

ТОЭ – часть 2

практическое занятие 6

Расчет переходных процессов в
линейных цепях
интегралом Дюамеля

Интеграл **Дюамеля** используется для расчета переходных процессов в линейных **пассивных** цепях с **нулевыми** начальными условиями при воздействии **импульса** произвольной формы **источника** электрической энергии

Задача 1

Дано:

$$e(t) = 100e^{-200t} \text{ (В);}$$

$$C = 100 \text{ (мкФ); } R = 200 \text{ (Ом).}$$

Определить:

$$i(t) = ? \quad u_C(t) = ?$$

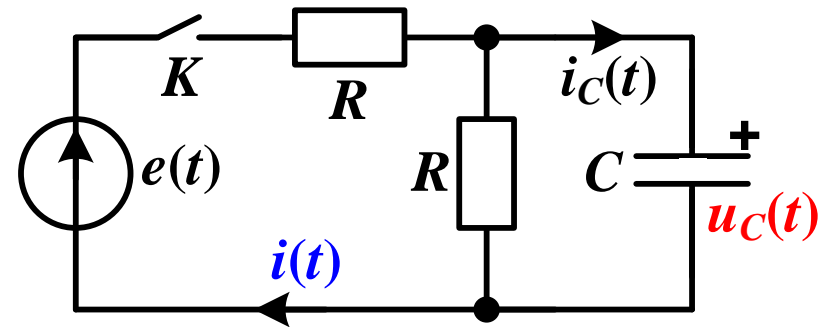
Ключ K замыкается:

а) до коммутации

ключ разомкнут;

б) после коммутации

ключ замкнут.



1. Находим переходные характеристики $h_1(t)$, $h_2(t)$ для $i(t)$, $u_C(t)$ при нулевых начальных условиях:
 $u_C(0)=0$.

Используем операторный метод и закон Ома:

а) ток

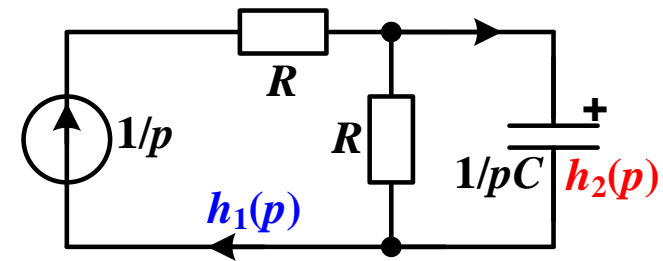
$$h_1(p) = (1/p) / [R + (R/pC) / (R + 1/pC)] =$$

$$= (1 + RCp) / [p(2R + R^2Cp)] = D_1(p) / B_1(p);$$

б) напряжение

$$h_2(p) = h_1(p) (R/pC) / (R + 1/pC) =$$

$$= 1 / [p(2 + RCp)] = D_2(p) / B_2(p).$$



По теореме разложения:

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} e^{p_k t} = (1/2R) + (1/2R)e^{-2t/RC} =$$
$$= 2,5 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-100t} \text{ (1/ Ом)}$$

- переходная проводимость;

$$h_2(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{D_2(p_k)}{B_2'(p_k)} e^{p_k t} = 0,5 - 0,5e^{-2t/RC} =$$
$$= 0,5 - 0,5e^{-100t}$$

- безразмерная переходная функция.

2. Находим ток $i(t)$ интегралом Дюамеля:

$$i(t) = e(0)h_1(t) + \int_0^t e'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau;$$

$$e(0) = 100 \text{ (В)}; e'(\tau) = -2 \cdot 10^4 e^{-200\tau} \text{ (В/с)};$$

$$h_1(t-\tau) = 2,5 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-100(t-\tau)} \text{ (1/Ом)}.$$

В результате:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0,25 + 0,25e^{-100t} + \int_0^t \left(-2 \cdot 10^4 e^{-200\tau}\right) \left[2,5 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-100(t-\tau)}\right] d\tau = \\ &= 0,25 + 0,25e^{-100t} - 50 \int_0^t e^{-200\tau} d\tau - 50e^{-100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau = 0,25 + 0,25e^{-100t} + \\ &+ 0,25 \left(e^{-200t} - 1\right) + 0,5e^{-100t} \left(e^{-100t} - 1\right) = -0,25e^{-100t} + 0,75e^{-200t} \text{ (А)}. \end{aligned}$$

