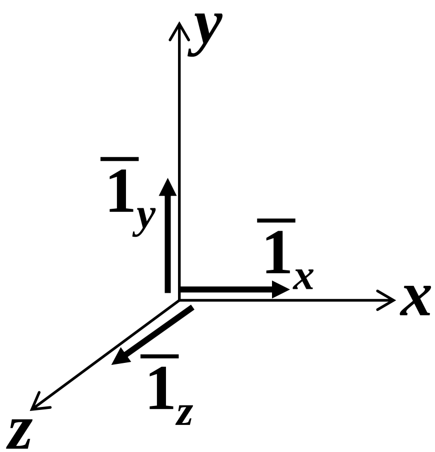
ТОЭ – часть 2
практическое занятие 17

Уравнения и граничные условия электростатического поля

Уравнения электростатического поля в прямоугольной системе координат



$\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ **– единичные векторы;**

$$\overline{E} = E_x \cdot \bar{1}_x + E_y \cdot \bar{1}_y + E_z \cdot \bar{1}_z;$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2};$$

$$\mathrm{rot}\overline{E} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z = 0;$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E}; \qquad D_{x,y,z} = \varepsilon_a E_{x,y,z};$$

$$\overline{D} = D_x \cdot \bar{1}_x + D_y \cdot \bar{1}_y + D_z \cdot \bar{1}_z\,;$$

$$\mathrm{div}\overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho\,;$$

$$\overline{E} = -\mathrm{grad}(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \bar{1}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \bar{1}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \bar{1}_z\,;$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Задача 1. Определить модуль вектора напряженности

$$\overline{E} = 7x \cdot \bar{1}_x + 5z \cdot \bar{1}_y + cy \cdot \bar{1}_z \text{ , (В/м)}$$

в точке с координатами

***x*=2 (м), *y*=3 (м), *z*=4 (м)**.

Решение.

Из уравнения электростатического поля в прямоугольной системе координат:

$$\operatorname{rot}\overline{E} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\cdot\bar{1}_x +$$

$$+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cdot\bar{1}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot\bar{1}_z =$$

$$=(c-5)\cdot\bar{1}_x + (0-0)\cdot\bar{1}_y + (0-0)\cdot\bar{1}_z = 0.$$

Находим коэффициент $\boldsymbol{c=5}$ (В/м^2).

Далее рассчитываем проекции вектора напряженности в заданной точке с координатами **x=2 (м), y=3 (м), z=4 (м)**:

$$E_x = 7x = 7 \cdot 2 = 14 \text{ (В/м)}$$

$$E_y = 5z = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (В/м)}$$

$$E_z = cy = 5 \cdot 3 = 15 \text{ (В/м)}$$

Искомый **модуль** вектора напряженности:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{14^2 + 20^2 + 15^2} =$$

$$= 28,653 \text{(В/м)}$$

Задача 2. Определить объемную **плотность** зарядов ρ (мкКл/м^3) при потенциале:

$$\varphi = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot y^2 - 6 \cdot 10^{-6} \cdot z^2}{\varepsilon_a}, \text{В}.$$

Решение. Из уравнения **Пуассона** в прямоугольной системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

получаем

$$\frac{-2\cdot 10^{-6}}{\varepsilon_a} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

