ТОЭ – часть 2
практическое занятие 18

Уравнения и граничные условия электрического поля постоянного тока

Уравнения электрического поля постоянного тока в прямоугольной системе координат

1. **Закон Ома** в дифференциальной форме:

$$\overline{\delta} = \gamma \overline{E} = \gamma E_x \bar{1}_x + \gamma E_y \bar{1}_y + \gamma E_z \bar{1}_z =$$

$$= \delta_x \bar{1}_x + \delta_y \bar{1}_y + \delta_z \bar{1}_z \text{ , А/м}^2$$

причем модуль вектора плотности тока равен

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} = \gamma \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} .$$

2. **Первый закон Кирхгофа** в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\overline{\delta} = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = 0,$$

причем при ***γ=const*** имеем

$$\operatorname{div}\overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

3. **Напряженность** электрического поля:

$$\overline{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{1}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{1}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{1}_z =$$

$$= E_x\bar{1}_x + E_y\bar{1}_y + E_z\bar{1}_z\,,\ \text{В/м}$$

4. **Уравнение Лапласа** для потенциала:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Задача 1. При векторе напряженности

$$\overline{E} = 3x \cdot \bar{1}_x - 2y \cdot \bar{1}_y + cz \cdot \bar{1}_z \text{, В/м}$$

определить **модуль** вектора плотности тока $\boldsymbol{\delta}$ (А/мм^2) в точке с координатами **x=0,2 (м), y=0,2 (м), z=0,2 (м)**

при заданной удельной проводимости среды **γ=15·10^6** (1/Ом·м).

Решение. Для определения коэффициента ***c*** вектора напряженности воспользуемся уравнением:

$$\operatorname{div}(\overline{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3 - 2 + c = 0,$$

тогда **$c = -1$** (В/м^2).

Далее записываем **вектор** плотности тока

$$\overline{\delta} = \gamma \overline{E} = 45 \cdot 10^{6} x \cdot \bar{1}_x -$$

$$-30 \cdot 10^{6} y \cdot \bar{1}_y - 15 \cdot 10^{6} z \cdot \bar{1}_z \text{, А/м}^2$$

и в точке с координатами

***x*=0,2 (м), *y*=0,2 (м), *z*=0,2** (м)

находим искомый **модуль** этого вектора:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(45 \cdot 10^6 \cdot 0,2\right)^2 + \left(30 \cdot 10^6 \cdot 0,2\right)^2 + \left(15 \cdot 10^6 \cdot 0,2\right)^2} =$$

$$= 11,225 \cdot 10^6 = 11,225 \quad (\text{А/мм}^2).$$

Задача 2. При заданном векторе плотности тока

$$\bar{\delta} = 4x \cdot \bar{1}_x + 3y \cdot \bar{1}_y - 7z \cdot \bar{1}_z \text{ ,} \quad (\text{А/мм}^2)$$

определить значение потенциала ***φ*** (В) вида

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

в точке с координатами

***x*=3 (м), *y*=2 (м), *z*=1 (м)** при известной удельной проводимости среды

γ=10·10^6 (1/Ом·м).

Решение. Переведем заданный вектор плотности тока в (А/м^2) и по закону **Ома** в дифференциальной форме запишем вектор напряженности:

$$\overline{E} = \frac{\overline{\delta} \cdot 10^6}{\gamma} =$$

$$= 0,4x \cdot \overline{1}_x + 0,3y \cdot \overline{1}_y - 0,7z \cdot \overline{1}_z \text{ , (В/м).}$$

Далее на основании уравнения

$$\overline{E} = -\mathrm{grad}(\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\bar{1}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\bar{1}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\bar{1}_z$$

находим составляющие потенциала:

$$Ax^2 = -\int E_x \cdot dx = -\int 0,4x \cdot dx = -0,2x^2\ ,(\mathrm{B});$$

$$By^2 = -\int E_y \cdot dy = -\int 0,3y \cdot dy = -0,15y^2\ ,(\mathrm{B});$$

$$Cz^2 = -\int E_z \cdot dz = -\int (-0,7z) \cdot dz = 0,35z^2\ ,(\mathrm{B}).$$

В результате зависимость для потенциала будет следующей

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 =$$

$$= -0,2x^2 - 0,15y^2 + 0,35z^2, \text{ (В)}.$$

Искомое значение **потенциала** в точке с координатами ***x*=3 (м), *y*=2 (м), *z*=1 (м)** составит:

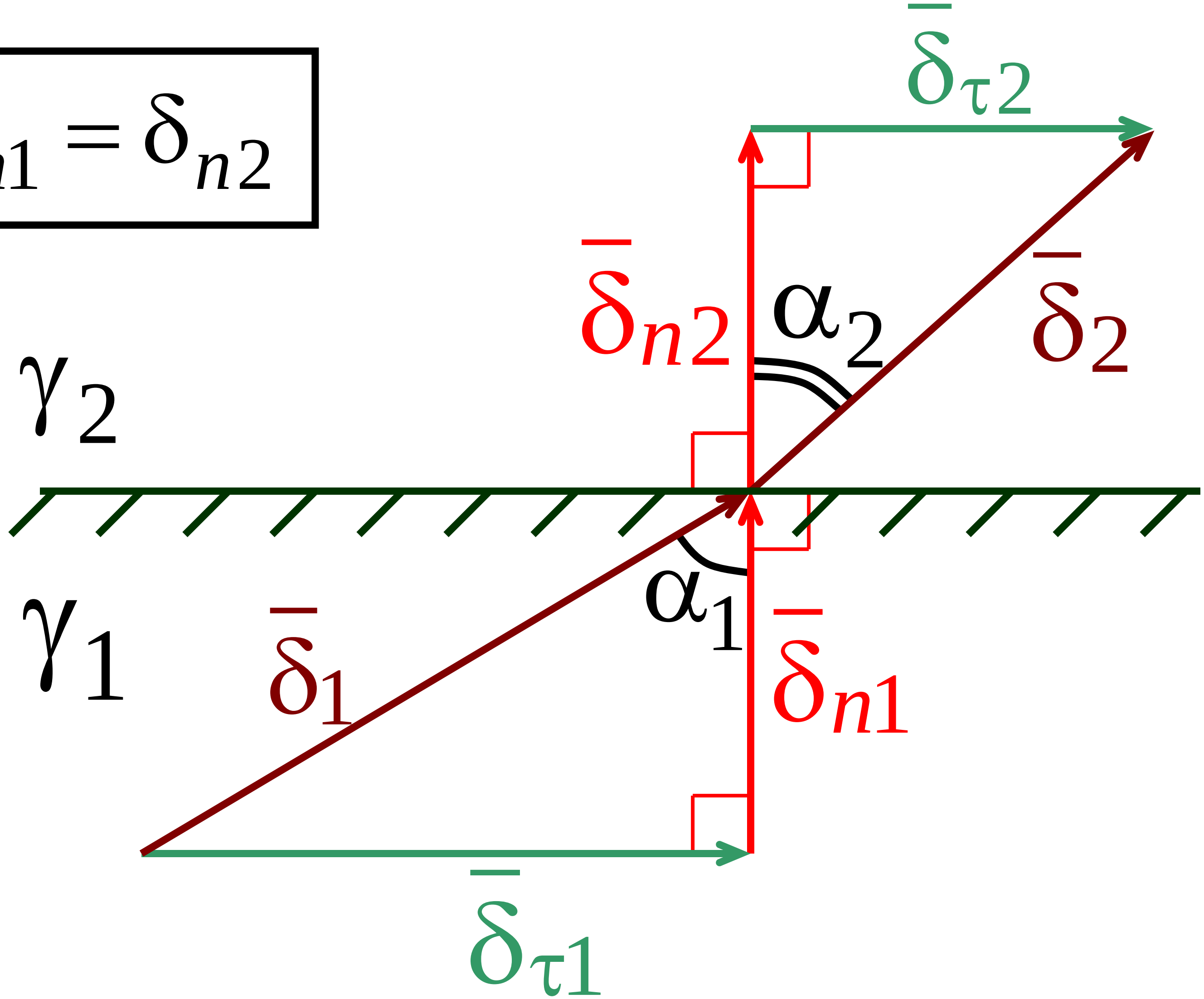
$$\varphi = -0,2\cdot(3)^2 - 0,15\cdot(2)^2 +$$

