ТОЭ – часть 2
практическое занятие 3

Классический метод расчета переходных процессов в цепях второго порядка

Цепь 2-го порядка после коммутации содержит:
- L и C, или две L, или две C.

Эта цепь характеризуется линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2:

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t)$$

которые имеют решения:

$$f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t)$$

Характеристическое уравнение

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}$$

В зависимости от вида корней возможны апериодический, критический и колебательный переходные процессы

Задача

Дано:

E=300 (В); L=0,1 (Гн);

C=300 (мкФ); R=100 (Ом).

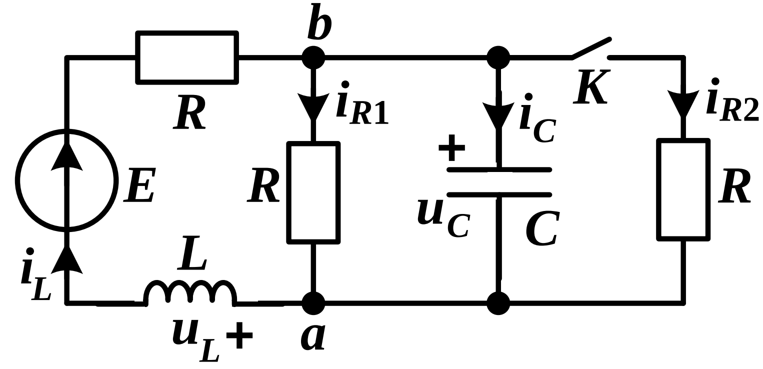
Определить:

$i_L(t)$=? $u_L(t)$=? $i_C(t)$=? $u_C(t)$=? $i_{R2}(t)$=?

Ключ ***К*** **замыкается**:

а) **до** коммутации ключ **разомкнут**;

б) **после** коммутации ключ **замкнут**.



1. Находим ННУ (схема до коммутации):

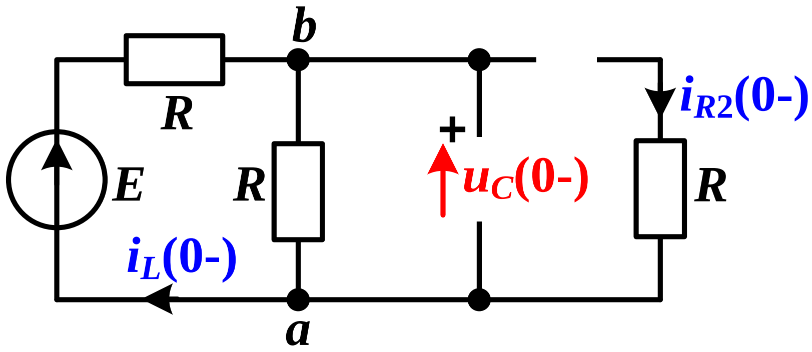
При постоянных источниках **L – закоротка**, **C – разрыв**.

По закону Ома:

$\boldsymbol{i_L(0-)=E/2R=1{,}5}$ **(А);**

$\boldsymbol{u_C(0-)=Ri_L(0-)=150}$ **(В);**

причем $\boldsymbol{i_{R2}(0-)=0}$.

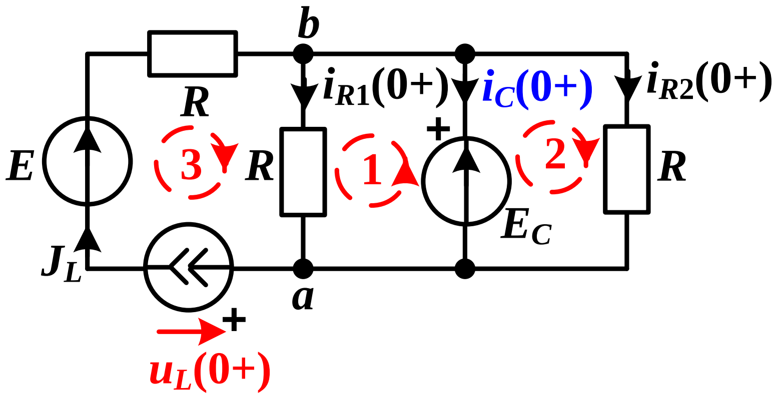


В результате ННУ:

$\boldsymbol{i_L(0-)=1{,}5}$ **(А);** $\boldsymbol{u_C(0-)=150}$ **(В).**

2. Находим ЗНУ (схема после коммутации):

$$J_L = i_L(0-) = i_L(0+) = 1{,}5\ (\text{А});\ E_C = u_C(0-) = u_C(0+) = 150\ (\text{В}).$$



По законам Кирхгофа:

1 и 2 контур

$$i_{R1}(0+) = i_{R2}(0+) = E_C/R = 1{,}5\ (\text{А});$$

3 контур

$$u_L(0+) = E - RJ_L - Ri_{R1}(0+) = 0\ (\text{В});$$

узел *b*

$$i_C(0+) = J_L - i_{R1}(0+) - i_{R2}(0+) = -1{,}5\ (\text{А}).$$

3. Находим ПС (схема после коммутации при t=∞):

При постоянных источниках ***L* – закоротка**, ***C* – разрыв**.

По закону Ома:

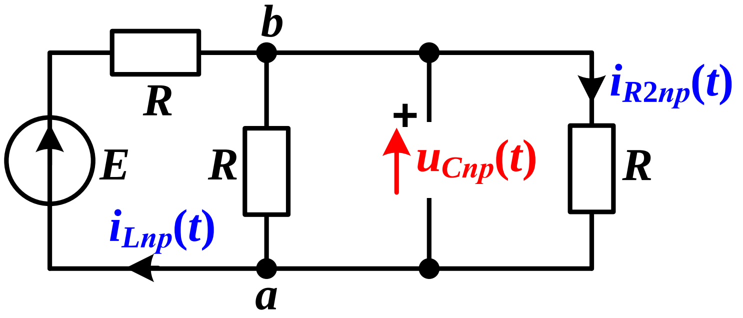
$$i_{Lпр}(t)=E/(R+R/2)=2\ (А);$$

$$u_{Cпр}(t)=0{,}5Ri_{Lпр}(t)=100\ (В),$$

причем

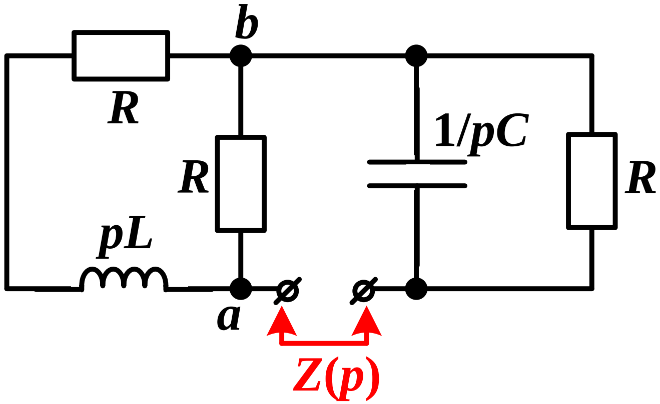
$$i_{R2пр}(t)=0{,}5i_{Lпр}(t)=1\ (А);$$

$$i_{Cпр}(t)=0;\ u_{Lпр}(t)=0.$$



4. Находим корни характеристического уравнения (схема после коммутации): $p_{1,2}$=?

ЭДС *E* – закоротка, индуктивный элемент *L* ➡ *pL* ; емкостный элемент *C* ➡ 1/*pC* .



Сопротивление:

$Z(p)=(pL+R)R/(2R+pL)+$
$+(R/pC)/(R+1/pC)=0$, или

$p^2+(R/L+2/RC)p+(3/LC)=0$, тогда

$p_1= -103{,}9$ (1/с); $p_2= -962{,}8$ (1/с) - апериодический процесс.