3. Находим напряжение $u_C(t)$ интегралом Дюамеля:

$$u_C(t) = e(0)h_2(t) + \int_0^t e'(\tau)h_2(t-\tau)d\tau;$$

$$e(0) = 100 \text{ (В)}; e'(\tau) = -2 \cdot 10^4 e^{-200\tau} \text{ (В/с)};$$

$$h_2(t-\tau) = 0,5 - 0,5e^{-100(t-\tau)}.$$

В результате:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 50 - 50e^{-100t} + \int_0^t \left(-2 \cdot 10^4 e^{-200\tau}\right) \left[0,5 - 0,5e^{-100(t-\tau)}\right] d\tau = \\ &= 50 - 50e^{-100t} - 10^4 \int_0^t e^{-200\tau} d\tau + 10^4 e^{-100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau = 50 - 50e^{-100t} + \\ &+ 50 \left(e^{-200t} - 1\right) - 100e^{-100t} \left(e^{-100t} - 1\right) = 50e^{-100t} - 50e^{-200t} \text{ (В)}. \end{aligned}$$

4. Проверка: при $t=0$, когда L - разрыв, C - короткая; при $t=\infty$, когда L - короткая, C - разрыв.

$$i(0) = -0,25 + 0,75 = 0,5 \text{ (A)} = e(0)/R = 100/200 = 0,5 \text{ (A)} - \text{верно};$$

$$u_C(0) = 50 - 50 = 0 - \text{верно (нулевые начальные условия)};$$

$$i(\infty) = -0 + 0 = 0 \text{ (A)} = e(\infty)/2R = 0/400 = 0 \text{ (A)} - \text{верно};$$

$$u_C(\infty) = 0 - 0 = 0 \text{ (В)} = R \cdot i(\infty) = 200 \cdot 0 = 0 \text{ (В)} - \text{верно}.$$

Проверка при помощи Mathcad:

$$e(t) := 100 \cdot \exp(-200 \cdot t) \quad de(\tau) := -2 \cdot 10^4 \cdot \exp(-200 \cdot \tau)$$

$$h1(t) := 2.5 \cdot 10^{-3} + 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-100 \cdot t)$$