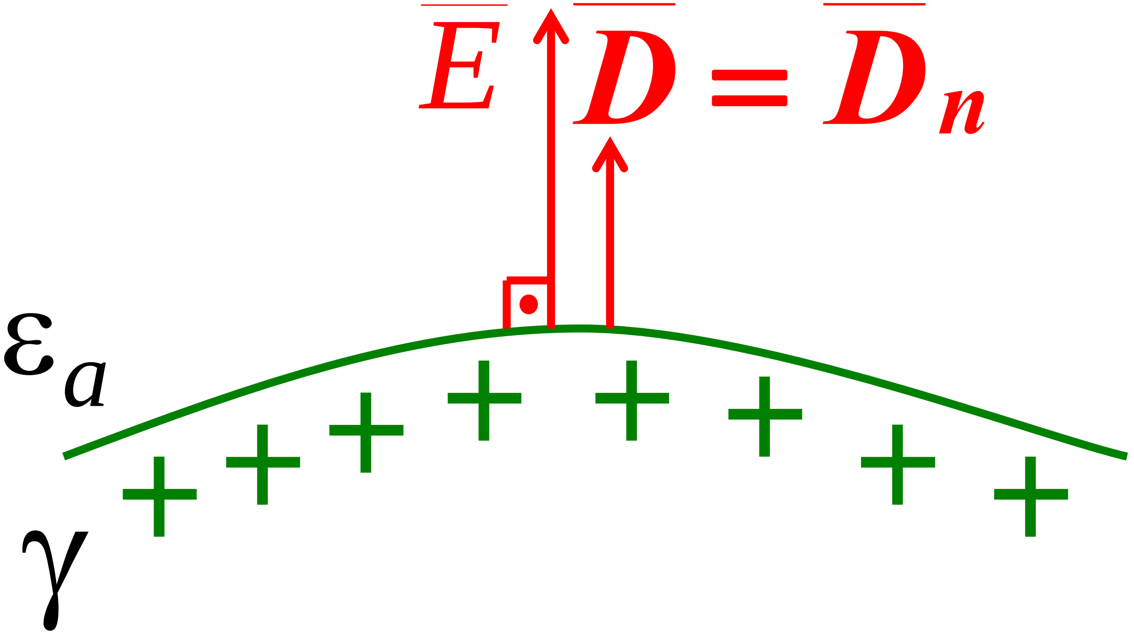
тогда искомая объемная **плотность** зарядов составит:

$$\rho = 2\cdot 10^{-6} = 2 \quad (\text{мкКл/м}^3).$$

Граничные условия электростатического поля

1. Проводник-диэлектрик

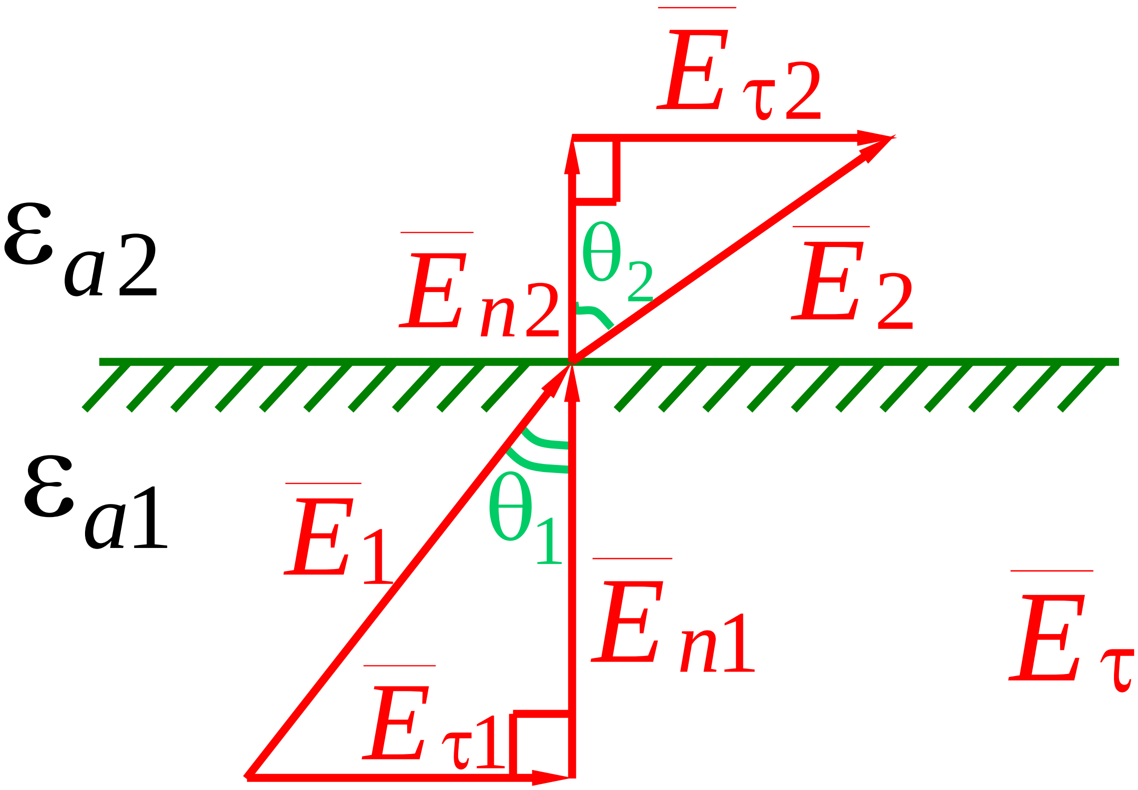
$$\bar{E} \quad \bar{\boldsymbol{D}} = \bar{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{n}}$$



