y+\ln x$, $Q(x,y)=x$. Найдем $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$, частные производные не равны, но их разность $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2$, тогда $\frac{P'_y-Q'_x}{Q}=\frac{-2}{x}$ есть функция только аргумента x, то есть

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Мы нашли интегрирующий множитель $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Умножаем на него исходное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx-\frac{x}{x^2}dy=0.$$

Выписываем функции $P_1=\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}$, $Q_1=-\frac{1}{x}$. Тогда $\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$ то есть мы получили дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. В данном случае $d_x u=\left(\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$, $d_y u=-\frac{1}{x}dy$.

Проинтегрируем $d_y u: u=-\frac{1}{x}\int dy+\psi(x) \Rightarrow u(x,y)=-\frac{y}{x}+\psi(x)$.

Дифференцируем функцию $u(x,y)$ по аргументу x: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\psi'_x \underset{по\,усл}{=} \frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}$, откуда $\frac{d\psi}{dx}=\frac{\ln x}{x^2}$ или $d\psi=\frac{\ln x\cdot dx}{x^2}$. Интегрируем последнее уравнение:

$$\psi=\int \ln x\cdot\frac{dx}{x^2}\quad \left|\begin{array}{l} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{x^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{x}\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \psi=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2},\quad \text{тогда}$$

$$\psi=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

Окончательно: $u(x,y)=-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ или общее решение:

$$y=cx-\ln x-1.$$

Глава 3. Дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Определение 1.1. Дифференциальным уравнением второго порядка называют уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её первые две производные:

$$f(x, y, y', y'') = 0.$$

Определение 1.2. Решением дифференциального уравнения второго порядка называют всякую дважды дифференцируемую функцию, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет бесконечное множество решений. В общем виде решение дифференциального уравнения второго порядка можно записать по формулам:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{1}$$

или

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{2}$$

куда входят две не зависящие друг от друга произвольные постоянные. Решение вида (1) называют *общим решением*; вида (2) – *общим интегралом Д.У.*

Когда произвольным постоянным C_1 и C_2 придают конкретные числовые значения, полученное решение называют частным решением.

Каждое частное решение изображается интегральной кривой на плоскости. Общее решение дает семейство интегральных кривых. Для выделения частного решения из общего используют начальные условия: задаются значение функции и значение её первой производной при конкретном значении независимой переменной:

$$y(x_0) = y_0(x_0),\ y'(x_0) = y_0'(x_0) \tag{3}$$

Для определения частного решения из общего по начальным условиям находят числовые значения C_1 и C_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Phi(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0, \\ \Phi_x'(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1.3. Пусть $y'' = f(x, y, y')$ – дифференциальное уравнение второго порядка и заданы начальные условия (3); причем:

a) функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0, y_0') по всем своим аргументам;

b) функция $f(x, y, y')$ имеет ограниченные частные производные по аргументам y и y' в окрестности точки (x_0, y_0, y_0').

Тогда существует единственное решение данного дифференциального уравнения, которое определено и непрерывно в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям (3).

Для дифференциального уравнения второго порядка существует ряд случаев, когда введением новой переменной удается понизить порядок уравнения, то есть превратить его в дифференциальное уравнение первого порядка.

Перейдем к рассмотрению таких случаев:

1. Простейшее дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x)$.

Оно не содержит искомую функцию y и её производную первого порядка y'. Для нахождения искомой функции $y(x)$ два раза последовательно находим неопределенные интегралы:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,\ y(x) = \int \left[\int f(x)dx\right] \cdot dx + C_1 x + C_2.$$

Полученная функция содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2.

2. Дифференциальное уравнение второго порядка не содержит искомую функцию $y(x)$, то есть имеет вид $f(x, y, y'') = 0$. Вводим новую переменную $z(x)$, положив $z(x) = y'_x$, тогда $z'(x) = y''_{xx}$, что превращает исходное дифференциальное уравнение в уравнение первого порядка: $f(x, z, z') = 0$.

Решаем, если это возможно, дифференциальное уравнение первого порядка и получаем его общее решение в виде $z = \varphi(x, C_1)$. Заменяем z на y'_x, тогда $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

3. Дифференциальное уравнение второго порядка не содержит независимой переменной, то есть имеет вид: $f(y, y', y'') = 0$.

Вводим новую переменную $z[y(x)]$, положив $z(x) = y'$. В таком случае

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

или

$$y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Запишем преобразованное уравнение: $f\left(y, z, z\cdot\dfrac{dz}{dy}\right)=0$. Решаем, если возможно, это уравнение и получаем общее решение в виде:

$$z=\varphi(y, C_1).$$

Подставляем y' вместо z: $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(y, C_1)$. Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)}=dx \Rightarrow x+C_2=\int\frac{dy}{\varphi(y, C_1)}.$$

Последнее равенство дает общее решение исходного дифференциального уравнения.

4. Дифференциальное уравнение второго порядка не содержит ни x, ни y' и имеет вид:

$$y''=f(y).$$

Его можно решать как указанно в п.3. Укажем другой способ решения. Используем соотношение: $2y'\cdot dx=2dy$. Умножим левую часть исходного дифференциального уравнения $2y'\cdot y''\cdot dx=2f(y)dy$ на $2y'\cdot dx$, а правую – на $2dy$:

$$2y'\cdot y''\cdot dx=2f(y)dy,$$

откуда можно записать $d\left[(y')^2\right]=2f(y)dy$, тогда интегрируем:

$$(y')^2=2\int f(y)dy+C_1 \Rightarrow y'=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}.$$

Заменяем y' на $\dfrac{dy}{dx}$: $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+C_1} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}}=\pm dx$.

Интегрируем последнее уравнение и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения в виде:

$$x+C_2=\varphi(y, C_1).$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''=\ln x$.

Оно не содержит y и y'. Дважды последовательно интегрируем:

$$y'=\int\ln x dx=x\ln x-x+C_1,$$

$$y(x)=\int(x\ln x-x+C_1)dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C_1x+C_2.$$

Получили общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 2. Найдите частное решение уравнения $y^{(IV)} = \cos^2 x$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = \frac{1}{32}, y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = \frac{1}{8}, y'''|_{x=0} = 0.$$

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C_1,$$

$$y'' = \int\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C_1\right)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)dx = \frac{x^4}{36} + \frac{\cos 2x}{32} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$C_1 = 0, \quad -\frac{1}{8} + C_2 = \frac{1}{8}, \quad C_3 = 0, C_4 + \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_3 = 0, C_4 = 0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{x^4}{36} + \frac{\cos 2x}{32} + C_2\frac{x^2}{2}.$$

Пример 3. Найдите общее решение уравнения $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Решение. Полагая $y' = z$, преобразуем уравнение к виду

$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right)$ или $z' = \frac{z}{x}\ln\left(\frac{z}{x}\right)$.

