ТОЭ – часть 2
практическое занятие 19

Уравнения и граничные условия магнитного поля постоянного тока

Уравнения магнитного поля в прямоугольной системе координат

$$\overline{H} = H_x \cdot \bar{1}_x + H_y \cdot \bar{1}_y + H_z \cdot \bar{1}_z\,;$$

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}\,;$$

$$\bar{\delta} = \operatorname{rot}\overline{H} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z\,;$$

$$\bar{\delta} = \delta_x \cdot \bar{1}_x + \delta_y \cdot \bar{1}_y + \delta_z \cdot \bar{1}_z \,;$$

$$\bar{B} = B_x \cdot \bar{1}_x + B_y \cdot \bar{1}_y + B_z \cdot \bar{1}_z \,;$$

$$\operatorname{div}\bar{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0;$$

$$\bar{\mathrm{H}} = -\operatorname{grad}(\varphi_{\mathrm{M}}) = -\frac{\partial \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial x} \cdot \bar{1}_x - \frac{\partial \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial y} \cdot \bar{1}_y - \frac{\partial \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial z} \cdot \bar{1}_z \,;$$

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{M}} = \frac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{M}}}{\partial z^2} = 0;$$

$$\overline{A} = A_x \cdot \bar{1}_x + A_y \cdot \bar{1}_y + A_z \cdot \bar{1}_z\ ;$$

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0;$$

$$\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z\ ;$$

$$\nabla^2 \overline{A} = \left(\nabla^2 A_x\right) \cdot \bar{1}_x + \left(\nabla^2 A_y\right) \cdot \bar{1}_y + \left(\nabla^2 A_z\right) \cdot \bar{1}_z = -\mu_a \bar{\delta};$$

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_x;$$

$$\nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_y;$$

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_z.$$

Задача 1. В среде с постоянной магнитной проницаемостью $\boldsymbol{\mu_a}$ при векторе напряженности

$$\overline{H} = H_x \cdot \bar{1}_x + H_y \cdot \bar{1}_y + H_z \cdot \bar{1}_z =$$

$$= ax^2 \cdot \bar{1}_x - 3xy \cdot \bar{1}_y + 5xz \cdot \bar{1}_z \text{, (А/м)}$$

найти коэффициент $\boldsymbol{a}$ и в точке с координатами **x=1 (м), y=3 (м), z=2** (м) определить модуль вектора плотности тока $\boldsymbol{\delta}$ (А/м^2).

Решение. Для определения коэффициента ***a*** вектора напряженности используем

$$\operatorname{div}\overline{B} = \operatorname{div}(\mu_a \overline{H}) = \mu_a \cdot \operatorname{div}(\overline{H}) = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{div}(\overline{H}) = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 2ax - 3x + 5x = 0,$$

тогда искомый коэффициент составит: ***a* = –1** (А/м^3).

На основании уравнения

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \overline{\delta} = \delta_x \cdot \bar{1}_x + \delta_y \cdot \bar{1}_y + \delta_z \cdot \bar{1}_z$$

находим составляющие вектора плотности тока в точке с координатами **x=1 (м), y=3 (м), z=2** (м):

$$\delta_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 - 5z =$$

$$= -5z = -5 \cdot 2 = -10 \text{ (А/м}^2\text{)};$$

$$\delta_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -3y - 0 =$$

$$= -3y = -3 \cdot 3 = -9 \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

В результате искомый **модуль** вектора плотности будет равен:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} =$$

$$= \sqrt{0^2 + (-10)^2 + (-9)^2} = 13,454 \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

Задача 2. При заданном скалярном магнитном потенциале

$$\varphi_{\text{М}} = 3x - 4y + 2z\,,(\text{А})$$

найти модуль вектора напряженности ***H*** (А/м).

Решение. Вектор напряженности найдем из уравнения:

$$\overline{H} = -\mathrm{grad}(\varphi_{\text{М}}) = -\frac{\partial \varphi_{\text{М}}}{\partial x}\cdot \bar{1}_x - \frac{\partial \varphi_{\text{М}}}{\partial y}\cdot \bar{1}_y - \frac{\partial \varphi_{\text{М}}}{\partial z}\cdot \bar{1}_z =$$

$$= -3\cdot \bar{1}_x + 4\cdot \bar{1}_y - 2\cdot \bar{1}_z \,, (\text{А/м}).$$

В результате:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} =$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = 5{,}385 \, (\text{А/м}).$$

Задача 3. При заданном векторном магнитном потенциале

$$\overline{A} = -\mu_a x^2 \cdot \overline{1}_x + 4\mu_a xy \cdot \overline{1}_y + c\mu_a xz \cdot \overline{1}_z \text{, (Вб/м)}$$

найти коэффициент ***c*** и определить вектора индукции $\overline{B}$ и плотности тока $\overline{\delta}$.