$$\bar{E}_{\tau} = 0$$

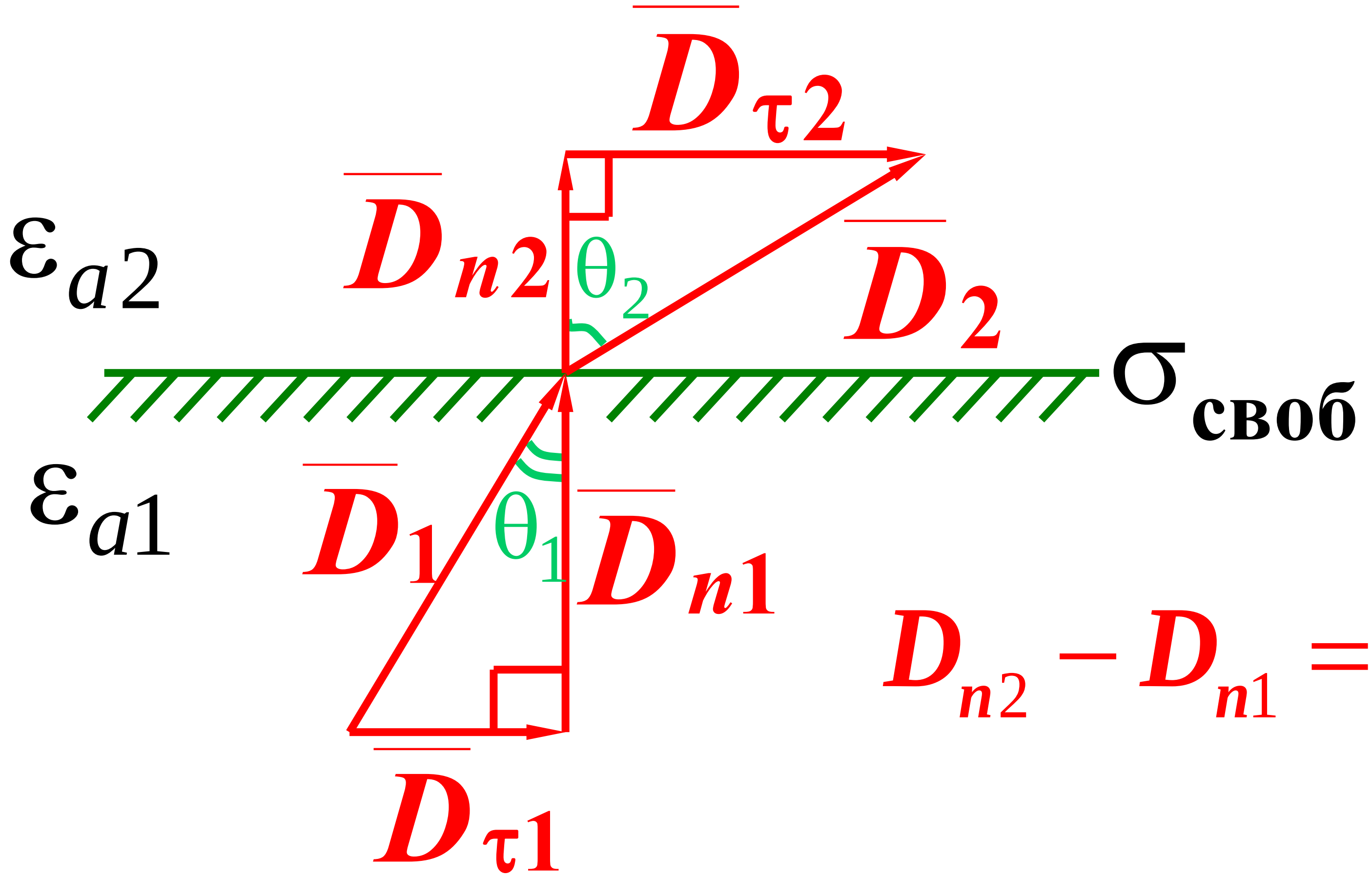
$$D = D_n = \sigma_{\text{своб}}, \ \text{Кл}/\text{м}^2$$