Это однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{z}{x} = t$, откуда $z = tx$, получим уравнение: $t'x + t = t\ln t$, или $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируем, находим

$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, или $\ln t - 1 = xC_1$.

Откуда $t = e^{xC_1+1}$; возвращаясь к переменной $z = tx$, приходим к уравнению $z = xe^{xC_1+1}$. Следовательно,

$$y' = xe^{xC_1+1} \text{ или } y = \int xe^{xC_1+1}dx = \frac{1}{C_1}xe^{xC_1+1} - \frac{1}{C_1^2}xe^{xC_1+1} + C_2.$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение:

$y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$.

Дифференциальное уравнение не содержит независимой переменной x. Введем новую переменную $z[y(x)] = y'$, тогда $y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$. Подставим y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение: $y \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z - z^2 = y^2 \cdot z$ или $\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = y$.

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Его решение ищем в виде $z(y) = u(y) \cdot v(y) \;\Rightarrow\; z' = u' \cdot v + v' \cdot u$, откуда $u' \cdot v + v' \cdot u - \frac{1}{y}u \cdot v = y$.

Приравняем к нулю коэффициент при u:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; v = y.$$

Решаем второе уравнение: $\frac{du}{dy} \cdot y = y \;\Rightarrow\; du = dy \;\Rightarrow\; u = y + C_1$, тогда $z(y) = y(y + C_1)$. Заменяем $z(y)$ на $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = y(y + C_1)$, откуда $\frac{dy}{y(y + C_1)} = dx$, тогда

$$x = \int \frac{dy}{y(y + C_1)} = \int \left[\frac{1}{C_1 y} - \frac{1}{C_1(y + C_1)}\right]dy \;\Rightarrow\; x + C_2 = \ln\left(\frac{y}{(y + C_1)}\right) -$$

общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример 5. Решите уравнение $1 + [y']^2 = yy''$.

Решение. Положим $y' = z$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $1 + z^2 = yz\dfrac{dz}{dy}$; это – уравнение первого порядка относительно z с разделяющими переменными. Разделим переменные и интегрируем:

$$\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{zdz}{1+z^2} = \int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln\left(1+z^2\right) = 2\ln y + 2\ln C_1 \Rightarrow$$

$$1 + z^2 = y^2 C_1^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y^2 C_1^2 - 1}$$

Отсюда, возвращаясь к переменной y, имеем

$$y' = \pm\sqrt{y^2 C_1^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2 C_1^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(C_1 y + \sqrt{y^2 C_1^2 - 1}\right) = \pm(x + C_2)$$

или

$$y = \frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1} + e^{\mp(x+C_2)C_1}\right).$$

Пример 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:
$y'' \cdot y^3 = 1.$

Дифференциальное уравнение не содержит ни независимой переменной x, ни y'. Умножаем левую часть дифференциального уравнения на $2y \cdot dx$, правую – на $2dy$: $2y' \cdot y'' \cdot y^3 = 2dy$, откуда $d\left(y'\right)^2 = \dfrac{2dy}{y^3}$, тогда $\left(y'\right)^2 = -\dfrac{1}{y^2} + C_1$ или $y' = \pm\dfrac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}$.

Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$: $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y} \Rightarrow \dfrac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx$.

Можно интегрировать $\displaystyle\int\frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\int dx$ или $\mp\sqrt{C_1 y^2 - 1} = C_1 x + C_2$ – общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример 7. Решите уравнение $3\left[y'\right]^2 = 4yy'' + y^2$.

Решение. Разделив обе части уравнения на y^2: $3\left[\dfrac{y'}{y}\right]^2 - 4\cdot\dfrac{y''}{y} = 1$.

Положим $\dfrac{y'}{y} = z$, откуда $\dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2} = z'$, или $\dfrac{y''}{y} = z' + z^2$. В результате получим уравнение $3z^2 - 4z^2 - 4z' = 1$или $-4z' = z^2 + 1$, то есть $\dfrac{dz}{1+z^2} = -\dfrac{dx}{4}$.

Отсюда, интегрируя, находим

$$arctgz = C_1 - \frac{x}{4} \text{ , или } z = tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)\text{, или } \frac{y'}{y} = tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\frac{y'}{y} = tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) \text{ или } y = C_2\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения

Определение 2.1. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называют уравнение вида:

$$y'' + p(x)\cdot y' + g(x)\cdot y = f(x),$$

где $y(x)$ – искомая функция, и $p(x), g(x), f(x)$ – известные непрерывные функции.

Дифференциальное уравнение называют неоднородным, если $f(x) \not\equiv 0$; при $f(x) = 0$ дифференциальное уравнение называют однородным.

Итак, линейное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции $y(x)$ и её производных y'' и y'.

Линейные дифференциальные уравнения имеют широкое применение и обладают свойствами, позволяющими относительно просто найти общее решение.

Теорема 2.2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения $y'' + p(x)\cdot y' + g(x)\cdot y = 0$, то их линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in R$ также является решением данного дифференциального уравнения.

Для доказательства теоремы подставляют функцию $\alpha y_1 + \beta y_2$ в исходное дифференциальное уравнение и получают тождество.

Определение 2.3. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называют линейно независимыми на интервале $[a,b]$, когда не существует постоянных α и β, из которых хоть одна отлична от нуля и таких, что имеет место тождество $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Возьмем две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ составим для них определитель:

$$\Delta(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$$

Этот определитель называют определителем Вроньского (или вроньскианом).

Теорема 2.4. Если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференциального уравнения $y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$ линейно независимы в интервале $[a,b]$, то $W(y_1, y_2) \neq 0$ для любого $x \in [a,b]$.

Следствие. Вроньоскан равен нулю, если два решения дифференциального уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы в интервале $[a,b]$.

Теорема 2.5. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$, то выражение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные, является общим решением данного дифференциального уравнения.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение:

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x) \qquad (1)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0. \qquad (2)$$

Теорема 2.6. Сумма какого-либо одного частного решения неоднородного уравнения (1) и общего решения соответствующего однородного уравнения (2) есть общее решение данного дифференциального уравнения (1).

Следующая теорема предлагает способ нахождения частного решения неоднородного уравнения. Его называют методом вариации произвольных постоянных.

Теорема 2.7. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения может быть записано в виде $y = u(x) \cdot y_1 + v(x) \cdot y_2$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения, а $u(x)$ и $v(x)$ – две специальным образом подобранные функции, содержащие произвольные постоянные.

Доказательство. Так как $y = u \cdot y_1 + v \cdot y_2$ – решение, то находим $y' = u' \cdot y_1 + u \cdot y_1' + v' \cdot y_2 + v \cdot y_2'$.

