ТОЭ – часть 2
практическое занятие 4

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных цепях

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, характеризующие переходные процессы в линейных цепях могут быть решены при помощи интегральных преобразований Лапласа.

По найденному операторному изображению тока или напряжения, записанному в виде:

$$F(p)=\frac{D(p)}{B(p)}=\frac{d_0+d_1p+d_2p^2+\ldots+d_mp^m}{b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_np^n}$$

при

- **степени $m<n$;**
- **корни $B(p)=0$ различны;**
- **корни $D(p)=0$ и $B(p)=0$ различны;**

по теореме разложения находится оригинал:

$$f(t)=\sum_{к=1}^{n}\frac{D(p_к)}{B'(p_к)}\cdot e^{p_к t}$$

где

- p_k корни $B(p)=0$;
- $B'(p_к)=\left.\dfrac{dB(p)}{dp}\right|_{p=p_к}$

Задача 1

Дано:

E=300 (В);

L=1 (Гн); R=100 (Ом).

Определить:

$i(t)$=? $u_L(t)$=?

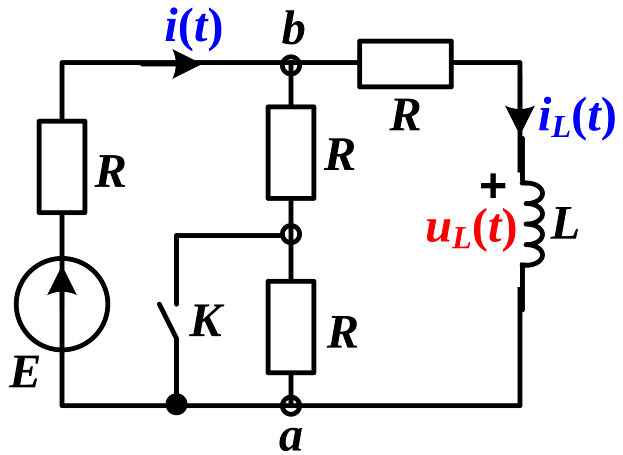
Ключ ***К*** **замыкается**:

а) **до** коммутации

ключ **разомкнут**;

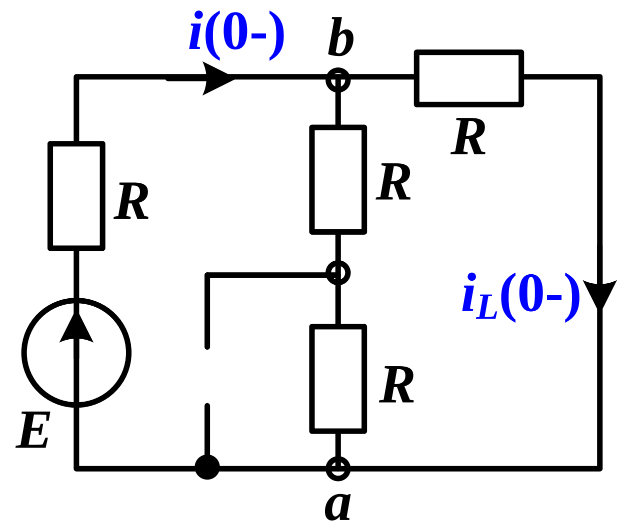
б) **после** коммутации

ключ **замкнут**.



1. Находим ННУ (схема до коммутации):

При постоянных источниках **L – закоротка**, **C – разрыв**.