2. Диэлектрик-диэлектрик



$$\overline{E}_{\tau 1} = \overline{E}_{\tau 2}$$

3. Диэлектрик-диэлектрик



$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{своб}$$

4. Диэлектрик-диэлектрик

Для углов входа θ_1 и выхода θ_2 векторов при $\sigma_{своб}=0$ выполняется равенство

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\mathrm{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}$$

5. Диэлектрик-диэлектрик

Если $\sigma_{своб} = 0$, то $D_{n1}=D_{n2}=D_n$, тогда поверхностная плотность связанных зарядов на границе двух диэлектриков будет равна разности нормальных составляющих векторов поляризованности:

$$\sigma_{связ}=P_{n1}-P_{n2} \,.$$

В результате при

$P_{n1}=(\varepsilon_{a1}-\varepsilon_0)D_n/\varepsilon_{a1}$; $P_{n2}=(\varepsilon_{a2}-\varepsilon_0)D_n/\varepsilon_{a2}$

получаем:

$$\sigma_{\text{связ}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2})}{\varepsilon_{a1} \cdot \varepsilon_{a2}} \cdot D_n =$$

$$= \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot D_n \quad , \text{Кл}/\text{м}^2 .$$

Если $\varepsilon_{r1}>\varepsilon_{r2}$ **, то** $\sigma_{\text{связ}}>0$**,**

иначе $\sigma_{\text{связ}}<0$**.**

Задача 1. На границе раздела двух диэлектриков с ε_{a1} и ε_{a2} при поверхностной плотности свободных зарядов $\sigma_{своб} = 11{,}6 \cdot \varepsilon_0$ (Кл/м^2) задан модуль вектора электрической индукции $D_1 = 150 \cdot \varepsilon_0$ (Кл/м^2) и углы $\theta_1 = 60°$ и $\theta_2 = 30°$. Определить отношение D_2/ε_0 (В/м).

Решение. Из граничного условия

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{своб}$$

находим модуль вектора электрической индукции в диэлектрике с проницаемостью ε_{a2}:

$$D_2 = (D_1 \cos\theta_1 + \sigma_{своб}) / \cos\theta_2 = 100\varepsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

В результате искомое отношение составит: $D_2/\varepsilon_0 = 100$ (В/м).

Задача 2. На границе раздела двух диэлектриков с $\varepsilon_{a1}=3\varepsilon_0$ и $\varepsilon_{a2}=2\varepsilon_0$ при поверхностных плотностях свободных $\sigma_{своб}=0$ (Кл/м^2) и связанных зарядов $\sigma_{связ}$ (Кл/м^2) задан в диэлектрике с ε_{a1} модуль нормальной составляющей вектора поляризованности $P_{n1}=100\cdot\varepsilon_0$ (Кл/м^2).

Определить на границе для связанных зарядов отношение $\sigma_{связ}/\varepsilon_0$.

Решение. На границе в диэлектрике с ε_{a1} находим нормальную составляющую вектора электрической индукции

$$D_{n1}=\varepsilon_{a1}P_{n1}/(\varepsilon_{a1}-\varepsilon_0)=150\varepsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

Затем на границе в диэлектрике с ε_{a2} при $D_{n1}=D_{n2}$ рассчитываем модуль нормальной составляющей вектора поляризованности:

$$P_{n2}=(\varepsilon_{a2}-\varepsilon_0)D_{n2}/\varepsilon_{a2}=75\varepsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

В результате поверхностная плотность **связанных** зарядов на границе двух диэлектриков составит:

$$\boldsymbol{\sigma_{\text{связ}} = P_{n1} - P_{n2} = 25 \cdot \varepsilon_0} \ (\text{Кл/м}^2),$$

тогда $\boldsymbol{\sigma_{\text{связ}}/\varepsilon_0 = 25}$.