В силу произвола выбора вида решения подбираем функции $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $u' \cdot y_1 + v' \cdot y_2 = 0$. Тогда $y' = u \cdot y_1' + v \cdot y_2'$. Находим $y'' = u' \cdot y_1 + u \cdot y_1'' + v' \cdot y_2 + v \cdot y_2''$. Подставляем в дифференциальное уравнение и группируем слагаемые:

$$y'' = u' \cdot y_1 + u \cdot y_1'' + v' \cdot y_2 + v \cdot y_2''.$$

$$u \cdot \underbrace{\left[y_1'' + p(x) \cdot y_1' + g(x) \cdot y_1\right]}_{=0} + v \cdot \underbrace{\left[y_2'' + p(x) \cdot y_2' + g(x) \cdot y_2\right]}_{=0} + u' \cdot y_1' + v' \cdot y_2' = f(x)$$

Откуда получаем уравнение: $u' \cdot y_1 + v' \cdot y_2 = f(x)$. Итак, мы получаем вариационную систему:

$$\begin{cases} u' \cdot y_1 + v' \cdot y_2 = 0, \\ u' \cdot y_1' + v' \cdot y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (3)$$

В этой системе неизвестными являются $u(x)$ и $v(x)$; величины y_1, y_1', y_2, y_2' – известны. Чтобы система (3) была разрешима, достаточно, чтобы определитель системы был отличен от нуля:

$$\Delta(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'.$$

Это определитель двух линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения, поэтому он не равен нулю для любых $x \in [a, b]$, значит, система (3) разрешима. Из неё находим выражения для $u'(x)$ и $v'(x)$. После интегрирования получим: $u(x) = \varphi(x) + C_1$, $v(x) = \psi(x) + C_2$. Откуда $y = (\varphi(x) + C_1) \cdot y_1 + (\psi(x) + C_2) \cdot y_2$.

Раскрываем скобка:

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \varphi(x) y_1 + \psi(x) \cdot y_2,$$

где $C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; тогда выражение $\varphi(x) y_1 + \psi(x) \cdot y_2$ будет частным решением исходного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

1. Выписываем и решаем соответствующее однородное уравнение: $y'' + y = 0$. Его общее решение имеет вид:

$y_{о.о.} = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$. Далее будем считать, что $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$. Составим вариационную систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos x + C_2' \cdot \sin x = 0, & \Big| \cdot \cos x \\ -C_1' \cdot \sin x + C_2' \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x} & \Big| \cdot (-\sin x). \end{cases}$$

После умножения складываем строки: $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ или $dC_1 = -\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$. Интегрируем: $C_1 = -\dfrac{1}{2\cos^2 x} + A$.

Выражаем $C_2' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} C_1'$, тогда $dC_2 = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ или $C_2 = \int tg^2 x d(tgx)$. Запишем $C_2 = \dfrac{tg^3 x}{3} + B$. Получаем решение:

$$y_{о.н.} = \left(A - \frac{1}{2\cos^2 x} \right) \cdot \cos x + \left(\frac{tg^3 x}{3} + B \right) \cdot \sin x.$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Решение. Находим частные решения дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$. Для него составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ и находим его корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$. Получаем, что $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$ есть фундаментальная система решений, а следовательно, $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ общее решение однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Запишем систему для нахождения $C_1'(x), C_2'(x)$. Она имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x), C_2'(x)$, находим

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 1/\cos 2x & \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin 2x/\cos 2x}{2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x} = -\frac{1}{2} tg 2x,$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos 2x & 0\\ -2\sin 2x & 1/\cos 2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}=\frac{1}{2\cos^2 2x+2\sin^2 2x}=1.$$

Интегрируя $C_1'(x)=-\frac{1}{2}tg2x,\ C_2'(x)=1$, получаем

$$C_1(x)=-\int\frac{1}{2}tg2xdx=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+\tilde{C}_1,\ C_2(x)=\int 1\cdot dx=x+\tilde{C}_2.$$

Подставляя эти выражения в равенство $y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, получим частное решение данного неоднородного уравнения

$$y(x)=\left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+\tilde{C}_1\right)\cdot\cos 2x+\left(x+\tilde{C}_2\right)\cdot\sin 2x.$$

Пример 3. Найдите общее решение уравнения $y''+y=tgx$.

Решение. Находим частные решения дифференциального уравнения $y''+y=0$. Для него составляем характеристическое уравнение $k^2+1=0$ и находим его корни $k_1=i$, $k_2=-i$. Получаем, что $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$ есть фундаментальная система решений, а, следовательно, $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ общее решение однородного уравнения $y''+y=0$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения запишется в виде $y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. Запишем систему для нахождения $C_1'(x), C_2'(x)$. Она имеет вид

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0,\\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=tgx.\end{cases}$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x), C_2'(x)$, находим

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ tgx & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{-\sin x\cdot tgx}{\cos^2 x+\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x},.$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & tgx\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\sin x.$$

Интегрируя $C_1'(x)=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2'(x)=\sin x$, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx + \tilde{C}_1 = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \sin x - \ln tg\left(\frac{x}{2} + tg\frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \sin x \cdot dx = -\cos x + \tilde{C}_2$$

Подставляя эти выражения в равенство $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, получим частное решение данного неоднородного уравнения

$$y(x) = \left(\sin x - \ln tg\left(\frac{x}{2} + tg\frac{\pi}{4}\right) + \tilde{C}_1 \right)\cos x + \left(-\cos x + \tilde{C}_2\right)\sin x.$$

§ 3. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть в дифференциальном уравнение

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0, \; p, g \in R \tag{4}$$

Чтобы при подстановке функции, являющейся решением дифференциального уравнения, все члены взаимно уничтожились, производные функции – решения должны быть подобны ей самой. Мы знаем, что такими свойствами обладает показательная функция. Попробуем искать решение дифференциального уравнения (4) в виде:

$$y = e^{kx}.$$

Тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение:

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Множитель e^{kx} не равен нулю для любого конечного значения x, поэтому $k^2 + pk + q = 0$. Это алгебраическое уравнение называют характеристическим. Таким образом, если k – корень характеристического, то функция e^{kx} является решением дифференциального уравнения (4). Рассмотрим все случаи корней, которые могут встретиться при решении характеристического уравнения.

Теорема 3.1. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами может быть записано одной из формул:

1. Если корни характеристического уравнения вещественны и $k_1 \neq k_2$, то

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Если корни характеристического уравнения вещественны и совпадают $k_1 = k_2 = k$, то

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

3. Если характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$ тогда

$$y_{o.o.} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot \sin\beta x\right).$$

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения: $y'' + 9y = 0$, при начальных условиях $y(1) = y'(1) = 1$.

1. Найдем общее решение дифференциального уравнения. Так как линейное дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, то его решение будем искать в виде $y = e^{kx}$, откуда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение: $e^{kx}\left(k^2 + 9\right) = 0$.