По закону Ома:

$$i(0-)=E/(R+2RR/3R)=1{,}8\ (A).$$

По правилу разброса:

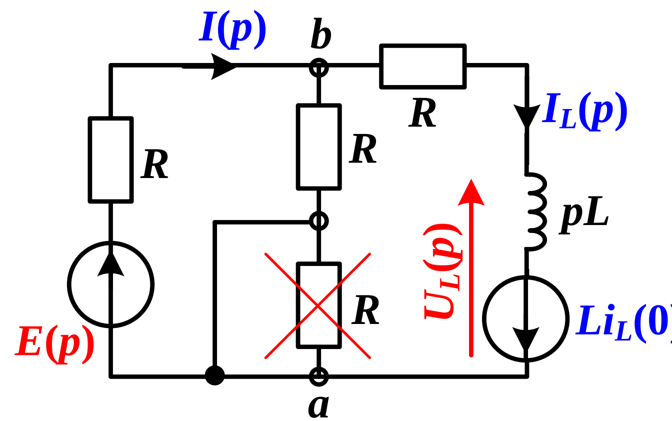
$$i_L(0-)=i(0-)2R/3R=1{,}2\ (A).$$

В результате ННУ:

$$i_L(0)=i_L(0-)=1{,}2\ (A).$$

2. Операторная схема после коммутации:

Постоянная ЭДС: $E(p)=E/p=300/p$ (Вс).



По методу узловых потенциалов: $\varphi_a(p)=0$ (Вс),

$\varphi_b(p)[2/R+1/(R+pL)] = E/pR -$

$- Li_L(0)/(R+pL)$.

В результате:

$$\varphi_b(p)=\frac{15000+90p}{p(150+p)};\ I(p)=\frac{\varphi_a(p)-\varphi_b(p)+E(p)}{R}=\frac{3}{p}-\frac{150+0,9p}{p(150+p)};$$

$$I_L(p)=\frac{\varphi_b(p)-\varphi_a(p)+Li_L(0)}{R+pL};\ U_L(p)=pLI_L(p)-Li_L(0)=\frac{-30}{150+p}.$$

3. По теореме разложения находим $i(t)$ и $u_L(t)$:

а) ток

$$I(p)=\frac{3}{p}-\frac{150+0,9p}{p(150+p)}=\frac{3}{p}-\frac{D_1(p)}{B_1(p)};$$

$$B_1(p)=p(150+p)=0\rightarrow p_1=0;\ p_2=-150\,(1/\text{с}).\quad B_1^{'}(p)=150+2p.$$

$$i(t)=3-\frac{150+0,9\cdot 0}{150+2\cdot 0}e^{0t}-\frac{150+0,9\cdot(-150)}{150+2\cdot(-150)}e^{-150t}=2+0,1e^{-150t}\ (\text{А});$$

б) напряжение

$$U_L(p)=\frac{-30}{150+p}=\frac{D_2(p)}{B_2(p)};$$

$$B_2(p)=(150+p)=0\rightarrow p_1=-150\,(1/\text{с}).\quad B_2^{'}(p)=1.$$

$$u_L(t)=-30e^{-150t}\ (\text{В}).$$

Задача 2

Дано:

J=2 (А);

C=100 (мкФ); R=100 (Ом).

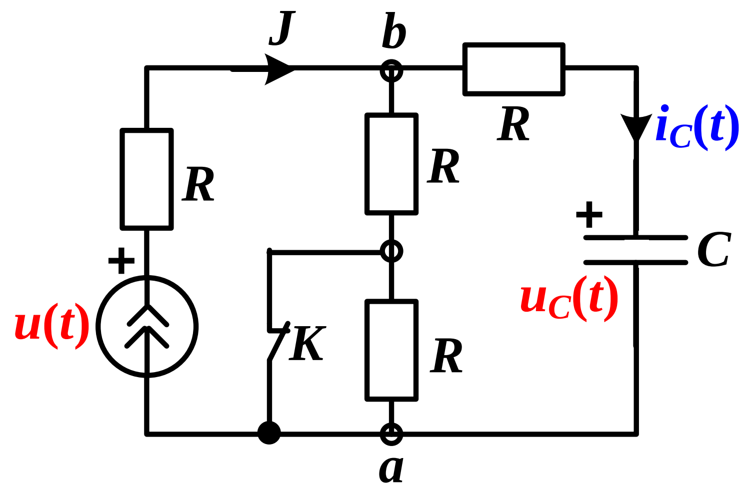
Определить:

$u(t)$=? $u_C(t)$=?