Решение. Из уравнения

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= -2\mu_a x + 4\mu_a x + c\mu_a x = 0$$

находим коэффициент $\boldsymbol{c = -2}$ (А/м^2).

Далее из уравнения

$$\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot \bar{1}_x +$$

$$+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot \bar{1}_z$$

определяем искомый вектор магнитной **индукции**:

$$\overline{B} = 0 \cdot \bar{1}_x + 2\mu_a z \cdot \bar{1}_y + 4\mu_a y \cdot \bar{1}_z \text{, (Тл).}$$

Проекции вектора **плотности** тока рассчитаем из скалярных уравнений **Пуассона**:

$$\delta_x = -\frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = 2\,(\text{А/м}^2);$$

$$\delta_y = -\frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right) = 0;$$

$$\delta_z = -\frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) = 0.$$

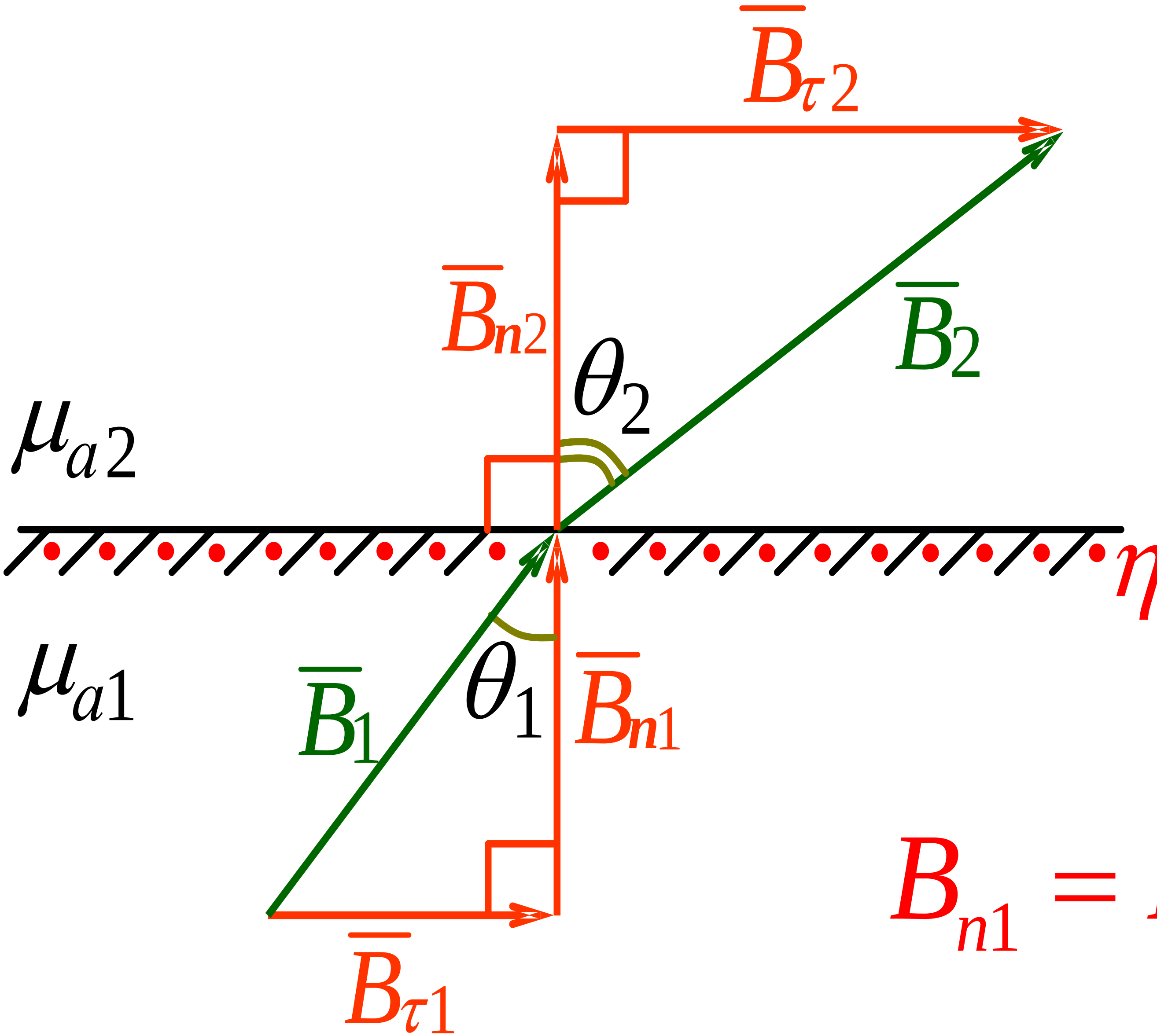
В результате искомый вектор **плотности тока** составит:

$$\bar{\delta} = \delta_x \cdot \bar{1}_x + \delta_y \cdot \bar{1}_y + \delta_z \cdot \bar{1}_z =$$

$$= 2 \cdot \bar{1}_x + 0 \cdot \bar{1}_y + 0 \cdot \bar{1}_z \text{ ,(А/м}^2\text{).}$$

Граничные условия магнитного поля постоянного тока

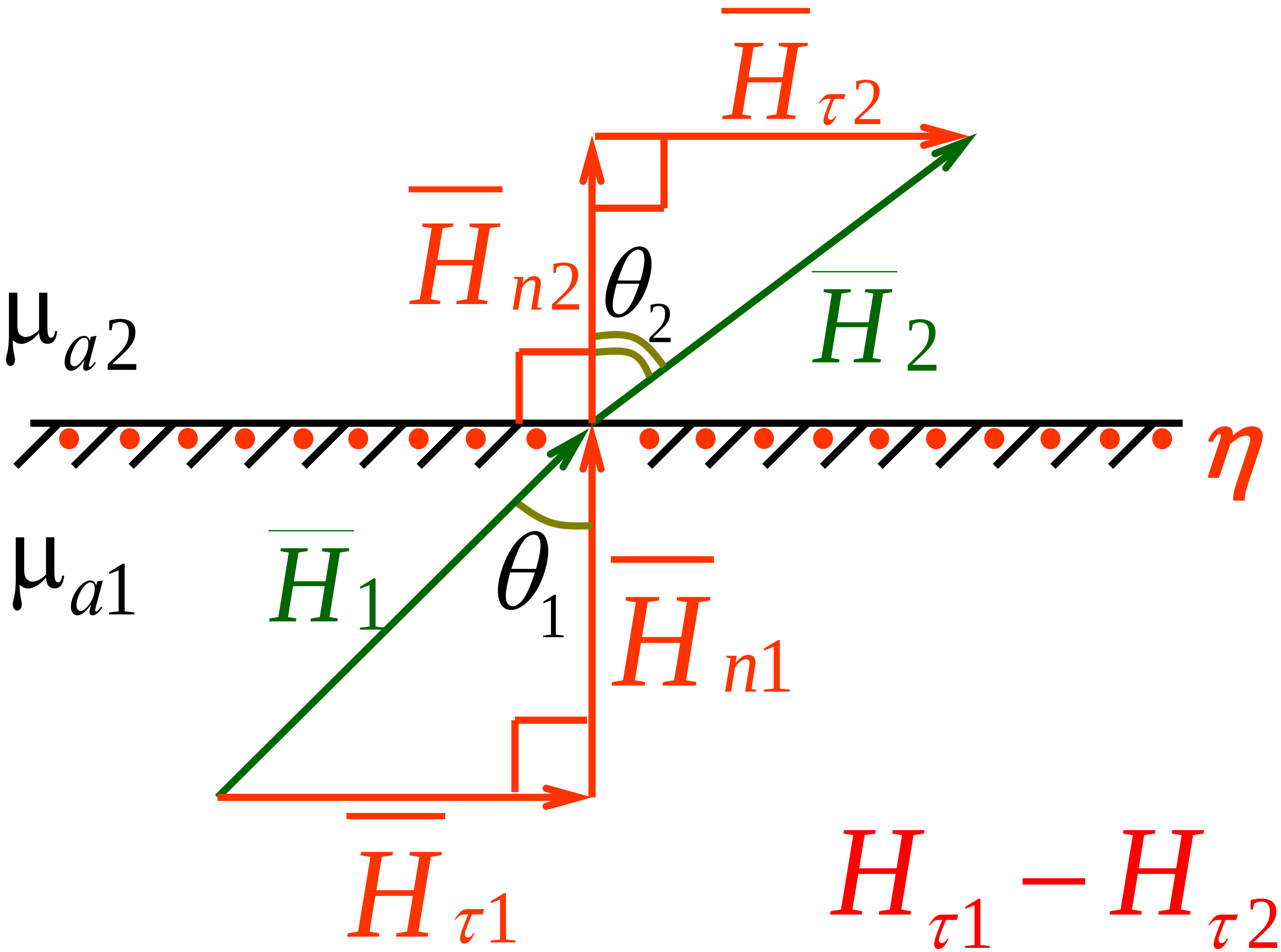
а)