Постоянные времени:

$\tau_1 = 1/|p_1| = 9{,}62$ (мс); $\tau_2 = 1/|p_2| = 1{,}04$ (мс);

длительность переходного процесса:

$t_П = 5\max(\tau_1,\tau_2) = 0{,}048$ (с)=48 (мс).

5. Ток и напряжение индуктивного элемента:

$i_L(t)=i_{Lnp}(t)+A_1\exp(p_1t)+A_2\exp(p_2t);$

$u_L(t)=Ldi_L(t)/dt=u_{Lnp}(t)+Lp_1A_1\exp(p_1t)+Lp_2A_2\exp(p_2t)$

При $t=0+$:

$$A_1=\frac{u_L(0+)-u_{Lnp}(0)+Lp_2\left[i_{Lnp}(0)-i_L(0+)\right]}{L(p_1-p_2)}=-0,56(\mathrm{A});$$

$$A_2=i_L(0+)-i_{Lnp}(0)-A_1=0,06(\mathrm{A}).$$

Окончательный результат:

$i_L(t)=2-0,56\exp(p_1t)+0,06\exp(p_2t),\ (\mathrm{A});$

$u_L(t)=5,8\exp(p_1t)-5,8\exp(p_2t),\ (\mathrm{B}).$

6. Ток и напряжение емкостного элемента:

$u_C(t)=u_{Cпр}(t)+B_1\exp(p_1t)+ B_2\exp(p_2t);$

$i_C(t)=Cdu_C(t)/dt= i_{Cпр}(t)+Cp_1B_1\exp(p_1t)+ Cp_2B_2\exp(p_2t).$

При $t=0+$:

$$B_1=\frac{i_C(0+)-i_{Cпр}(0)+Cp_2\left[u_{Cпр}(0)-u_C(0+)\right]}{C(p_1-p_2)}=50,2\,(В);$$

$$B_2=u_C(0+)-u_{Cпр}(0)-B_1=-0,2\,(В).$$

Окончательный результат:

$u_C(t)=100 + 50,2\exp(p_1t) - 0,2\exp(p_2t)$, (В);

$i_C(t)= -1,56\exp(p_1t)+ 0,06\exp(p_2t)$, (А).

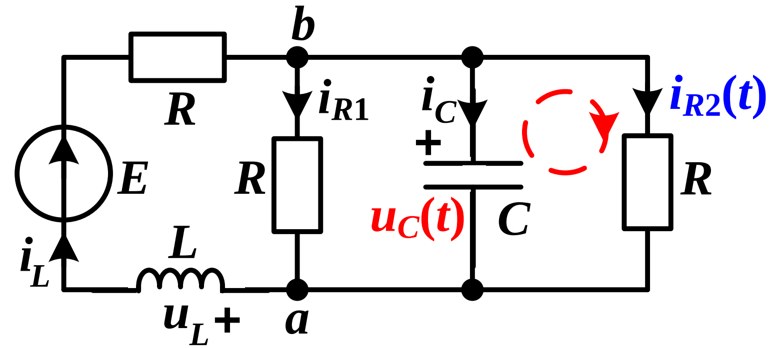
7. Ток резистивного элемента:

По 2-му закону Кирхгофа для схемы после коммутации:

$-u_C(t)+Ri_{R2}(t)=0,$

тогда

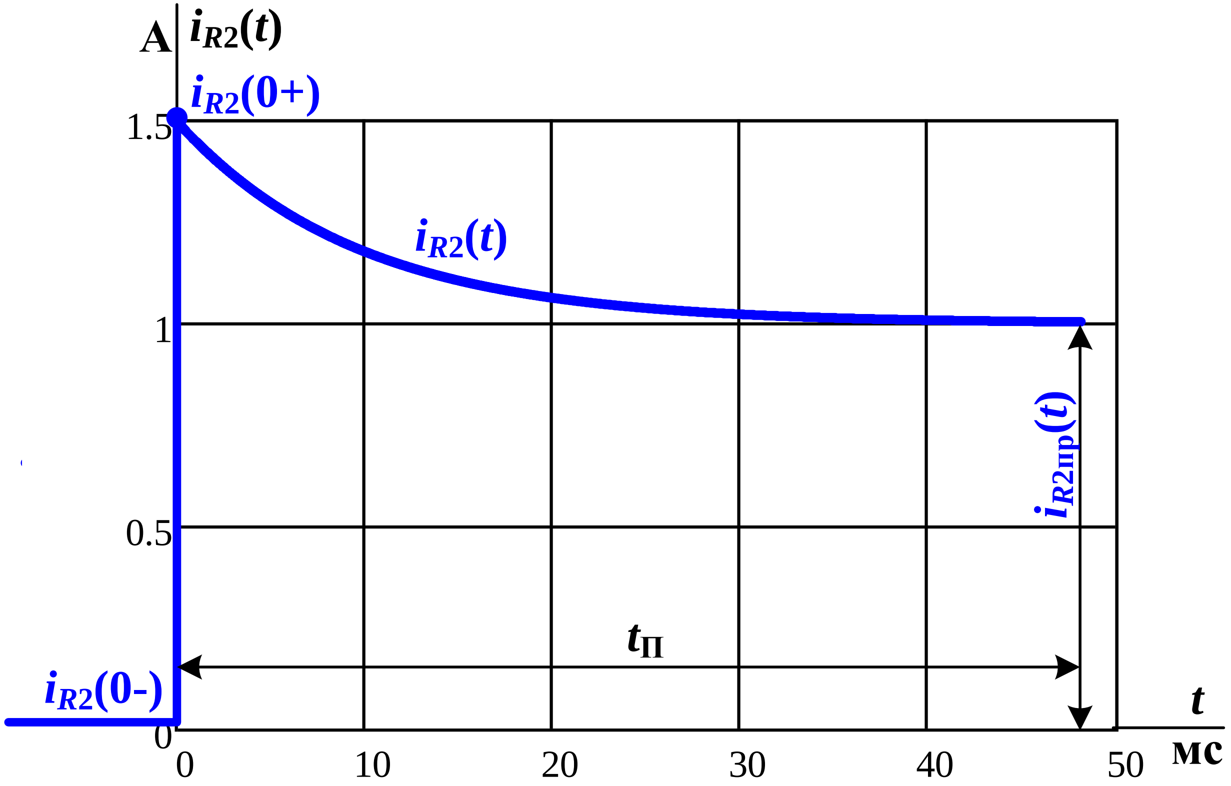
$i_{R2}(t)=u_C(t)/R.$



В результате:

$$i_{R2}(t)=1 + 0{,}502\exp(p_1t) - 0{,}002\exp(p_2t),\ (A).$$

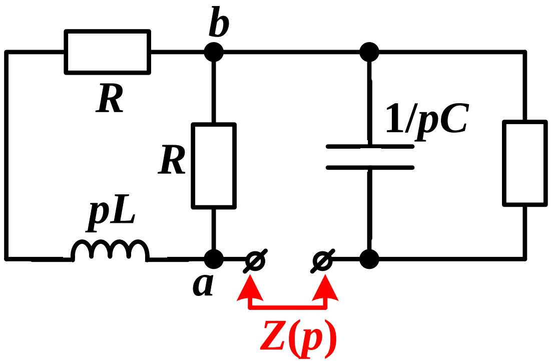
7. График зависимости $i_{R2}(t)$ при $0 < t < t_{П}$:



Примечание: C =50 (мкФ).

4. Находим корни характеристического уравнения (схема после коммутации): $p_{1,2}$=?

Сопротивление:



$Z(p)=(pL+R)R/(2R+pL)+$
$+(R/pC)/(R+1/pC)=0$, или

$p^2+(R/L+2/RC)p+(3/LC)=0$, тогда

$p_{1,2}= -700 \pm j331{,}66$ (1/с)

- колебательный процесс.