Ключ ***К*** **размыкается**:

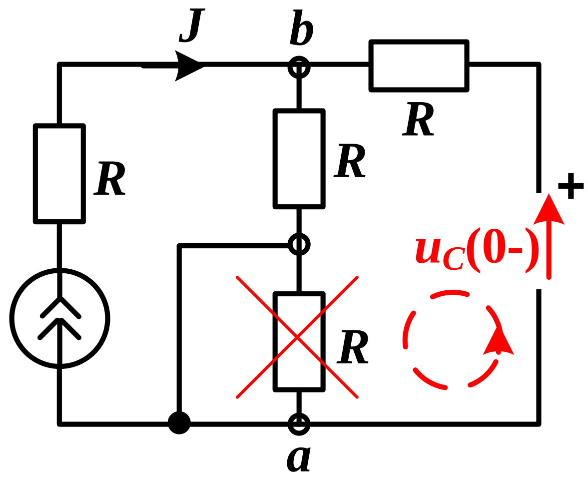
а) **до** коммутации ключ **замкнут**;

б) **после** коммутации ключ **разомкнут**.



1. Находим ННУ (схема до коммутации):

При постоянных источниках **L – закоротка**, **C – разрыв**.



По 2-му закону Кирхгофа:

$$u_C(0-)=RJ=200\ \text{(В)}.$$

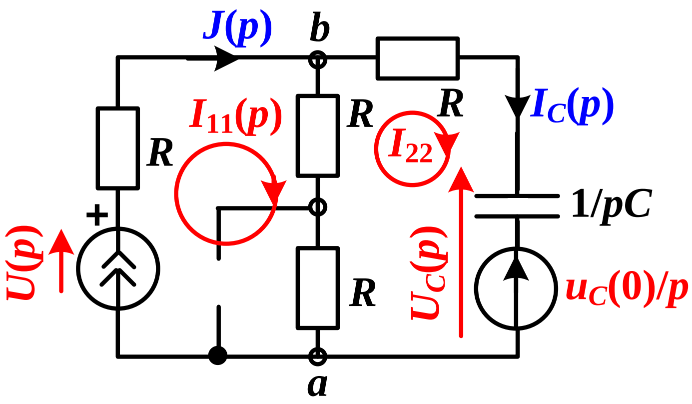
В результате ННУ:

$$u_C(0)=u_C(0-)=200\ \text{(В)}.$$

2. Операторная схема после коммутации:

Постоянный источник тока: $J(p)=J/p=2/p$ (Ас).

По методу контурных токов:



$I_{11}(p)=J(p)=2/p$ (Ас),

$I_{22}(p)[3R+1/pC]-2RI_{11}(p) = -u_C(0)/p.$

В результате:

$$I_{22}(p)=I_C(p)=\frac{0,02}{0,03p+1};$$

$$U_C(p)=\frac{1}{pC}I_C(p)+\frac{u_C(0)}{p}=\frac{200}{p}+\frac{200}{p(0,03p+1)};$$

$$U(p)=RJ(p)+\left(R+\frac{1}{pC}\right)I_C(p)+\frac{u_C(0)}{p}=\frac{400}{p}+\frac{2p+200}{p(0,03p+1)}.$$

3. По теореме разложения находим $\boldsymbol{u(t)}$ и $\boldsymbol{u_C(t)}$:

а) напряжение на источнике тока

$$U(p)=\frac{400}{p}+\frac{2p+200}{p(0,03p+1)}=\frac{400}{p}+\frac{D_1(p)}{B_1(p)};$$

$$B_1(p)=p(0,03p+1)=0\rightarrow p_1=0;\ p_2=-33,3\,(1/\text{с}).\ B_1'(p)=0,06p+1.$$

$$u(t)=400+\frac{2\cdot 0+200}{0,06\cdot 0+1}e^{0t}+\frac{2\cdot(-33,3)+200}{0,06\cdot(-33,3)+1}e^{-33,3t}=600-133,3e^{-33,3t}\ (\text{В});$$