Но $e^{kx} \neq 0$, для любого конечного x, откуда получаем характеристическое уравнение: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i$ – чисто мнимые комплексные корни, тогда $y_{1ч} = \cos 3x$, $y_{2ч} = \sin 3x \Rightarrow$

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x.$$

2. Используем начальные условия для нахождения частного решения: $y(1) = y'(1) = 1$. Для этого найдем $y'_{o.o.} = -3C_1 \cdot \sin 3x + 3C_2 \cdot \cos 3x$,

$$\begin{cases} y(1) = 1 = C_1 \cdot \cos 3 + C_2 \cdot \sin 3, \\ y'(1) = 1 = -3C_1 \cdot \sin 3 + 3C_2 \cdot \cos 3 \end{cases} \Rightarrow -2 = -3C_1 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}.$$

Подставим $C_1 = \frac{2}{3}$ в первое уравнение:

$$1 = \frac{2}{3} \cdot \cos 3 + C_2 \cdot \sin 3 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sin 3}\left[1 - \frac{2}{3} \cdot \cos 3\right].$$

Откуда $y_{част} = \frac{2}{3}\cos 3x + \frac{1}{\sin 3}\left[1 - \frac{2}{3} \cdot \cos 3\right] \cdot \sin 3x$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение ищем в виде $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Подставляем функции y, y' и y'' в дифференциальное уравнение: $e^{kx}\left(k^2 + 4k + 3\right) = 0$ или $k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow (k+3)(k+1) = 0 \Rightarrow$ $k_1 = -3, k_2 = -1$. Кони характеристического вещественны и различны:

$$y_{1ч} = e^{-3x},\ y_{2ч} = e^{-x} \Rightarrow$$

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

1. Так как дифференциальное уравнение линейное, с постоянными коэффициентами, то его решение будем искать в виде $y = e^{kx}$, откуда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx} \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 - 4x + 4\right) = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = 2$.

Корни характеристического уравнения вещественны и совпадают $y_{1ч} = e^{2x}$, $y_{2ч} = xe^{2x} \Rightarrow$. Проверим линейную независимость функций $y_{1ч}$ и $y_{2ч}$:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}(2x+1) \end{vmatrix} = e^{4x}[2x + 1 - 2x] = e^{4x} \neq 0 \Rightarrow$$

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}.$$

2. Используем начальные условия для нахождения частного решения. Вначале найдем

$$y'_{о.о.} = 2C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{2x} \cdot (2x+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(0) = 1 = C_1, \\ y'(0) = 2 = 2C_1 + C_{2,} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$C_1 = 1, C_2 = 0 \Rightarrow y_{част.} = e^{2x}$.

Пример 4. Найдите общее решение уравнения $y''' + 5y'' + 6y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^3 + 5k^2 + 6k = 0$. Его корни $k_1 = 0, k_2 = -2, k_3 = -3$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^{-3x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$Y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$.

Пример 5. Найдите общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = 1$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$. Общее решение уравнения имеет вид

$Y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Пример 6. Найдите общее решение уравнения
$y^{(V)} - y^{(IV)} - y''' + y'' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^5 - k^4 - k^3 + k^2 = 0$. Решаем его, разлагая левую часть на множители:

$$k^5 - k^4 - k^3 + k^2 = k^2(k^3 - k^2 - k + 1) = k^2\left(k^2(k-1) - k(k-1)\right) =$$
$$k^2(k-1)(k^2-1) = k^2(k-1)^2(k+1)$$

Его корни $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^{0\cdot x} = 1, y_2 = xe^{0\cdot x} = x$, $y_3 = e^x, y_4 = xe_x$, $y_5 = e^{-x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 x + e^x(C_3 + C_4 x) + C_5 e^{-x}.$$

Пример 7. Найдите общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 + 4k + 13 = 0$. Его корни $k_1 = -2 + 3i, k_2 = -2 - 3i$. Здесь $\alpha = -2, \beta = 3$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 3x$. Общее решение уравнения имеет вид

$$Y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Пример 8. Найдите общее решение уравнения $y'' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 + 2 = 0$. Его корни $k_1 = \sqrt{2}i, k_2 = -\sqrt{2}i$. Здесь $\alpha = 0, \beta = \sqrt{2}$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = \cos\sqrt{2}x$, $y_2 = \sin\sqrt{2}x$. Общее решение уравнения имеет вид

$$Y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x.$$

§ 4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x) \tag{5}$$

где $p, g \in R$.

Дифференциальное уравнение всегда можно решить методом вариации произвольных постоянных, который является универсальным для решения вышеназванных дифференциальных уравнений. Но этот метод зачастую приводит к громоздким выкладкам. Его используют при решении дифференциального уравнения с правой частью $f(x)$ так называемого общего вида. Например, $f(x)=\ln x$, $f(x)=tg\beta x$, $f(x)$ есть отношение функций и тому подобное.

Определение 4.1. Функцию $f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left[P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x\right]$ называют функцией специального вида, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и соответственно.

Если правая m часть $f(x)$ дифференциального уравнения (5) является функцией специального вида, то есть представляет собой линейную комбинацию показательной функции, многочленов и тригонометрических функций, то можно дать способ нахождения частного решения исходного неоднородного дифференциального уравнения, который состоит в выполнении некоторых алгебраических операций, но не содержит процесса интегрирования. Этот способ называют методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим различные правые части дифференциального уравнения (5).

1) Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ – многочлен.

В этом случае частное решение ищут также в виде многочлена той же степени:

$$u(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \; y=\varphi(x,C_1,C_2) \tag{*}$$

При этом следует учитывать, какие корни имеет характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

a) Если среди корней характеристического уравнения нет корней $k=0$, то $y_{ч.н.}$ ищем в виде (*):

$$y_{ч.н.}=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n.$$

b) Если один из корней характеристического уравнения $k_1=0$, $k_2\neq 0$, то $y_{ч.н.}=x\left(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n\right)$.

c) Если оба корня характеристического уравнения $k_1=k_2=0$, то

$$y_{ч.н.}=x^2\left(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n\right).$$

2) Пусть правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения (5) имеет вид: $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$.

Частное решение ищем в виде:

a) $y_{ч.н.}=e^{\alpha x}\left(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n\right)$, если число α не является корнем характеристического уравнения;

b) Число α является корнем характеристического уравнения кратности один. Тогда $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x \cdot \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$.

c) Число α является двукратным корнем характеристического уравнения. В этом случае $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x^2 \cdot \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n\right)$.

И обычным способом определяем коэффициенты входящего в решение многочлена.

Пример 4. Найти вид частного решения дифференциального уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 5x^3 \cdot e^{3x}$.