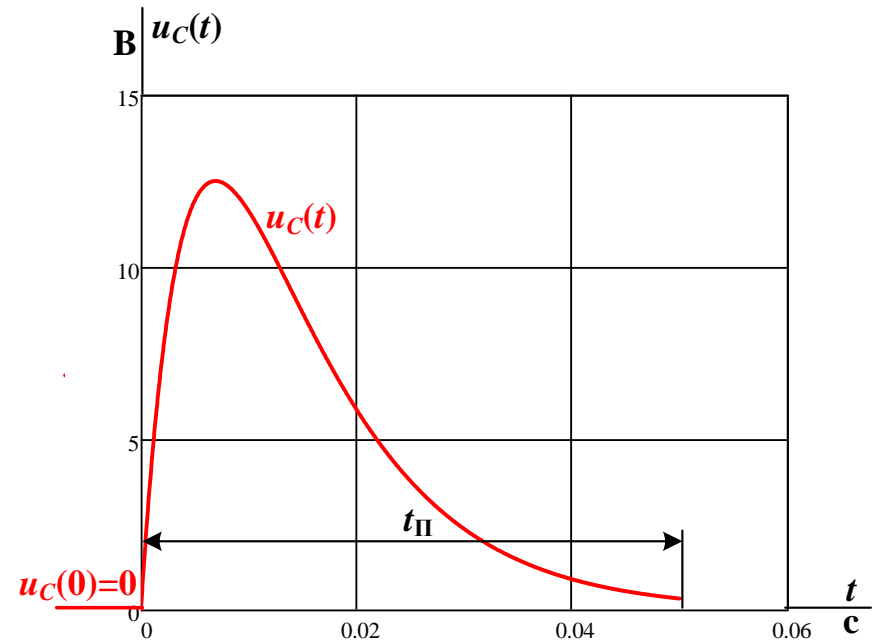
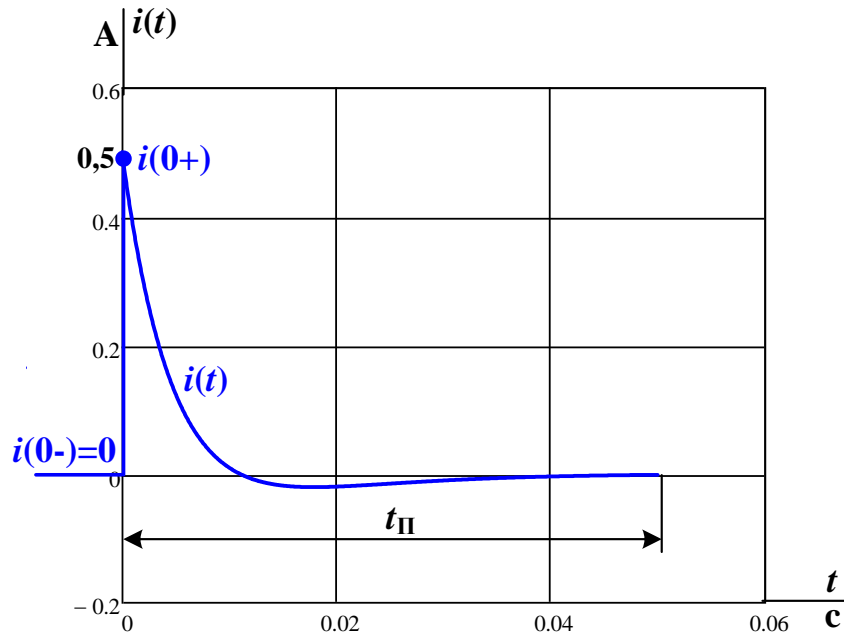
$$dh1(t, \tau) := 2.5 \cdot 10^{-3} + 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp[-100 \cdot (t - \tau)]$$

$$i(t) := e(0) \cdot h1(t) + \int_0^t de(\tau) \cdot dh1(t, \tau) d\tau$$

$$i(t) \text{ simplify} \rightarrow 0.75 \cdot e^{-200.0 \cdot t} - 0.25 \cdot e^{-100.0 \cdot t} - 6.3108872417680944433e-30$$

5. Графики зависимостей $i(t)$, $u_C(t)$ при

$0 < t < t_{\Pi} = 5/|p_{\min}| = 0,05$ (с):



Задача 2

Дано:

$$J(t) = 1e^{-100t} \text{ (A)};$$

$$L = 1 \text{ (Гн)}; R = 200 \text{ (Ом)}.$$

Определить:

$$i_L(t) = ? \quad u(t) = ?$$

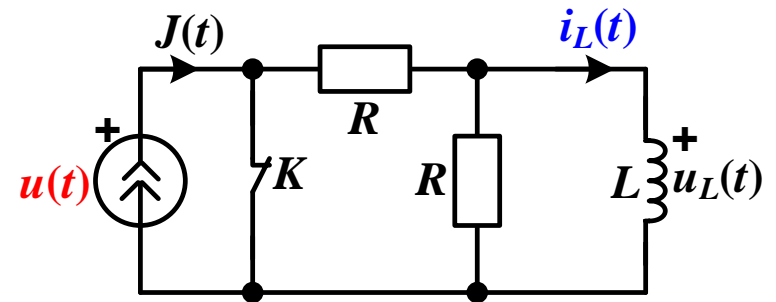
Ключ **K** **размыкается**:

а) **до** коммутации

ключ **замкнут**;

б) **после** коммутации

ключ **разомкнут**.



1. Находим переходные характеристики $h_1(t)$, $h_2(t)$ для $u(t)$, $i_L(t)$ при нулевых начальных условиях:
 $i_L(0)=0$.