б) напряжение на емкостном элементе

$$U_C(p)=\frac{200}{p}+\frac{200}{p(0,03p+1)}=\frac{200}{p}+\frac{D_2(p)}{B_2(p)};$$

$$B_2(p)=p(0,03p+1)=0\rightarrow p_1=0;\ p_2=-33,3\,(1/\text{с}).\ B_2'(p)=0,06p+1.$$

$$u_C(t)=200+\frac{200}{0,06\cdot 0+1}e^{0t}+\frac{200}{0,06\cdot(-33,3)+1}e^{-33,3t}=400-200e^{-33,3t}\ (\text{В}).$$

Задача 3

Дано:

E=100 (В); C=100 (мкФ);

L=0,8 (Гн); R=100 (Ом).

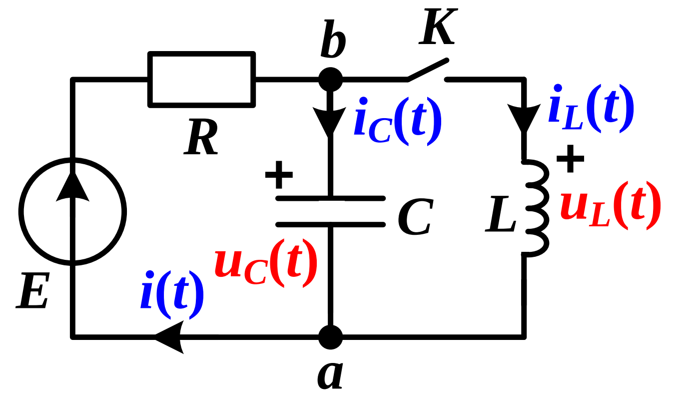
Определить:

$i(t)=?$

Ключ ***К*** **замыкается**:

а) **до** коммутации ключ **разомкнут**;

б) **после** коммутации ключ **замкнут**.



1. Находим ННУ (схема до коммутации):

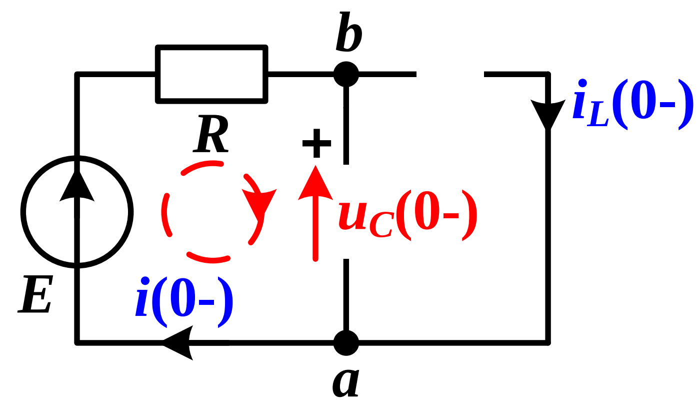
При постоянных источниках ***L* – закоротка**, ***C* – разрыв**.

По 2-му закону Кирхгофа:

$u_C(0\text{-})=E=100$ **(В),**

причем

$i(0\text{-})=i_L(0\text{-})=0$ **(А).**



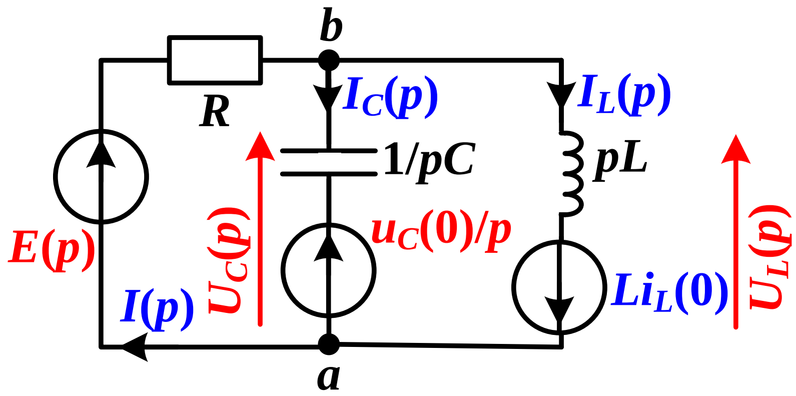
В результате ННУ:

$i_L(0)=i_L(0\text{-})=0$ **(А),**

$u_C(0)=u_C(0\text{-})=100$ **(В).**

2. Операторная схема после коммутации:

Постоянная ЭДС: $E(p)=E/p=100/p$ **(Вс).**



По методу узловых потенциалов: $\varphi_a(p)=0$ **(Вс),**

$\varphi_b(p)[1/R+pC+1/pL] = E/pR + u_C(0)pC/p - Li_L(0)/pL.$

В результате:

$$\varphi_b(p)=\frac{10000+100p}{p^2+100p+12500};\ U_C(p)=U_L(p)=\varphi_b(p)-\varphi_a(p);$$

$$I(p)=\frac{\varphi_a(p)-\varphi_b(p)+E(p)}{R}=\frac{12500}{p\left(p^2+100p+12500\right)}.$$

3. По теореме разложения находим $i(t)$:

$$I(p)=\frac{12500}{p\left(p^2+100p+12500\right)}=\frac{D_1(p)}{B_1(p)};$$

$$B_1(p)=p\left(p^2+100p+12500\right)=0$$

$$\rightarrow p_1=0;\ p_{2,3}=-50\pm j100\,(1/\text{с}).\quad B_1^{'}(p)=3p^2+200p+12500.$$

$$i(t)=1e^{0t}+\frac{12500}{B_1^{'}(p_2)}e^{p_2t}+\frac{12500}{B_1^{'}(p_3)}e^{p_3t}=$$

$$=1+0,559e^{j153,4^\circ}e^{p_2t}+0,559e^{-j153,4^\circ}e^{p_3t}=$$

$$=1+1,118e^{-50t}\,\frac{e^{j\left(100t+153,4^\circ\right)}+e^{-j\left(100t+153,4^\circ\right)}}{2}=$$

$$=1+1,118e^{-50t}\cos\left(100t+153,4^\circ\right),\ \text{А}.$$

Задача 4

Дано:

$J=2e^{-100t}$ (А);

$L=1$ (Гн); $R=100$ (Ом).

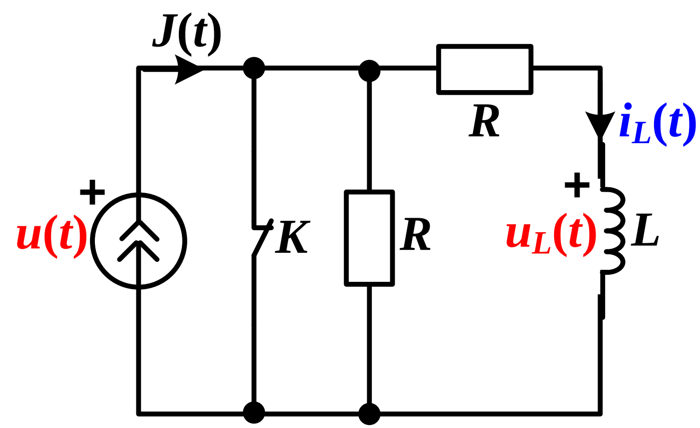
Определить:

$u(t)=?$ $i_L(t)=?$ $u_L(t)=?$

Ключ ***К*** **размыкается**:

а) **до** коммутации ключ **замкнут**;