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, со специальной правой частью. В начале, найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Решение ищем в виде: $y = e^{kx}$ $\Rightarrow$ $e^{kx}\left(k^2 - 5k + 6\right) = 0$, откуда $k_1 = 2, k_2 = 3$, тогда $y_{1ч} = e^{2x}$, $y_{2ч} = e^{3x}$ и $y_{о.о.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Запишем правую часть дифференциального уравнения: $f(x) = 5x^3 \cdot e^{3x}$, для неё один из корней $\alpha = 3$, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде:

$$y_{ч.н.} = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \cdot x \cdot e^{3x}.$$

3) Пусть правая часть дифференциального уравнения (5) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot \sin \beta x\right],$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно n и m степеней. В этом случае уравнению $y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)$ будет удовлетворять функция, построенная по одному из нижеследующий правил:

a) Если комплексные корни $\alpha \pm i\beta$ являются корнями функции $f(x)$, но не являются корнями характеристического уравнения для однородного дифференциального уравнения: $y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0$, то частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения ищут в виде:

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot \left[\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p\right) \cdot \cos \beta x + \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p\right) \cdot \sin \beta x\right],$$

где p – наибольшее из чисел n и m; для нахождения чисел $b_0, b_1, \ldots, b_p$, $a_0, a_1, \ldots, a_p$ используют метод неопределенных коэффициентов.

b) Если комплексные числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями и правой части $f(x)$, и характеристического уравнения, составленного по однородному дифференциальному уравнению, соответствующему исходному дифференциальному уравнению, то частное решение данного неоднородного уравнения ищут в виде:

$$y_{ч.н.} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p\right) \cdot \cos\beta x + \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p\right) \cdot \sin\beta x\right].$$

Замечание. Если $f(x)$ не содержит многочленов, в записи функции $f(x)$ присутствуют только синусы или только косинусы, то в $y_{ч.н.}$ все равно следует брать члены и с синусами, и с косинусами.

Теорема 4.1. Сумма частных решений двух уравнений $y'' + py' + gy = f_1(x)$ и $y'' + py' + gy = f_2(x)$ дает частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y'' + py' + gy = f_1(x) + f_2(x).$$

Докажите теорему.

Пример. Найдите частное решение дифференциального уравнения: $y'' + y = 12\sin 2x$.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного: $y'' + y = 0$. Решение ищем в виде $y = e^{kx} \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + 1\right) = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm i$.

2. Корни правой части $f(x) = 12\sin 2x$ – комплексно сопряженные: $0 \pm 2i$, не совпадают с корнями характеристического уравнения, поэтому $y_{ч.н.} = A\sin 2x + B\cos 2x$. Методом неопределенных коэффициентов находим $A = -4, B = 0$, тогда $y_{ч.н.} = -4\sin 2x$.

§5. Уравнение Эйлера

Уравнение вида $x^2 \cdot y'' + x \cdot p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ или $(ax+b)^2 y'' + p \cdot (ax+b)y' + q \cdot y = f(x)$ называют уравнением Эйлера.

С помощью подстановок $x = e^t$ и $ax + b = e^t$ эти уравнения приводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.

Осуществим подстановку: $x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$.

Найдем y'_x и y'': $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$,

$$y'' = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right]\cdot\frac{dt}{dx} = \left[-e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt} + \cdot e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]\cdot e^{-t} \Rightarrow y''_{xx} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\cdot e^{-2t}.$$

Подставим x, y' и y'' в исходное уравнение:

$e^{2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\cdot e^{-2t} + 5e^t\cdot e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt} = -4e^t \Rightarrow \ddot{y} - \dot{y} + 5\dot{y} = -4e^t$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение ищем в виде $y = e^{kt}$. Решаем соответствующее однородное: $\ddot{y} + 4\dot{y} = 0 \Rightarrow e^{kt}\left(k^2 + 4k\right) = 0$. Откуда $k_1 = 0, k_2 = -4 \Rightarrow$ $y_{о.о.} = C_1 + C_2e^{-4t}$. Так как корни характеристического уравнения не совпали с корнем правой части $\alpha = 1$, то ищем $y_{ч.} = A\cdot e^t$, откуда $5A = -4$, $\Rightarrow A = -\frac{4}{5}$. Тогда $y_{о.н.}(t) = C_1 + C_2e^{-4t} - \frac{4}{5}e^t$. Так как $e^t = x$, то окончательно

$$y_{о.н.}(x) = C_1 + C_2x^{-4} - \frac{4}{5}x.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение
$x^2y'' + 3xy' + 4y = 0$.

Решение. Будем искать частное решение $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$.

Подставим значения этих производных в исходное уравнение. Получим

$$x^2k(k-1)x^{k-2} + 3xkx^{k-1} + x^k = 0 \text{ или } x^k\left(k(k-1) + 3k + 1\right) = 0.$$

Если $x \neq 0$, то $k = -1$ является корнем решения кратности два и следовательно $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{\ln x}{x}$ два частных линейно независимых решения, тогда общее решение примет вид:

$$y_{о.н.}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}.$$

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n порядка называют уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x).$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называют однородным, если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называют неоднородным. Его соответствующее однородное имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (6)$$

Для дифференциального уравнения (6) справедливы все результаты главы II.

Определение 7.1. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называют линейно независимыми в интервале $[a,b]$, если не существует постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, их которых хоть одна отлична от нуля, таких, что имеет месть тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + .. + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Теорема 7.2. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются системой линейно независимых решений уравнения (6), тогда выражение $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Теорема 7.3. Сумма какого-либо частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (7)$$

и общего решения соответствующего ему однородного дифференциального уравнения (6) есть общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7).

Если коэффициенты дифференциального уравнения (7) постоянны, то его линейно независимые частные решения можно находить по правилам, изложенным в главе II.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y''' + y' = x + e^x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' + y' = 0$. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение ищем в виде $y = e^{kx} \Rightarrow e^{kx}\left(k^3 + k\right) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$, откуда $y_{o.o.} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 sinx$.

Корни характеристического уравнения: $0, \pm i$. Корни правой части $f(x) = x + e^x$: 0,1. Один из корней совпадает: $k = 0$, поэтому частное решение исходного дифференциального уравнения ищем в виде:

$y_{ч.н.} = x(Ax+B)+De^x$, при этом $y_{1ч.} = x(Ax+B)$, $y_{2ч} = De^x$.

Найдем $y_{1ч.} = Ax^2 + Bx$: $y'_{1ч.} = 2Ax+B$, $y''_{1ч.} = 2A$, $y'''_{1ч.} = 0 \Rightarrow$ $2Ax+B \equiv x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$, $B = 0 \Rightarrow y_{1ч.} = \frac{1}{2}x^2$.

Найдем $y_{2ч} = De^x$: $y'_{2ч} = De^x = y''_{2ч} = y'''_{2ч} \Rightarrow De^x + De^x \equiv e^x \Rightarrow$ $D = \frac{1}{2}$, тогда $y_{2ч} = \frac{1}{2}e^x$.

Окончательно: $y_{о.н.} = C_1 + C_2\cos x + C_3 sinx + \frac{x^2}{2} + \frac{e^x}{2}$.

§ 7. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Определение 8.1. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенная относительно производных, называется нормальной системой:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \quad (*)$$

Если правые части уравнений, входящих в систему, являются линейными функциями относительно $y_1, y_2, ..., y_n$, то система называется линейной.