$$+0,35\cdot(1)^2 = -2,05\ \text{(В)}.$$

Граничные условия электрического поля постоянного тока

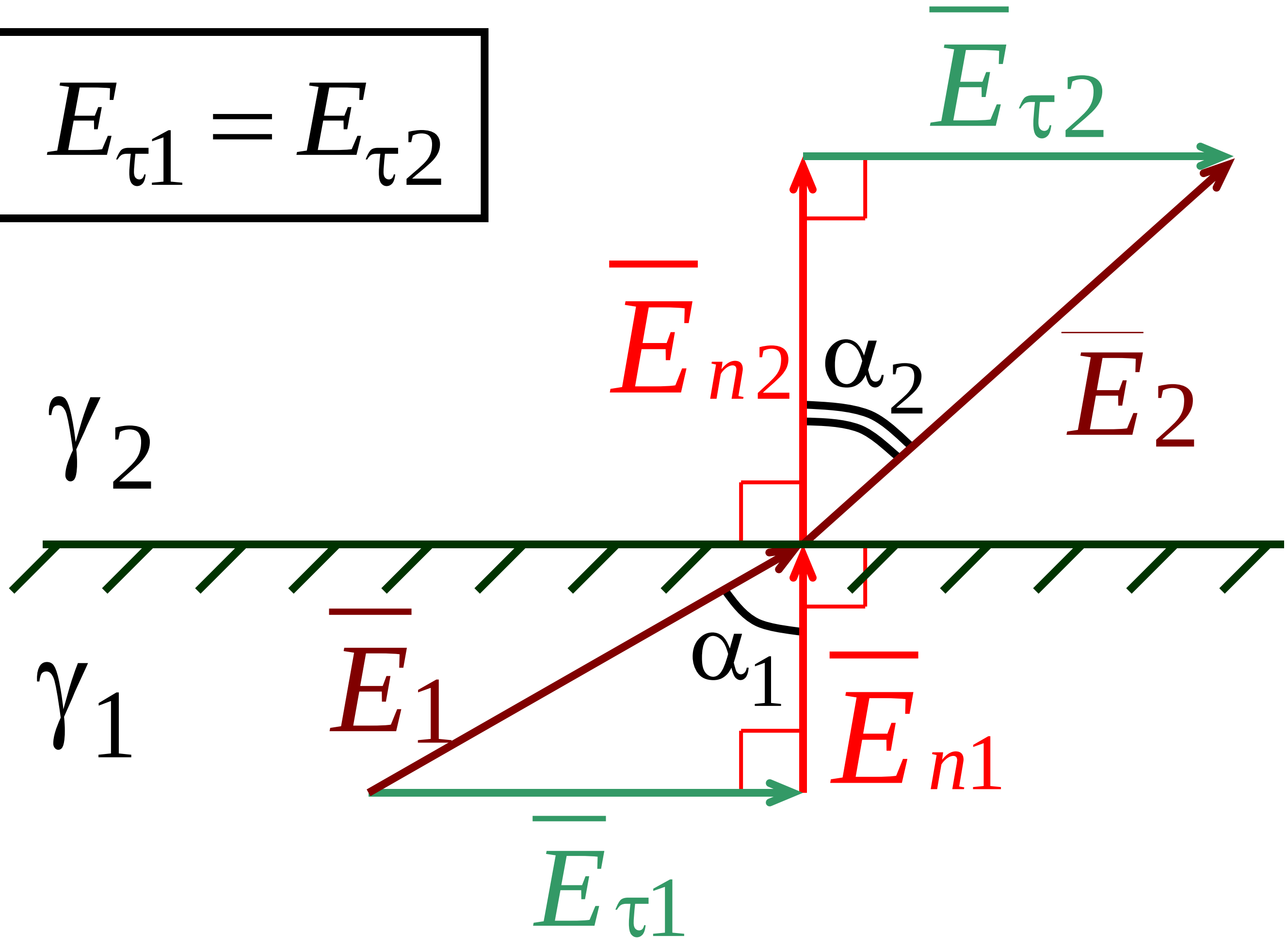
1. На границе проводников равны нормальные составляющие плотности тока:

$$\boxed{\delta_{n1} = \delta_{n2}}$$



2. На границе проводников равны касательные составляющие напряженности:

$$\boxed{E_{\tau 1} = E_{\tau 2}}$$



3. Для углов входа (α_1) и выхода (α_2) векторов плотности тока и напряженности на границе проводников выполняется условие:

$$\boxed{\frac{\mathbf{tg}(\alpha_1)}{\mathbf{tg}(\alpha_2)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \qquad (1)$$

Задача 1. На границе раздела двух проводников с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 заданы модули векторов плотности тока $\boldsymbol{\delta_1=20}$ (А/мм^2); $\boldsymbol{\delta_2=30{,}41}$ (А/мм^2) и угол $\boldsymbol{\alpha_1=30°}$. Определить для удельных проводимостей отношение γ_2/γ_1.

Решение. Из равенства нормальных составляющих плотностей тока на границе раздела двух проводников

$$\delta_1 \cos(\alpha_1) = \delta_2 \cos(\alpha_2)$$

находим угол выхода вектора плотности тока в проводнике с $\boldsymbol{\gamma_2}$:

$$\alpha_2 = \arccos\left[\frac{\delta_1}{\delta_2}\cos(\alpha_1)\right] = 55{,}28^{\circ}.$$

Далее из уравнения

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha_1)}{\mathrm{tg}(\alpha_2)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

определяем искомое отношение:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha_2)}{\mathrm{tg}(\alpha_1)} = 2{,}5.$$

Задача 2. На границе раздела двух проводников с удельными проводимостями $\gamma_1=3\gamma_0$ и $\gamma_2=\gamma_0$ заданы модуль вектора напряженности $E_1=11{,}547$ (В/м) и угол $\alpha_1=60°$.
Определить модуль вектора напряженности E_2 (В/м) в проводнике с удельной проводимостью $\gamma_2=\gamma_0$.

Решение. Из уравнения (1) находим угол выхода вектора напряженности в проводнике с $\boldsymbol{\gamma_2}$:

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} tg(\alpha_1)\right] = 30^\circ .$$

Далее из равенства **касательных** составляющих напряженностей

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2)$$

определяем искомый **модуль** вектора напряженности:

$$E_2 = \frac{E_1 \sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = 20 \text{ (В/м).}$$