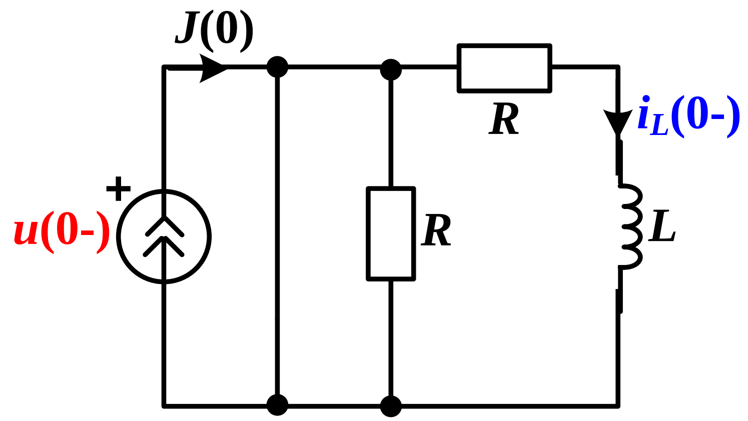
б) **после** коммутации ключ **разомкнут**.



1. Находим ННУ (схема до коммутации):

Источник тока закорочен:

$u(0\text{-})=0$ (В); $i_L(0\text{-})=0$ (А).



В результате ННУ:

$i_L(0)=i_L(0\text{-})=0$ (А).

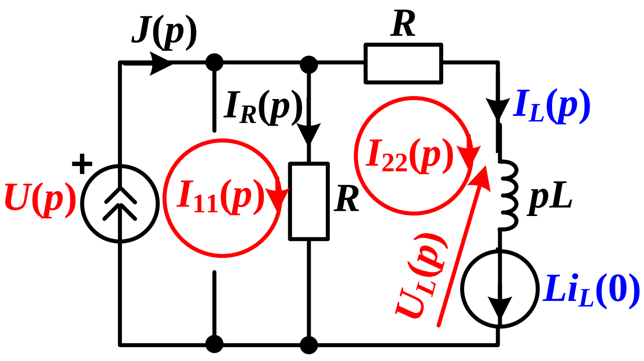
2. Операторная схема после коммутации:

Импульсный источник тока: $J(p)=2/(p+100)$ (Ас).

По методу контурных токов:

$I_{11}(p)=J(p)=2/(p+100)$ (Ac),

$I_{22}(p)[2R+pL]-RI_{11}(p)=Li_L(0)$.



В результате:

$$I_{22}(p)=I_L(p)=\frac{200}{(p+100)(p+200)};\ I_R(p)=I_{11}(p)-I_{22}(p)=\frac{2p+200}{(p+100)(p+200)};$$

$$U_L(p)=pL\cdot I_L(p)-Li_L(0)=\frac{200p}{(p+100)(p+200)};$$

$$U(p)=RI_R(p)=\frac{200p+20000}{(p+100)(p+200)}.$$

3. По теореме разложения находим $u(t)$, $i_L(t)$ и $u_L(t)$:

а) напряжение на источнике тока

$$U(p)=\frac{200p+20000}{(p+100)(p+200)}=\frac{D_1(p)}{B(p)};$$

$$B(p)=(p+100)(p+200)=0\rightarrow p_1=-100\,(1/\text{с});\ p_2=-200\,(1/\text{с}).$$

$$B'(p)=2p+300.$$

$$u(t)=\frac{200\cdot(-100)+20000}{2\cdot(-100)+300}e^{-100t}+\frac{200\cdot(-200)+20000}{2\cdot(-200)+300}e^{-200t}=200e^{-200t}\ (\text{В});$$

б) ток в индуктивном элементе

$$I_L(p)=\frac{200}{(p+100)(p+200)}=\frac{D_2(p)}{B(p)};$$

$$i_L(t)=\frac{200}{2\cdot(-100)+300}e^{-100t}+\frac{200}{2\cdot(-200)+300}e^{-200t}=2e^{-100t}-2e^{-200t}\ (\text{А});$$

в) напряжение на индуктивном элементе

$$U_L(p) = \frac{200p}{(p+100)(p+200)} = \frac{D_3(p)}{B(p)};$$

$$u_L(t) = \frac{200\cdot(-100)}{2\cdot(-100)+300}e^{-100t} + \frac{200\cdot(-200)}{2\cdot(-200)+300}e^{-200t} =$$

$$= -200e^{-100t} + 400e^{-200t}\ (\text{В}).$$