Задача нахождения решения $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ удовлетворяющая начальным условиям $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = \overline{1,n}$, называется ***задачей Коши***.

Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правые части уравнения (*) были непрерывны в окрестности начальной точки $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right)$.

Определение 8.2. Совокупность дифференцируемых по x функций

$$y_i = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n),\ i = \overline{1,n} \quad (**)$$

определенных в области $D \subset R^{n+1}$ изменения переменных $x, C_1, C_2, ..., C_n$ называют общим решением системы (*) в области D. В каждой точке области D решение задачи Коши существует и единственно, если выполняются условия:

1. Система уравнений (*) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$C_i = \psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n),\ i = \overline{1, n};$$

2. Совокупность функций (**) является решением системы (*) при всех значениях $C_1, C_2, ..., C_n$, которые получены, когда точка $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$.

Одним из способов решения нормальной системы является метод последовательного исключения неизвестных. Суть его состоит в следующем. Из системы (*) исключают $n-1$ функцию. Для этого составляют дополнительные уравнения, дифференцируя уравнения данной системы. Сведение нормальной системы к одному дифференциальному уравнению достигается исключением всех неизвестных, кроме одного. После нахождения этого неизвестного определяют остальные.

Пример. Решить систему: $\begin{cases} 5\dot{x} - 2\dot{y} + 4x - y = e^{-t}, \\ \dot{x} + 8x - 3y = 5e^{-t}. \end{cases}$

Дифференцируем второе уравнение еще раз:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} - 3\dot{y} = -5e^{-t}. \qquad \text{(a)}$$

Из первого уравнения выражаем $\dot{y} = \dfrac{5\dot{x} + 4x - y - e^{-t}}{2}$, а из второго уравнения – $y: y = \dfrac{\dot{x} + 8x - 5e^{-t}}{3}$ и подставляем в полученное уравнение (а):

$$\ddot{x} + 8\dot{x} - \frac{3}{2}\left(5\dot{x} + 4x - y - e^{-t}\right) = -5e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + 3y + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + 3y + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow$$

$$2\ddot{x} + 16\dot{x} - 15\dot{x} - 12x + \dot{x} + 8x - 5e^{-t} + 3e^{-t} = -10e^{-t} \Rightarrow 2\ddot{x} + 2\dot{x} - 4x = -8e^{-t} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -4e^{-t}.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решая соответствующее однородное уравнение, находим

$$x_{o.o.} = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Корни характеристического уравнения не совпали с корнем правой части неоднородного уравнения, тогда $x_{ч.н.} = A \cdot e^{-t}$. Методом неопределенных коэффициентов находим $A = 2$, тогда $x_{о.н.} = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + 2e^{-t}$.

Найдем $\dot{x}_{о.н.} = C_1 e^t - 2C_2 e^{-2t} - 2e^{-t}$ и подставим в формулу $y = \dfrac{\dot{x} + 8x - 5e^{-t}}{3}$, тогда

$$y_{о.н.} = 3C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} + 3e^{-t}.$$

Задаче к главе II

1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения:

1.1. $\left(x + 2x^3\right) \cdot dx + \left(y + 2y^3\right) \cdot dy = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = C$.

1.2. $y' \cdot \sin x = y \ln y$. Ответ: $y = e^{C \cdot tg\left(\frac{x}{2}\right)}$.

1.3. $y' = \dfrac{1 + y^2}{xy\left(1 + x^2\right)}$. Ответ: $\left(1 + y^2\right) \cdot \left(1 + x^2\right) = Cx^2$.

1.4. $3x^2 \cdot ydx + 2\sqrt{1 - x^3} \cdot dy = 0$. Ответ: $y = Ce^{\sqrt{4 - x^2}}$.

1.5. $x^2(y' - 1) = 2y'$. Ответ: $y = x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\dfrac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right| + C$.

Найти частное решение дифференциального уравнения:

1.6. $\left(1 + x^2\right) \cdot y^3 dx - \left(y^2 - 1\right) \cdot x^3 dy = 0$; начальные условия $y(1) = -1$. Ответ: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2\left(1 + \ln\left|\dfrac{x}{y}\right|\right)$.

1.7. $ydx + ctgx \cdot dy = 0$; начальные условия $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. Ответ: $y = -2\cos x$.

1.8. $\left(1 + e^x\right) \cdot y \cdot y' = e^x$; начальные условия $y(1) = 1$. Ответ: $y^2 = 1 + 2\ln\left(1 + e^x\right) - 2\ln(1 + e)$.

1.9. $2\sqrt{y} \cdot dx - xdy = 0$; начальные условия $y(0) = 1$. Ответ: $y = (x + 1)^2$.

1.10. $\left(xy^2+x\right)\cdot dx+\left(yx^2-y\right)\cdot dy=0$; начальные условия $y(0)=1$. Ответ: $y^2+1=\dfrac{2}{1-x^2}$.

2. Найти общее решение или общий интеграл:

2.1. $4x-3y+y'(2y-3x)=0$. Ответ: $y^2-xy+2x^2=C$.

2.2. $x\cdot y'=y\ln\dfrac{x}{y}$. Ответ: $y=x\cdot e^{Cx+1}$.

2.3. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{x}{y}$. Ответ: $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$.

2.4. $y\cdot y'=2y-x$. Ответ: $y-x=C\cdot e^{\frac{x}{y-x}}$.

2.5. $(3y-7x+7)\cdot dx-(3x-7y-3)\cdot dy=0$. Ответ: $(x+y+1)^5\cdot(x-y-1)=C$.

Найти частное решение дифференциального уравнения:

2.6. $x\cdot y'=y\left[1+\ln\dfrac{y}{x}\right]$; начальные условия $y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$. Ответ: $y=xe^{-x/2}$.

2.7. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$; начальные условия $y(1)=1$. Ответ: $y^2=x^2(2\ln x+1)$.

2.8. $\left(y^2+x^2\right)\cdot dx-2xydy=0$; начальные условия $y(4)=0$. Ответ: $(x-2)^2-y^2=4$.

2.9. $\left(2xy+x^2-y^2\right)\cdot dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)\cdot dy=0$; начальные условия $y(1)=-1$. Ответ: $x+y=0$.

2.10. $xdy-ydx=ydy$; начальные условия $y(0)=1$. Ответ: $\ln y+\dfrac{x}{y}=0$.

3. Решить уравнения:

3.1. $y'+\dfrac{y}{x}=xe^{\frac{x}{2}}$. Ответ: $y=\left(x-4+\dfrac{8}{x}\right)e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{C}{x}$.

3.2. $\left(y^2+x\right)\cdot y'=1$. Ответ: $x=C\cdot e^y-2y^2-4y-4$.

3.3. $3xdy=y\left(1+x\sin x-3y^3\sin x\right)\cdot dx$. Ответ: $x=y^3\left[3+C\cdot e^{\cos x}\right]$.

3.4. $2xy\dfrac{dy}{dx}-y^2+x=0$. Ответ: $y^2=x\cdot\ln\dfrac{C}{x}$.