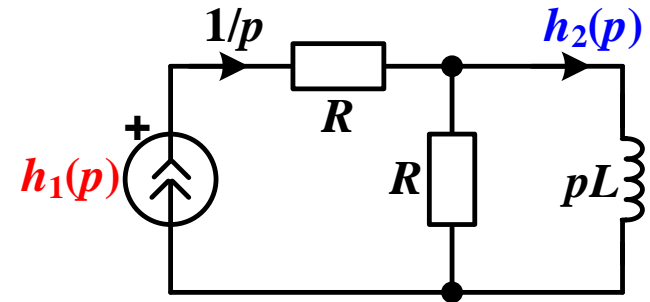
Используем операторный метод, закон Ома и правило разброса:

а) напряжение

$$h_1(p) = (1/p)[R + (RpL)/(R + pL)] = \\ = (R^2 + 2RLp)/[p(R + pL)] = D_1(p)/B_1(p);$$

б) ток

$$h_2(p) = (1/p)R/(R + pL) = \\ = R/[p(R + pL)] = D_2(p)/B_2(p).$$



По теореме разложения:

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} e^{p_k t} = R + R e^{-Rt/L} =$$
$$= 200 + 200 e^{-200t} \text{ (ОМ)}$$

- переходное сопротивление;

$$h_2(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{D_2(p_k)}{B_2'(p_k)} e^{p_k t} = 1 - 1 e^{-Rt/L} =$$
$$= 1 - 1 e^{-200t}$$

- безразмерная переходная функция.

2. Находим напряжение $u(t)$ интегралом Дюамеля:

$$u(t) = J(0)h_1(t) + \int_0^t J'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau;$$

$$J(0) = 1 \text{ (A)}; J'(\tau) = -100e^{-100\tau} \text{ (A/c)};$$

$$h_1(t-\tau) = 200 + 200e^{-200(t-\tau)} \text{ (OM)}.$$

В результате:

$$\begin{aligned} u(t) &= 200 + 200e^{-200t} + \int_0^t (-100e^{-100\tau}) [200 + 200e^{-200(t-\tau)}] d\tau = \\ &= 200 + 200e^{-200t} - 2 \cdot 10^4 \int_0^t e^{-100\tau} d\tau - 2 \cdot 10^4 e^{-200t} \int_0^t e^{100\tau} d\tau = 200 + 200e^{-200t} + \\ &+ 200(e^{-100t} - 1) - 200e^{-200t}(e^{100t} - 1) = 400e^{-200t} \text{ (B)}. \end{aligned}$$

3. Находим ток $i_L(t)$ интегралом Дюамеля:

$$i_L(t) = J(0)h_2(t) + \int_0^t J'(\tau)h_2(t-\tau)d\tau;$$

$$J(0) = 1 \text{ (A)}; J'(\tau) = -100e^{-100\tau} \text{ (A/c)};$$

$$h_2(t-\tau) = 1 - 1e^{-200(t-\tau)}.$$

В результате:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 1 - 1e^{-200t} + \int_0^t (-100e^{-100\tau}) [1 - 1e^{-200(t-\tau)}] d\tau = \\ &= 1 - 1e^{-200t} - 100 \int_0^t e^{-100\tau} d\tau + 100e^{-200t} \int_0^t e^{100\tau} d\tau = 1 - 1e^{-200t} + \\ &+ (e^{-100t} - 1) + e^{-200t} (e^{100t} - 1) = 2e^{-100t} - 2e^{-200t} \text{ (A)}. \end{aligned}$$

4. Проверка: при $t=0$, когда L - разрыв, C - замкнутая;
при $t=\infty$, когда L - замкнутая, C - разрыв.

$$u(0) = 400 \text{ (В)} = J(0) \cdot 2R = 1 \cdot 400 = 400 \text{ (В)} - \text{верно};$$

$$i_L(0) = 2 - 2 = 0 - \text{верно (нулевые начальные условия)};$$

$$u(\infty) = 0 \text{ (В)} = J(\infty) \cdot R = 0 \cdot 200 = 0 \text{ (В)} - \text{верно};$$

$$i_L(\infty) = 0 - 0 = 0 \text{ (А)} = J(\infty) = 0 \text{ (А)} - \text{верно}.$$