$\bar{B}_{\tau 2}$
$\bar{B}_{n2}$
θ_2
$\bar{B}_2$
μ_{a2}
η
μ_{a1}
θ_1
$\bar{B}_1$
$\bar{B}_{n1}$
$\bar{B}_{\tau 1}$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

б)



$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \eta$$

в) при $\boldsymbol{\eta=0}$ $$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2}=\frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}};$$

г) $A_{\tau 1}=A_{\tau 2}$, $A_{n1}=A_{n2}$;

д) при $\boldsymbol{\eta=0}$ $$\varphi_{\text{М}1}=\varphi_{\text{М}2}.$$

Задача 1. На границе раздела двух сред с $\mu_{a1}=\mu_0$ и $\mu_{a2}=5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta=75$ (А/м) заданы в среде с μ_{a1} модуль вектора индукции $B_1=153{,}58\cdot\mu_0$ (Тл) и угол $\theta_1=60°$. Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора индукции B_2 .

Решение. Находим касательные составляющие напряженностей:

$$H_{\tau 1}=\frac{B_1 \sin\theta_1}{\mu_{a1}}=133\,(\text{А/м});$$

$$H_{\tau 2}=H_{\tau 1}-\eta=58\ (\text{А/м}).$$

Из равенства на границе **нормальных** составляющих индукции

$$B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2 = \frac{\mu_{a2} H_{\tau 2}}{\sin\theta_2} \cdot \cos\theta_2$$

определяем угол:

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_{a2} H_{\tau 2}}{B_1 \cos\theta_1} \right) = 75{,}17^\circ.$$

В результате искомый **модуль** вектора индукции составит:

$$B_2 = \frac{B_1 \cos\theta_1}{\cos\theta_2} = 300 \cdot \mu_0 \text{ (Тл)}.$$

Задача 2. На границе раздела двух сред с $\mu_{a1}=\mu_0$ и $\mu_{a2}=5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta=0$ (А/м) задан скалярный магнитный потенциал в среде с μ_{a1}:

$$\varphi_{\text{М}1} = -300x - 400y + 100,\ (\text{А}).$$

Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора напряженности H_2 (А/м).

Решение. В среде с $\boldsymbol{\mu_{a1}}$ находим

Составляющие вектора напряженности:

$$H_{\tau 1} = H_{x1} = -\frac{\partial \varphi_{\text{М}1}}{\partial x} = 300 \, (\text{А/м});$$

$$H_{n1} = H_{y1} = -\frac{\partial \varphi_{\text{М}1}}{\partial y} = 400 \, (\text{А/м}).$$

Из равенства на границе касательных составляющих напряженности при $\eta=0$ (А/м) и равенства нормальных составляющих индукции определяем составляющие вектора напряженности в среде с μ_{a2} :

$$H_{x2} = H_{x1} = 300 \text{ (А/м)};$$

$$H_{y2} = \frac{\mu_{a1} H_{y1}}{\mu_{a2}} = 80 \text{ (А/м)}.$$

В результате искомый модуль вектора напряженности составит:

$$H_2 = \sqrt{H_{x2}^2 + H_{y2}^2} = 310,48 \text{ (А/м)}.$$

Задача 3. На границе раздела двух сред с $\mu_{a1}=\mu_0$ и $\mu_{a2}=5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta=0{,}3/\mu_0$ (А/м) задан векторный магнитный потенциал в среде с μ_{a1}:

$$\bar{A}_1 = 0\cdot\bar{1}_x + 0\cdot\bar{1}_y +$$

$$+(-0{,}4x+0{,}3y)\cdot\bar{1}_z\,,(\text{Вб/м}).$$

Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора индукции B_2 (Тл).

Решение. В среде с μ_{a1} находим составляющие вектора индукции:

$$B_{\tau 1} = B_{x1} = \frac{\partial A_{z1}}{\partial y} = 0,3 \text{ (Тл)};$$

$$B_{n1} = B_{y1} = -\frac{\partial A_{z1}}{\partial x} = 0,4 \text{ (Тл)}.$$

Далее определяем составляющие вектора индукции в среде с $\boldsymbol{\mu_{a2}}$:

$$B_{y2} = B_{y1} = 0,4 \text{ (Тл)};$$

$$B_{x2} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} \cdot B_{x1} - \mu_{a2} \cdot \eta = 0.$$

В результате:

$$B_2 = \sqrt{B_{x2}^2 + B_{y2}^2} = 0,4 \text{ (Тл)}.$$