3.5. $1-2xy'=y^3\cdot y'$. Ответ: $x=C\cdot e^{y^2}-\dfrac{1}{2}\left(1+y^2\right)$.

Найти частное решение:

3.6. $y'-3x^2y=x^5+x^2$; начальные условия $y(0)=1$. Ответ: $y=\dfrac{5}{3}e^{x^4}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}$.

3.7. $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$; начальные условия $y(0)=2$. Ответ: $y=3e^{-\sin x}+\sin x-1$.

3.8. $y'+x^2y=x^2$; начальные условия $y(2)=1$.

3.9. $y'-\dfrac{1}{3}y\cdot\sin x=y^4\cdot\sin x$; начальные условия $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Ответ: $y^2=\dfrac{1}{3-2e^{\cos x}}$.

3.10. $y'+\dfrac{3}{x}\cdot y=\dfrac{1}{x^3}$; начальные условия $y(1)=1$. Ответ: $y=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли:

4.1. $y'-ytgx=-y^2\cdot\cos x$. Ответ: $y=\dfrac{1}{\cos x(x+C)}$.

4.2. $3x^2y'+2x^3y=y^2\left(1+2x^2\right)$. Ответ: $\dfrac{1}{y}=Ce^{x^2}+\dfrac{1}{x}$.

4.3. $2\sin x\cdot y'+y\cos x=y^3\cdot(x\cos x-\sin x)$. Ответ: $\dfrac{1}{y^2}=C\sin x+x$.

4.4. $y'+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{2}(x+1)^3\cdot y^3$. Ответ: $\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$.

4.5. $8xy'-y=\dfrac{-1}{y^3\cdot\sqrt{x+1}}$. Ответ: $y^4=C\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

5. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения:

5.1. $(x+\sin y)\cdot dx+(x\cos y+\sin y)\cdot dy=0$.

Ответ: $\frac{x^2}{2}+x\sin y-\cos y=C$.

5.2. $x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)\cdot y'=0$. Ответ: $x^4+x^2y^2+y^4=C$.

5.3. $(12x+5y-9)\cdot dx+(5x+2y-4)\cdot dy=0$.

Ответ: $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=C$.

5.4. $(\ln y-2x)\cdot dx+\left(\frac{x}{y}-2y\right)\cdot dy=0$. Ответ: $x\ln y-x^2-y^2=C$.

5.5. $\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y}\cdot dy=0$. Ответ: $\frac{x}{y}=C$.

Найти частное решение или частный интеграл:

5.6. $\left(2xy\cdot e^{x^2}+\ln y\right)\cdot dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)\cdot dy=0$; начальные условия $y(0)=1$. Ответ: $x\ln y+ye^{x^2}=1$.

5.7. $3x^2\cdot e^y+\left(x^3\cdot e^y-1\right)\cdot y'=0$; начальные условия $y(0)=1$. Ответ: $x^3e^y-y=-1$.

5.8. $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)\cdot dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot dy=0$; начальные условия $y(0)=2$. Ответ: $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$.

5.9. $x\cdot dx+y\cdot dy+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$; начальные условия $y(1)=0$. Ответ: $x^2+y^2+2arctg\frac{y}{x}=1$.

5.10. $\left(3x^2y-4xy^2\right)\cdot dx+\left(x^3-4x^2y+12y^3\right)\cdot dy=0$; начальные условия $y(0)=0$. Ответ: $x^3y-2x^2y^2+3y^4=0$.

6. Найти решение дифференциального уравнения с помощью интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$:

6.1. $y\cdot dx-xdy+\ln x\cdot dx=0$, $\mu(x)$. Ответ: $y=Cx-\ln x-1$, $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$.

6.2. $\left(x^2\cos x-y\right)\cdot dx+x\cdot dy=0$, $\mu(x)$. Ответ: $y=x(C-\sin x)$.

6.3. $y\cdot dx-\left(x+y^2\right)\cdot dy=0$, $\mu(y)$. Ответ: $x=(C+y)y$.

6.4. $y\cdot\sqrt{1-y^2}\,dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)\cdot dy=0$, $\mu(y)$.
Ответ: $xy-\sqrt{1-y^2}=C$.

Задаче к главе III

7. Найти общее решение дифференциального уравнения
   7.1. $y'''=x+\cos x$. Ответ: $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$.
   7.2. $y''=x\cdot\sin x$. Ответ: $y=-x\sin x-2\cos x+C_1x+C_2$.
   7.3. $y''=\frac{-x}{y'}$. Ответ: $y=\pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right]+C_2$.
   7.4. $y\cdot y''-y'(1+y')=0$. Ответ: $y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$.
   7.5. $4y'+(y'')^2=xy''$. Ответ: $y=C_1x(x-C_1)+C_2$.
   Найти частное решение дифференциального уравнения.
   7.6. $y^3\cdot y''+1=0$; начальные условия $y(1)=y'(1)=1$. Ответ: $y^2+x^2=2x$.
   7.7. $y\cdot y''+(y')^2=1$; начальные условия $y(0)=1, y'(0)=-1$. Ответ: $x+y-1=0$.
   7.8. $y'''=x\cdot\ln x$; начальные условия $y(1)=y'(1)=0$, $y''(1)=0$. Ответ:
   $$y=\frac{x^4\ln x}{24}-\frac{13x^4}{288}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{9}+\frac{1}{32}.$$
   7.9. $y'''=x\cdot e^x$; начальные условия $y(1)=y'(1)=y''(0)=0$. Ответ:
   $$y=(x-3)e^x+\frac{x^2}{2}+2x+3.$$
   7.10. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$; начальные условия $y(2)=0, y'(2)=4$. Ответ:
   $$y=\frac{2x^2}{5}\cdot\sqrt{2x}-\frac{16}{5}.$$
8. Найти общее решение дифференциального уравнения.
   8.1. $y''-9y=0$.
   8.2. $y''-2y'+y=0$.
   8.3. $y''+y=0$.
   8.4. $y''-2y'-2y=0$.
   8.5. $y''+3y'=0$.

   Найти частное решение дифференциального уравнения

8.6. $y'' + 4y = 0$; начальные условия $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

8.7. $y'' - y = 0$; начальные условия $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

8.8. $y'' - 4y' + 4y = 0$; начальные условия $y(0) = 3, y'(0) = 1$.

8.9. $y'' - 2y' + 2y = 0$; начальные условия $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

8.10. $y'' - 2y' + 3y = 0$; начальные условия $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

9. Записать общее решение и определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения по известным корням характеристического уравнения и его правой части $f(x)$.

9.1. $k_1 = 0, k_2 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

9.2. $k_1 = -1, k_2 = 1$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

9.3. $k_{1,2} = -2 \pm 3i$, $f(x) = a\sin x$.

9.4. $k_1 = k_2 = 2$, $f(x) = ax^2 + b + de^{3x}$.