δ=700 (1/с); ω=331,66 (1/с).

Постоянная времени:

$\tau = 1/\delta = 1{,}43$ (мс);

длительность переходного процесса:

$t_{П} = 5\tau = 0{,}00715$ (с)=7,15 (мс).

5. Ток и напряжение индуктивного элемента:

$i_L(t)=i_{Lпр}(t)+A\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\alpha);$

$u_L(t)=Ldi_L(t)/dt= u_{Lпр}(t) - L\delta A\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\alpha) -$

$- L\omega A\exp(-\delta t)\sin(\omega t+\alpha).$

При $t=0+$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left\{\frac{u_L(0+)-u_{Lпр}(0)}{\omega L\left[i_{Lпр}(0)-i_L(0+)\right]}-\frac{\delta}{\omega}\right\}=-64,65^\circ;$$

$$A=\frac{i_L(0+)-i_{Lпр}(0)}{\cos(\alpha)}=-1,168\,(\mathrm{A}).$$

$i_L(t)=2-1,168\exp(-700t)\cos(331,66t-64,65^o)$, (A);

$u_L(t)= 81,7\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\alpha)+38,7\exp(-\delta t)\sin(\omega t+\alpha)\rightarrow$

$\rightarrow \exp(-\delta t)[81,7e^{j(\alpha+90^o)}+38,7e^{j\alpha}] = \exp(-\delta t)[90,45e^{j0^o}]\rightarrow$

$\rightarrow 90,45\exp(-700t)\sin(331,66t)$, (B).

6. Напряжение и ток емкостного элемента:

$u_C(t)=u_{Cnp}(t)+B\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\beta);$

$i_C(t)=C du_C(t)/dt= i_{Cnp}(t) - C\delta B\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\beta) -$

$- C\omega B\exp(-\delta t)\sin(\omega t+\beta).$

При $t=0+$: $$\beta = \mathrm{arctg}\left\{\frac{i_C(0+)-i_{Cnp}(0)}{\omega C\left[u_{Cnp}(0)-u_C(0+)\right]}-\frac{\delta}{\omega}\right\}=-16,78^\circ;$$

$$B=\frac{u_C(0+)-u_{Cnp}(0)}{\cos(\beta)}=52,22\,(\mathrm{B}).$$

$u_C(t)=100+52,22\exp(-700t)\cos(331,66t-16,78^o)$, (В);

$i_C(t)= -1,828\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\beta)-0,87\exp(-\delta t)\sin(\omega t+\beta)=$

$= 2,023\exp(-700t)\sin(331,66t-132^o)$, (А).

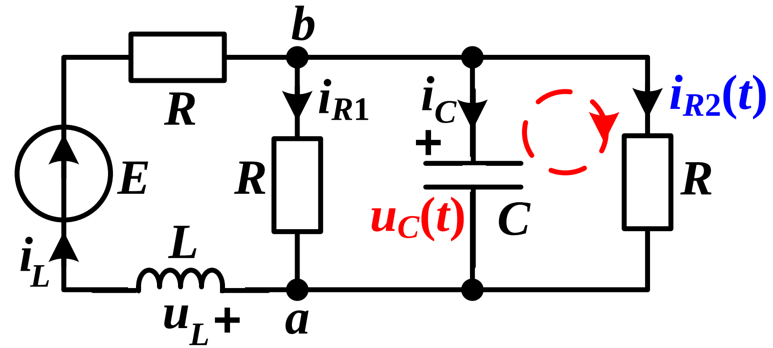
7. Ток резистивного элемента:

По 2-му закону Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$-u_C(t)+Ri_{R2}(t)=0,$$

тогда

$$i_{R2}(t)=u_C(t)/R.$$



В результате:

$$i_{R2}(t)= 1+0{,}522\exp(-700t)\cos(331{,}66t-16{,}78^o),\ (\text{A}).$$