9.5. $k_{1,2} = \pm i$, $f(x) = a\cos x$.

9.6. $k_1 = 0, k_2 = 3$, $f(x) = 7x + xe^{2x}$.

9.7. $k_1 = k_2 = 1$, $f(x) = xe^x + 5\cos 3x$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения (в ответах даны только частные решения).

10.1. $y'' + 9y = 60e^{-x}$. Ответ: $y_{ч.н.} = 6e^{-x}$.

10.2. $y'' + y = 12\sin 2x$. Ответ: $y_{ч.н.} = -4\sin 2x$.

10.3. $y'' + 4y = x^2$. Ответ: $y_{ч.н.} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

10.4. $y'' + y = \cos x$. Ответ: $y_{ч.н.} = \frac{x}{2} \cdot \sin x$.

10.5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. Ответ: $y_{ч.н.} = \frac{x^2}{2} \cdot e^{2x}$.

Найти частное решение дифференциального уравнения

10.6. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, начальные условия $y(0) = y'(0) = 0$. Ответ:

$$y_{ч.н.} = \left(x + \frac{3}{5}\right) \cdot e^{-3x} + \frac{1}{5}[4\sin x - 3\cos x].$$

10.7. $y'' - y' = -5e^{-2x}(\sin x + \cos x)$, начальные условия $y(0) = -4, y'(0) = 5$.

Ответ: $y_{ч.н.} = e^{-x}(\sin x - 4\cos x)$.

10.8. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, начальные условия $y(\pi) = \pi e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}$.

Ответ: $y_{ч.н.} = xe^x(\sin x - \cos x)$.

11. Найти общее решение дифференциального уравнения.

11.1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$. Ответ:

$$y = \left[C_1 - \ln|\sin 2x| \cdot \cos 2x\right] + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} ctgx\right)\sin 2x.$$

11.2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$. Ответ: $y = e^x\left[C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2+1} + xarctgx\right]$.

11.3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$. Ответ: $y = e^x\left[C_1 + C_2 x + \sqrt{4-x^2} + x\arcsin\dfrac{x}{2}\right]$.

11.4. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$. Ответ: $y = \left[e^{-x} + e^{-2x}\right] \cdot \ln\left(e^x+1\right) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

Найти частное решение дифференциального уравнения

11.5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, начальные условия $y(1) = e, y'(1) = 3e$. Ответ:

$y_{ч.н.} = xe^x\left(1 + \ln|x|\right)$.

12.Решить систему дифференциальных уравнений.

12.1. $\begin{cases} \dot{x} - x = 5y, \\ \dot{y} + x = -3y. \end{cases}$ Ответ:

$$x = e^{-t}\left[C_1 \cos t + C_2 \sin t\right],\ y = \frac{e^{-t}}{5}\left[(C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t\right].$$

12.2. $\begin{cases} \dot{x} - 5x + 3y = 2e^{3t}, \\ \dot{y} - x - y = 5e^{-t} \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$.

Найти частное решение системы дифференциальных уравнений.

12.3. $\begin{cases} \dot{x} - 2x + y = 0, \\ \dot{y} - 2y + x = 5e^t \sin t, \end{cases}$ начальные условия $x(0) = 0, y(0) = 0$. Ответ:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}e^t + \dfrac{1}{2}e^{3t} + e^t\left(2\cos t - \sin t\right), \\ y = -\dfrac{5}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{3t} + e^t\left(3\cos t + \sin t\right). \end{cases}$$

13. Найти общее решение уравнения Эйлера, полагая $x = e^t$.

13.1. $x^2 y'' + 5xy' + 4x = 0$. Ответ: $y = \dfrac{1}{x^2} \cdot \left[C_1 + C_2 \ln|x|\right]$.

13.2. $x^2 y'' - 6y = 12\ln x$. Ответ: $y = C_1 x^3 + C_2 \cdot \dfrac{1}{x^2} - 2\ln x + \dfrac{1}{3}$.

13.3. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x$. Ответ: $y = C_1 x + C_2 x^2 - 4x\ln x$.

13.4. $x^2 y'' + 6y - 4xy' = x^5$. Ответ: $y = x^2 \cdot \left[C_1 x + C_2 + \dfrac{x^3}{6}\right]$.

13.5. $x^2y'' - xy' = -x + \frac{3}{x}$. Ответ: $y = x + \frac{1}{x} + C_1 + C_2x^2$.

§ 8. Использование дифференциальных уравнений в экономике

Пусть $y = y(t)$– объем производства, реализованный к моменту времени t. Считаем, что цена на данный товар остается постоянной. Тогда функция $y = y(t)$ удовлетворяет уравнению $y' = ky$, где $k = m \cdot p \cdot l$; m– норма инвестиций, p – продажная цена; l– коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скорости выпуска продукции.

Уравнение $y' = ky$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его решение имеет вид: $y = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Оно описывает динамику роста цен при постоянной инфляции.

В общем случае цена p является убывающей функцией от объема y реализованной продукции. Тогда уравнение принимает вид: $y' = m \cdot l \cdot p(y) \cdot y$.

Оно остается уравнением с разделяющимися переменными.

Деятельность предприятия можно описать дифференциальным уравнением

$$y' = l \cdot m \cdot p(y) \cdot y + l \cdot u - ky,$$

где k– коэффициент выбытия фондов, u – внешние инвестиции. Величина $m \cdot p(y) \cdot y$ представляет собой объем внутренних инвестиций.

Пример 1. В течение 6-ти месяцев завод десятую часть выручки направляет на расширения производства. Известно, что кривая спроса задается уравнение $p(y) = 330 - y$, где p– цена одной тонны продукции, y – объем продукции в тоннах. Скорость производства составляет один процент от вложенных инвестиций. Найти объем реализованной продукции за указанный период, если до его начала продавалось 30 тонн стали в месяц.

Решение. Обозначим массу выпущенной заводом продукции в момент времени t через $y(t)$. Тогда доход завода в момент t составит $(330 - y) \cdot y$ единиц; скорость производства равна $0.01 \cdot 0.1 \cdot (330 - y) \cdot y =$ $0.001 \cdot (330 - y) \cdot y$, откуда следует уравнение:

$y'_t = 0.001 \cdot (330 - y) \cdot y \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{(330 - y) \cdot y} = 0.001 \cdot dt$ – это дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Интегрируем его:

$$\int \frac{dy}{(330 - y) \cdot y} = \int 0.001 \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{330}\left[\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{330 - y}\right] = 0.001t \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{1}{330}\ln\left|\dfrac{Cy}{330 - y}\right| = 0.001t$ или $\dfrac{Cy}{330 - y} = e^{0.33t}$. Из начального условия: $y(0) = 30$ следует : $C = 10$, $10y = (330 - y) \cdot e^{0.33t}$. Выражаем

$$y = \frac{330}{1 + 10e^{-0.33t}}.$$

Рассматриваемый период 6 месяцев, поэтому